

Physique PCSI

Introduction au monde quantique

Dualité onde-particule

Ondes et particules

Avant l'avènement de la physique quantique, la description du monde utilisait deux objets complémentaires : les particules et les ondes.

Particules	Ondes
Une particule est localisée dans l'espace	Une onde n'est pas localisée dans l'espace
Une particule est caractérisée par : — sa position $\vec{r}$; — sa quantité de mouvement $\vec{p}$ (ou sa vitesse $\vec{v}$)	Une onde est caractérisée par : — son amplitude (algébrique) et sa phase en chaque point et à chaque instant ; — sa longueur d'onde λ ; — son spectre fréquentiel (en la décomposant en ondes harmoniques)
Une particule décrit une trajectoire au cours du temps.	Une onde peut donner lieu à des phénomènes d'interférences et de diffraction.

À l'échelle macroscopique, la distinction entre particules et ondes semble évidente : un ballon se comporte comme une particule, les vagues à la surface de l'eau comme une onde.

- À l'échelle microscopique, un électron semble à première vue se comporter comme une particule : dans un tube cathodique, il a une trajectoire bien définie, et son impact avec l'écran se visualise par un point, dont la position est entièrement prévisible à partir de la trajectoire.
- La lumière semble se comporter comme une onde : on peut observer des interférences lumineuses.

Des expériences ont cependant mis à mal ces deux points de vue, mettant à jour un comportement corpusculaire de la lumière et ondulatoire de l'électron.

L'effet photoélectrique

L'effet photoélectrique a été étudié par Hertz en 1887 : une plaque de métal, soumise à l'action d'une source lumineuse, peut émettre des électrons.

- Les électrons ne sont émis que si la fréquence de la lumière est supérieure à une fréquence seuil : $\nu > \nu_{\text{seuil}}$, qui dépend du matériau.
- Le nombre d'électrons émis dépend de l'intensité de la lumière éclairant la plaque.

Relation de Planck-Einstein

Pour expliquer l'effet photo-électrique, Einstein a remis en cause le modèle ondulatoire de la lumière, en introduisant (1905) la notion de photon et de quantification de l'énergie.

Les échanges d'énergie d'un rayonnement électromagnétique se font par « paquets », ou *quanta* d'énergie, appelés **photons**.

Les photons associés à une onde électromagnétique de fréquence ν (et de pulsation ω) sont des particules sans masse, possédant une énergie E donnée par la **relation de Planck-Einstein** :

$$E = h\nu = \hbar\omega,$$

où h est la constante de Planck et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

- La constante de Planck, caractéristique de la physique quantique, vaut $h \approx 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$. On retiendra en ordre de grandeur $\hbar \approx 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$.

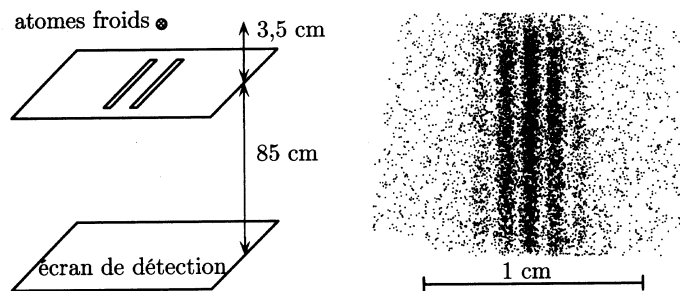
La fréquence seuil de l'effet photoélectrique correspond donc à l'énergie minimale que doit avoir le photon pour arracher un électron : l'électron, absorbant le photon, possède une énergie suffisante pour s'échapper du métal.

Caractère ondulatoire de la matière

En 1927, Davisson et Germer ont bombardé un cristal de nickel avec des électrons : la répartition angulaire des électrons réfléchis formait une figure de diffraction, caractéristique d'un phénomène ondulatoire.

En 1992, des chercheurs ont réalisé une figure d'interférences en envoyant des atomes de néon sur deux fentes d'Young.

Expériences des fentes d'Young réalisée avec des atomes de néon, préalablement refroidis par laser. Sur la figure de la distribution observée expérimentalement, chaque point représente l'impact d'un atome sur la plaque détectrice.



Relation de Louis de Broglie

En 1924, Louis de Broglie a formulé son hypothèse selon laquelle à tout corps matériel possédant une énergie E et une quantité de mouvement p on peut associer une « onde de matière » (onde de de Broglie) de longueur d'onde λ_{DB} donnée par la **relation de de Broglie** :

$$p = \frac{h}{\lambda_{\text{DB}}}$$

- La quantité de mouvement est reliée au vecteur d'onde¹ de l'onde de de Broglie : $\vec{p} = \hbar \vec{k}_{\text{DB}}$.
- La fréquence de l'onde de de Broglie est reliée à l'énergie de la particule selon $E = h\nu_{\text{DB}}$.

Cas du photon

Le photon est une particule de masse nulle, possédant une énergie E et une quantité de mouvement $\vec{p} = p\vec{u}$ reliées par $E = pc$.

- Attention, dans le cas général $\lambda_{\text{DB}} \neq \frac{c}{\nu_{\text{DB}}}$. Ces deux termes ne sont égaux que pour les particules de masse nulle.

Une particule matérielle révèle un caractère ondulatoire si sa longueur d'onde de de Broglie est au moins de l'ordre de la taille de l'« obstacle » qu'elle rencontre.

Ni onde, ni particule : le quanton

Le photon, l'électrons, les atomes... peuvent présenter, selon les expériences, un comportement ondulatoire ou corpusculaire.

1. On rappelle la relation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

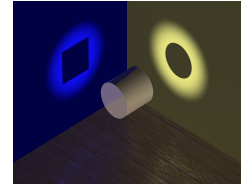
L'**aspect ondulatoire** est une manifestation délocalisée de l'énergie, lors de phénomènes d'interférences ou de diffraction.

L'**aspect corpusculaire** est une manifestation localisée et indivisible de l'énergie. Il apparaît lors de l'effet photoélectrique, de collisions de particules.

D'après le **principe de complémentarité de Bohr**, les aspects corpusculaires et ondulatoires sont deux représentations complémentaires d'un seul et même objet physique.

- Ces deux représentations s'excluent : on observe soit l'aspect corpusculaire soit l'aspect ondulatoire d'un objet quantique, pas les deux à la fois.

Cette dualité peut se comprendre avec la métaphore du cylindre : selon le point de vue, un cylindre peut apparaître comme un cercle ou comme un rectangle. Pourtant ce n'est ni l'un ni l'autre. On a deux vues complémentaires du même objet. Ces deux aspects ne peuvent être observés en même temps.



Un système physique élémentaire étudié dans le cadre de la physique quantique est appelé **particule quantique**, ou **quanton**.

Fonction d'onde : interprétation probabiliste

Interprétation probabiliste de la fonction d'onde

L'état d'un quanton est entièrement décrit par une **fonction d'onde** complexe $\underline{\Psi}(M, t)$ qui représente une **amplitude de probabilité** d'état.

La probabilité de trouver la particule à l'instant t dans le volume $d\tau_M$ est

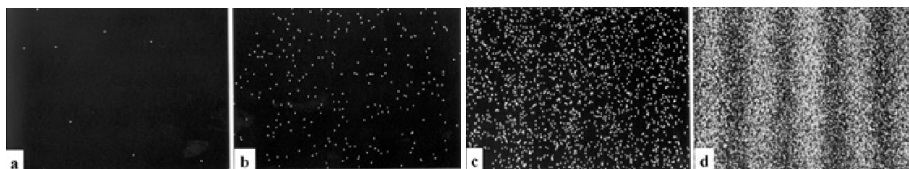
$$dP = |\underline{\Psi}(M, t)|^2 d\tau_M = \underline{\Psi}(M, t) \underline{\Psi}^*(M, t) d\tau_M.$$

La fonction d'onde est normalisée, ce qui traduit que l'on est certain de trouver la particule... quelque part :

$$\iiint_{\text{espace}} |\underline{\Psi}(M, t)|^2 d\tau_M = 1.$$

Interférences « particule par particule »

On considère l'expérience des fentes d'Young, sur lesquelles on envoie un quanton (photon ou particule matérielle) afin de réaliser des interférences. Si l'on envoie les quantons un par un, on observe des impacts qui semblent aléatoires sur la plaque détectrice ; petit à petit, on voit la figure d'interférences apparaître ! Ci-après la figure d'interférences réalisée avec des électrons. Le nombre d'électrons reçu est 8 (a), 270 (b), 2000 (c) et 60000 (d).



On peut interpréter le résultat de cette expérience à l'aide de l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde.

On note $\underline{\Psi}_1$ la fonction d'onde associée à un quanton quand la fente 1 est ouverte seule. La probabilité de le détecter en un point M de l'écran est proportionnelle à $|\underline{\Psi}_1(M, t)|^2$.

On note $\underline{\Psi}_2$ la fonction d'onde associée à un quanton quand la fente 2 est ouverte seule. La probabilité de le détecter en un point M de l'écran est proportionnelle à $|\underline{\Psi}_2(M, t)|^2$.

Quand les deux fentes sont ouvertes, la fonction d'onde associée au quanton est²

$$\underline{\Psi}(M, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\underline{\Psi}_1(M, t) + \underline{\Psi}_2(M, t)] .$$

La probabilité de le détecter en un point M de l'écran est proportionnelle à

$$\begin{aligned} |\underline{\Psi}(M, t)|^2 &= \frac{1}{2} |\underline{\Psi}_1(M, t) + \underline{\Psi}_2(M, t)|^2 \\ &= \frac{1}{2} |\underline{\Psi}_1(M, t)|^2 + \frac{1}{2} |\underline{\Psi}_2(M, t)|^2 + \frac{\underline{\Psi}_1(M, t)\underline{\Psi}_2^*(M, t) + \underline{\Psi}_1^*(M, t)\underline{\Psi}_2(M, t)}{2} . \end{aligned}$$

On retrouve le résultat relatif aux interférences $|\underline{\Psi}(M, t)|^2 \neq \frac{1}{2} |\underline{\Psi}_1(M, t)|^2 + \frac{1}{2} |\underline{\Psi}_2(M, t)|^2$, le terme supplémentaire étant un terme d'interférences entre ondes de probabilité.

Inégalité de Heisenberg spatiale

Relation d'indétermination de Heisenberg spatiale

On a vu que lors de l'expérience des fentes d'Young, on ne peut savoir de façon certaine où sera mesurée la position de la particule sur l'écran; le résultat de cette mesure est aléatoire, suivant une certaine loi de probabilité décrite par la fonction d'onde.

La mesure de l'abscisse x de la position de la particule sur l'écran est caractérisée par une **indétermination** Δx qui correspond à l'écart-type $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.

Selon un axe Ox quelconque, la mesure de la position x et de la composante p_x de la quantité de mouvement d'un quanton présente des **indéterminations fondamentales** Δx et Δp_x vérifiant l'inégalité d'Heisenberg

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} .$$

- On a de même $\Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2$ et $\Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2$.
- L'inégalité d'Heisenberg ne concerne que la même coordonnées; on ne peut rien dire quant à $\Delta x \Delta p_y$ par exemple.
- En ordre de grandeur, on a $\Delta x \Delta p_x \approx \hbar$.
- L'inégalité d'Heisenberg n'a rien d'une incertitude expérimentale; il s'agit d'une **indétermination fondamentale**.

Énergie minimale de l'oscillateur harmonique quantique

Considérons un oscillateur harmonique unidimensionnel selon un axe Ox , autour de la position d'équilibre stable $x = 0$.

En mécanique classique, son énergie mécanique s'écrit

$$E_m = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 .$$

L'énergie minimale de l'oscillateur classique est $E_m = 0$, obtenue à l'équilibre pour $x = 0$ et $p_x = 0$. La position et la quantité de mouvement sont alors parfaitement déterminées et on a $\Delta x = 0$ et $\Delta p_x = 0$.

Cette situation est interdite en mécanique classique, l'inégalité d'Heisenberg imposant $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

Un oscillateur harmonique quantique ne peut jamais avoir une énergie mécanique nulle, quelles que soient les contraintes qui lui sont imposées.

2. Le facteur $1/\sqrt{2}$ vient de la normalisation de la fonction d'onde.

Les oscillations de l'oscillateur étant symétrique autour de l'équilibre $x = 0$, on a $\langle x \rangle = 0$ et $\langle p_x \rangle = 0$; les incertitudes sont donc données par

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} \quad \text{et} \quad \Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2} = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}.$$

L'énergie mécanique étant constante pour l'oscillateur harmonique, on a

$$E_m = \langle E_m \rangle = \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle x^2 \rangle = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (\Delta x)^2.$$

D'après l'inégalité de Heisenberg, $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$, d'où $E_m \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 (\Delta x)^2$.

L'énergie mécanique est minimum pour $(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$.

L'énergie du point zéro est la plus faible énergie d'un système physique quantique.
L'énergie de l'oscillateur harmonique quantique unidimensionnel vérifie

$$E_m \geq E_{m,0} = \frac{\hbar\omega}{2},$$

où son énergie du point zéro $E_{m,0}$ correspond à celle de son état fondamental.

Quantification de l'énergie d'une particule libre confinée

Une particule est dite libre si elle n'est soumise à aucune force. Sa quantité de mouvement est donc une constante du mouvement, et son énergie mécanique se réduit à son énergie cinétique (on peut considérer qu'elle se déplace dans le potentiel $V = 0$). En utilisant la relation de de Broglie $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$, l'énergie s'écrit

$$E_m = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Considérons une particule libre, en mouvement unidimensionnel, confinée entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. Cela revient à considérer la particule dans le potentiel³

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0, L] \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La particule est dans un **puits de potentiel infini**.

► Dans la zone $x \in [0, L]$, la particule est libre et $E_m = \frac{p^2}{2m}$.

► L'onde de de Broglie associée à cette particule a pour longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{p}$. Elle est caractérisée par une amplitude de probabilité $\underline{\Psi}(x)$ telle que $|\underline{\Psi}(x)|^2$ représente la probabilité de présence de la particule à l'abscisse x .

Le confinement se traduit par $\underline{\Psi}(x) = 0$ pour $x < 0$ ou $x > L$: on ne peut trouver la particule en dehors de l'intervalle $[0, L]$. En admettant la continuité de $\underline{\Psi}(x)$, on en déduit

$$\underline{\Psi}(0) = \underline{\Psi}(L) = 0.$$

Cette relation est analogue aux conditions aux limites imposée aux extrémités d'une corde vibrante. Par analogie, nous pouvons en déduire que l'onde de de Broglie associée à la particule doit être une

3. Seules les régions où $E_m \geq V(x)$ sont accessibles; la particule ne peut donc se trouver dans une région où $V \rightarrow +\infty$.

onde stationnaire, telle que les extrémités $x = 0$ et $x = L$ correspondent à des nœuds. Les longueurs d'onde possibles doivent donc vérifier $L = n \frac{\lambda_n}{2}$, avec $n \in \mathbf{N}^*$.

L'onde associée à une particule libre confinée sur une longueur L ne peut avoir que des longueurs d'onde λ_n vérifiant

$$(n+1) \frac{\lambda_n}{2} = L \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}.$$

L'énergie correspondante s'écrit alors

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{(n+1)\pi}{L} \right)^2.$$

Le confinement d'une particule libre sur un intervalle de largeur L entraîne une **quantification** de son énergie :

$$E_n = (n+1)^2 \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \quad \text{avec} \quad n \in \mathbf{N}.$$

L'énergie la plus basse correspond au fondamental :

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2.$$