

Exercice 1 (Centrale 2).

Une **matrice stochastique** est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que, sur chaque ligne, la somme des coefficients soit égale à 1.

1. Écrire une fonction `TestStochastique(A)` qui prend en entrée une matrice carrée et renvoie un booléen selon que la matrice est stochastique ou non.
2. Écrire une fonction d'en-tête `ligne(n)` qui prend en entrée un entier n et renvoie un n -uplet de nombres positifs dont la somme vaut 1.
On pourra penser à utiliser la fonction `randint(a,b)` de la bibliothèque `random` pour générer des entiers aléatoires entre a et b , inclus tous les deux.
3. Écrire une fonction d'en-tête `ST(n)` qui prend en entrée un entier n et renvoie une matrice stochastique de taille n .
4. Générer des matrices stochastiques de taille 4 ou 5 et calculer leurs "grandes" puissances. Émettre une conjecture.

Exercice 2 (Centrale 2).

Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on considère la matrice suivante :

$$M(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Écrire une fonction `spectre(t)` qui prend un flottant t en entrée et renvoie le triplet $[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]$.
2. Représenter graphiquement les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sur le segment $[-3, 3]$.
3. Montrer que les valeurs propres de $M(t)$ sont réelles.

On les note $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ dans l'ordre croissant.

4. Écrire une fonction `classer(triplet)` qui trie (en place) le triplet dans l'ordre croissant (cette fonction ne renvoie pas de résultat).
5. Représenter sur un même graphe les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ainsi que la première bissectrice. Émettre des conjectures.
6. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_t(x)$ de la matrice $M(t)$.
7. Pour tout $t > 0$, montrer l'encadrement $\lambda_1(t) < -1 < \lambda_2(t) < 1 < \lambda_3(t)$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\chi_t(x)$ quand t tend vers $+\infty$. En déduire les limites des fonctions λ_i en $+\infty$.
9. Démontrer les conjectures faites.

Exercice 3 (Centrale 2).

Soient n et N deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On dispose de N urnes et de n boules.

Chaque boule est déposée dans l'une des urnes, choisie équiprobablement parmi les N urnes disponibles. Les choix sont supposés indépendants.

On note T_n la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides à la fin du processus.

1. Écrire une fonction d'en-tête `remplir(n, N)` qui renvoie une liste de longueur N représentant le nombre de boules dans chacune des urnes à la fin du processus.
2. Écrire une fonction d'en-tête `Nb_Urnes_Vides(n, N)` qui renvoie le nombre d'urnes vides à la fin du processus (c'est en somme une simulation de T_n).

3. Écrire une fonction d'en-tête Moyenne(n , N , taille) qui effectue taille fois le processus et renvoie la moyenne des valeurs de T_n sur toutes ces expériences.
4. Pour $N=10$ et `taille = 1000`, en faisant n de 1 à 100, représenter graphiquement les points $(n, E(T_n))$.

Exercice 4 (Centrale 2).

Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} dx$

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Écrire une fonction Python qui calcule I_n . Conjecturer, à l'aide de l'ordinateur, la valeur de I_n .
3. Justifier l'existence de J .
4. Écrire une fonction Python qui calcule J .
5. À l'aide de l'ordinateur, conjecturer la convergence de la suite (J_n) puis prouver cette conjecture en utilisant I_n .
6. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{x^2} dx$ et calculer sa valeur.

Exercice 5 (Centrale 2).

On définit une suite de polynômes $(P_{i,j})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ en posant $P_{i,1} = 1$ et $P_{1,j} = 1$ puis

$$P_{i,j} = P_{i-1,j} + P_{i,j-1} + XP_{i-1,j-1} \text{ si } i \geq 2 \text{ et } j \geq 2.$$

1. Écrire une fonction polynome(i , j) qui renvoie le polynôme $P_{i,j}$.
2. Déterminer les $P_{k,7}$ pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.
3. Émettre une conjecture quant au degré de $P_{i,j}$ puis la démontrer.

Exercice 6 (Centrale 2).

1. Écrire une fonction legendre(n) qui prend en entrée un entier n et renvoie en sortie le polynôme de Legendre de rang n , défini par $P_n = \frac{1}{2^n \cdot n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.
2. Écrire une deuxième fonction ayant le même objectif, cette fois en se basant sur la construction par récurrence

$$P_0 = 1, P_1 = X, \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} XP_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1}.$$

Exercice 7 (Centrale 2).

On considère des suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + (u_n)^+(v_n)^2 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + (v_n)^+(u_n)^2.$$

1. Représenter sous forme de polygone les dix premiers termes de la suite (u_n, v_n) en effectuant les choix suivants pour le couple (u_0, v_0) :
 $(1/4, 1/5), (-1/4, 1/5), (1/4, -1/5), (1, 1/5), (1/4, 1)$.
2. Conjecturer la convergence/divergence de la suite $((u_n, v_n))$ selon la condition initiale.