

TD d'électronique n° 1

1^{re} année & systèmes linéaires — solution

~~~~~ Généralités ~~~~~

1 — Adaptation d'impédance

1. La tension aux bornes de R est $U = \frac{R}{R+r}E$. La puissance reçue par ce résistor est $P = \frac{U^2}{R}$, soit

$$P(R) = \frac{R}{(R+r)^2} E^2.$$

2. On a $P(0) = 0$ et $\lim_{R \rightarrow \infty} P(R) = 0$. On va rechercher le maximum en résolvant $P'(R) = 0$. On calcule

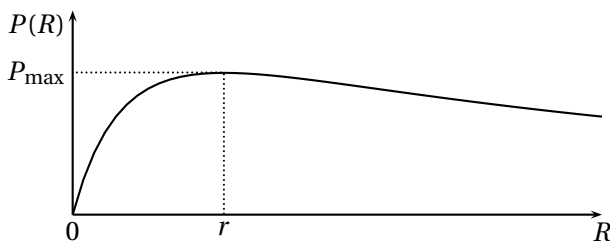
$$P'(R) = \left[\frac{1}{(R+r)^2} - \frac{2R}{(R+r)^3} \right] E^2 = \frac{r-R}{(R+r)^3} E^2.$$

On a donc $P'(R) = 0$ pour $R = r$.

La puissance dissipée dans la résistance est maximale

quand $R = r$, et vaut $P_{\max} = \frac{E^2}{4r}$.

► On dit alors que l'on a réalisé une adaptation d'impédance, et que la résistance R est adaptée au générateur.



Le générateur fournit alors (si $R = r$) la puissance

$$P_g = Ei = E \times \frac{E}{R+r} = \frac{E^2}{2r} = 2P_{\max}.$$

La moitié de la puissance fournie par le générateur est transmise à la résistance R , l'autre moitié est dissipée dans la résistance interne r du générateur.

2 — Mesurer une tension et une intensité simultanément

1. **Longue dérivation** : l'ampèremètre mesure l'intensité traversant R , tandis que le voltmètre mesure la tension totale aux bornes de R en série avec le voltmètre.

Courte dérivation : le voltmètre mesure la tension aux bornes de R , tandis que l'ampèremètre mesure le courant total traversant R et l'ampèremètre.

Le montage longue dérivation permet une mesure exacte du courant traversant R .

Le montage courte dérivation permet une mesure exacte de la tension aux bornes de R .

2. Le montage longue dérivation donne

$$U = (R_a + R)I.$$

La résistance mesurée est donc

$$R_{LD} = R + R_a.$$

L'erreur systématique est alors

$$\varepsilon_{LD} = \frac{R_a}{R}.$$

Pour $R = 100 \Omega$, on a $\varepsilon_{LD} = 0,1 = 10 \%$.

Pour $R = 100 \text{ k}\Omega$, on a $\varepsilon_{LD} = 0,1 \times 10^{-3} = 0,01 \%$.

La méthode longue dérivation semble plus adaptée à la mesure de « fortes » résistances.

3. Le montage courte dérivation donne

$$U' = \frac{RR_v}{R + R_v} I.$$

La résistance mesurée est donc

$$R_{CD} = \frac{RR_v}{R + R_v}.$$

On a

$$R - R_{CD} = \frac{R^2}{R + R_v}$$

et l'erreur systématique est

$$\varepsilon_{CD} = \frac{R}{R + R_v}.$$

Pour $R = 100 \Omega$, on a $\varepsilon_{CD} = 10^{-4} = 0,01 \%$.

Pour $R = 100 \text{ k}\Omega$, on a $\varepsilon_{CD} = 9,0 \times 10^{-2} = 9,0 \%$.

La méthode courte dérivation semble plus adaptée à la mesure de « faibles » résistances.

4. On souhaite $\varepsilon_{DL} < \varepsilon_{CD}$, soit

$$\frac{R_a}{R} < \frac{R}{R + R_v}.$$

On veut que R vérifie l'inégalité

$$R^2 - RR_a - R_a R_v > 0.$$

Posons

$$f(R) = R^2 - RR_a - R_a R_v.$$

Le discriminant de l'équation du second degré $f(R) = 0$ est

$$\Delta = R_a(R_a + 4R_v) \approx 4R_aR_v$$

comme $R_a \ll R_v$.

Les racines sont donc

$$R = \frac{R_a \pm 2\sqrt{R_aR_v}}{2}.$$

Avec $R_a < R_v$, la seule racine positive est

$$R_1 = \frac{R_a}{2} + \sqrt{R_aR_v} \approx \sqrt{R_aR_v}$$

comme $R_a \ll R_v$.

La condition $f(R) > 0$ est donc vérifiée pour $R > R_1$.

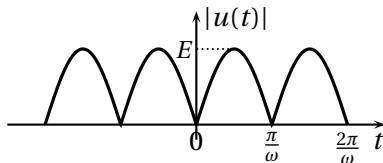
La méthode longue dérivation conduit à une erreur systématique moindre que celle de la méthode courte dérivation pour $R > \sqrt{R_aR_v}$, soit $R > 3,2 \text{ k}\Omega$.

3 — Valeur efficace

1. Résultat déjà montré pour la sinusoïde : $U_{\text{eff}} = \frac{E}{\sqrt{2}}$, soit $U_{\text{eff}} = 2,1 \text{ V}$.

Pour le signal créneau, on a $u^2(t) = E$, donc $U_{\text{eff}} = E = 3 \text{ V}$.

2. Soit $u(t) = E \sin(\omega t)$. Le signal redressé est



On calcule la moyenne sur une alternance :

$$\langle |u(t)| \rangle = \frac{\pi}{\omega} \int_0^{\omega/\pi} E \sin(\omega t) dt = \frac{\omega}{\pi} \left[-\frac{E \cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^{\pi/\omega}$$

$$\text{soit } \langle |u(t)| \rangle = \frac{2E}{\pi}.$$

On veut $U_{\text{eff}} = K \langle |u(t)| \rangle$, soit $\frac{E}{\sqrt{2}} = K \frac{2E}{\pi}$, d'où

$$K = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3. Dans le cas d'un signal créneau, on a $|u(t)| = E$. Le voltmètre non TRMS retourne alors la valeur

$$U_{\text{eff}} = K \langle |u| \rangle = KE = 1,1E.$$

La valeur efficace réelle étant E , on a une erreur d'environ 10 %, ce qui n'est pas négligeable.

4 — Résistance itérative

1. La résistance équivalente vue des bornes A et B est

$$R_{AB} = R_1 + \frac{(R + R_1)R_2}{R + R_1 + R_2}.$$

Par définition, on a $R_{AB} = R_0$ quand $R = R_0$, soit

$$R_0 = R_1 + \frac{(R_0 + R_1)R_2}{R_0 + R_1 + R_2}.$$

On a alors

$$R_0(R_0 + R_1 + R_2) = R_1(R_0 + R_1 + R_2) + (R_0 + R_1)R_2$$

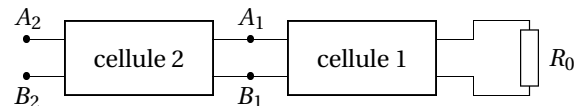
d'où après simplification

$$R_0^2 = R_1^2 + R_1R_2 + R_1R_2.$$

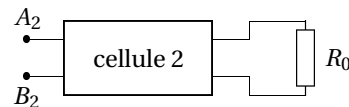
On a donc

$$R_0 = \sqrt{R_1(R_1 + 2R_2)}.$$

2. Raisonnons par récurrence :



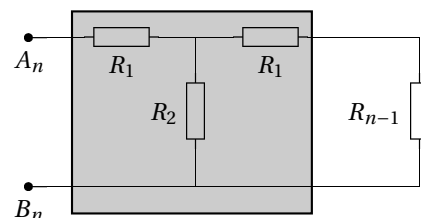
Vues des bornes A_1 et B_1 , la première cellule branchée sur R_0 est équivalente à R_0 ; le schéma se ramène donc à



En suivant le même raisonnement, la deuxième cellule branchée sur R_0 est équivalente à R_0 .

De proche en proche, on montre que l'ensemble des cellules en cascade, branché sur R_0 , est équivalent à la résistance R_0 .

3. Considérons la cellule n branchée sur la résistance R_{n-1} (équivalente aux autres cellules branchées sur R).



Vu des bornes A_n et B_n , on a

$$R_n = R_1 + \frac{(R_{n-1} + R_1)R_2}{R_{n-1} + R_1 + R_2}.$$

4. Si $n \gg 1$, on peut considérer qu'ajouter une cellule ne modifie pas le dispositif. On peut donc considérer que

$$R_{n-1} = R_n = R_\infty.$$

La relation précédente devient alors

$$R_{\infty} = R_1 + \frac{(R_{\infty} + R_1)R_2}{R_{\infty} + R_1 + R_2}$$

On retrouve l'équation de la question 1, qui admet R_0 pour solution.

La résistance vue de l'entrée d'une chaîne infini est donc

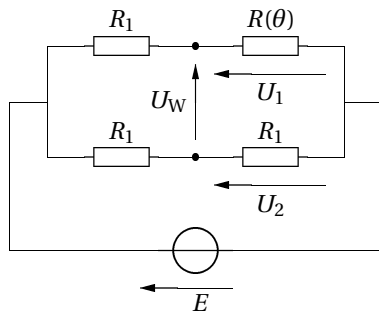
$$R_{\infty} = R_0 = \sqrt{R_1(R_1 + 2R_2)}.$$

5 — Conditionnement d'un signal

1. Pont diviseur de tension :

$$U_p(\theta) = \frac{R(\theta)}{R_1 + R(\theta)} E = \frac{R_0 [1 + \alpha(\theta - \theta_0)]}{R_1 + R_0 [1 + \alpha(\theta - \theta_0)]} E.$$

2. Pont de Wheatstone :



La tension E se retrouve aux bornes de R_1 et $R(\theta)$ en série; on a donc un pont diviseur de tension :

$$U_1 = \frac{R(\theta)}{R_1 + R(\theta)} E.$$

De même avec les deux autres résistances R_1 en série on a

$$U_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_1} E = \frac{E}{2}.$$

On en déduit

$$U_W = U_1 - U_2 = \left[\frac{R(\theta)}{R_1 + R(\theta)} - \frac{1}{2} \right] E$$

soit

$$U_W = \frac{R(\theta) - R_1}{2[R_1 + R(\theta)]} E.$$

On a $U_W(\theta_0) = 0$ pour $R_1 = R(\theta)$.

Exprimer la tension U_W . Pour quelle valeur de R_1 a-t-on $U_W(\theta_0) = 0$?

3. En indiquant les températures en degrés Celsius, on a

$$U_p(\theta) = \frac{1 + \alpha\theta}{2 + \alpha\theta} E = \frac{1}{2} \frac{1 + \alpha\theta}{1 + \frac{\alpha\theta}{2}} E \approx \frac{1}{2} (1 + \alpha\theta) (1 - \frac{1}{2} \alpha\theta) E,$$

soit au premier ordre

$$U_p(\theta) \approx \frac{1}{2} (1 - \frac{\alpha}{2} \theta) E.$$

Numériquement $U_p(\theta) = 5 \times (1 - 2 \times 10^{-3} \theta)$. On a $U_p(0^\circ \text{C}) = 5,00 \text{ V}$ et $U_p(1^\circ \text{C}) = 4,99 \text{ V}$.

On a $U_W(\theta) \approx \frac{\alpha}{2} \theta E = 0,02 \theta$. On a $U_W(0^\circ \text{C}) = 0,0 \text{ V}$ et $U_W(1^\circ \text{C}) = 0,02 \text{ V}$.

Avec le montage potentiométrique, on doit mesurer une variation de tension de moins de 1 %, tandis que la tension mesurée avec le pont de Wheatstone est directement proportionnelle à la température qui peut être déterminée plus précisément.

Si E varie faiblement, on a $U_p'(0^\circ \text{C}) = \frac{1}{2} (E + \delta E) = 5,05 \text{ V}$, et $U_W'(0^\circ \text{C}) = 0$. On ne peut faire la différence entre une fluctuation de la source et une faible variation de température avec le montage potentiométrique, ce qui n'est pas le cas du pont de Wheatstone.

6 — Gradateur

1. Valeur moyenne :

$$V_{\text{moy}} = \langle v(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt.$$

Valeur efficace :

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\langle v^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}.$$

Signal sinusoïdal

On prend $v(t) = A \sin(2\pi f t)$.

Valeur moyenne :

$$V_{\text{moy}} = \frac{A}{T} \int_0^T \sin(2\pi f t) dt = -\frac{R}{2\pi f T} \cos(2\pi f t) \Big|_0^T,$$

soit $V_{\text{moy}} = 0$.

Valeur efficace :

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^2 &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \sin^2(2\pi f t) dt \\ &= \frac{A^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos(2 \times 2\pi f t)] dt = \frac{A^2}{2}, \end{aligned}$$

d'où

$$V_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \approx 0,707 A.$$

Signal sinusoïdal redressé

Valeur moyenne :

$$\begin{aligned} V_{\text{moy}} &= \frac{A}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) dt = -\frac{A}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \Big|_0^T \\ &= -\frac{A}{\pi} [\cos \pi - 1] = \frac{2A}{\pi}. \end{aligned}$$

On a

$$V_{\text{moy}} = \frac{2}{\pi} A \approx 0,637 A.$$

La valeur efficace est inchangée par rapport au signal sinusoïdal, car une sinusoïde et sa valeur absolue ont le même carré.

2. On a

$$V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \left[\int_{\alpha/\omega}^{\pi/\omega} A^2 \sin^2(\omega t) dt + \int_{(\pi+\alpha)/\omega}^{2\pi/\omega} A^2 \sin^2(\omega t) dt \right].$$

Les deux alternances étant opposées, l'aire sous leur carré est identique; on peut donc se ramener à

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \left[\int_{\alpha/\omega}^{\pi/\omega} 2A^2 \sin^2(\omega t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \int_{\alpha/\omega}^{\pi/\omega} \frac{A^2}{2} [1 - \cos(2\omega t)] dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{A^2}{2} \frac{\pi - \alpha}{\omega} - \frac{1^2}{2} \frac{1}{2\omega} (\sin 2\pi - \sin 2\alpha) \right] \\ &= \frac{A^2}{\omega T} \left[\pi - \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right] = \frac{A^2}{2} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi} \right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$V_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}.$$

3. La puissance moyenne dissipée dans la résistance

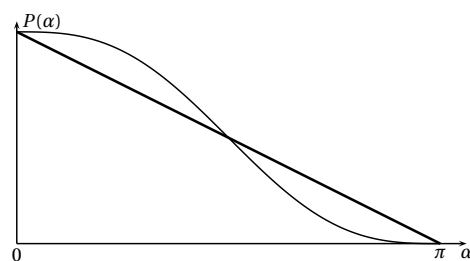
$$\text{est } P = \frac{\langle v^2 \rangle}{R} = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} \text{ soit}$$

$$P(\alpha) = \frac{A^2}{2R} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi} \right) = P_{\text{max}} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi} \right).$$

Le terme $\sin(2\alpha)/(2\pi)$ s'annule pour $\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = \pi$, et vaut au maximum 0,16. On peut donc approximer

$$P(\alpha) \approx P_{\text{max}} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right).$$

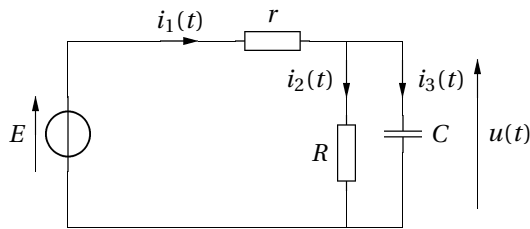
Ci-après la comparaison entre la loi affine approchée et la loi $P(\alpha)$.



~~~~~ Régimes transitoires ~~~~~

7 — Circuit du 1^{er} ordre

Circuit à $t \geq 0$:



1. Le condensateur impose la continuité de la tension à ses bornes. On discute d'abord de cette grandeur, puis on en déduit les autres de proche en proche en raisonnant sur le circuit.

- Le condensateur étant initialement déchargé, on a $u(0^-) = 0$. La continuité $u(0^+) = u(0^-)$ de cette tension permet de conclure que $u(0^+) = 0$.
- La loi d'Ohm aux bornes de la résistance R s'écrit $u(t) = Ri_2(t)$; en particulier $u(0^+) = Ri_2(0^+) = 0$ d'où $i_2(0^+) = 0$.
- La loi des nœuds $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$ écrite en $t = 0^+$ donne $i_1(0^+) = i_3(0^+)$. Il reste à écrire la loi des mailles sur le circuit : $E = ri_1(t) + u(t)$, soit $E = ri_1(0^+) + 0$, d'où $i_1(0^+) = i_3(0^+) = \frac{E}{r}$.

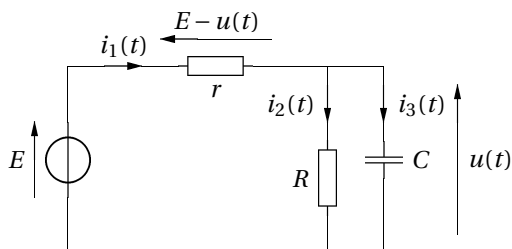
2. En régime continu établi, le courant est nul dans le condensateur : $i_3(\infty) = 0$.

La loi des nœuds donne alors $i_1(\infty) = i_2(\infty)$. De la loi des mailles $E = ri_1(t) + Ri_2(t)$ on déduit aux temps

$$\text{longs } i_1(\infty) = i_2(\infty) = \frac{E}{r+R}.$$

On a $u(t) = Ri_2(t)$, d'où ¹ $u(\infty) = \frac{R}{r+R}E$.

3. Circuit à $t > 0$:



Relions chaque intensité à la tension $u(t)$.

On a :

$$i_1(t) = \frac{E - u(t)}{r}; \quad i_2(t) = \frac{u(t)}{R} \quad \text{et} \quad i_3(t) = C \frac{du(t)}{dt}.$$

La loi des nœuds $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$ s'écrit

$$\frac{E - u(t)}{r} = \frac{u(t)}{R} + C \frac{du(t)}{dt},$$

1. On peut écrire directement ce résultat en remarquant qu'en régime continu établi le condensateur se comporte comme interrupteur ouvert; le circuit se ramène alors à un simple pont diviseur de tension, d'où le résultat.

d'où

$$C \frac{du(t)}{dt} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) u(t) = \frac{E}{r}.$$

En mettant l'équation sous forme canonique, on obtient

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{E}{rC} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{rRC}{r+R}.$$

- Prenons la bonne habitude de vérifier que τ a bien la dimension d'un temps : RC est homogène à un temps, et le facteur $\frac{r}{r+R}$ est sans dimension. Le résultat est dimensionnellement correct.

La solution générale de l'équation homogène (c'est-à-dire sans second membre) est

$$u_h(t) = Ae^{-t/\tau}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation complète de la même forme que le second membre; ici ce dernier est constant, on cherche donc une solution u_p constante. Dans ce cas $\frac{du_p}{dt} = 0$ et l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{r+R}{rRC} u_p = \frac{E}{rC},$$

d'où

$$u_p = \frac{R}{r+R}E.$$

- On remarque que $u_p = u(\infty)$ ce qui est attendu : la solution de l'équation homogène décrit la partie transitoire du régime, et sa propriété générale est $\lim_{t \rightarrow \infty} u_h(t) = 0$; la solution particulière représente le régime établi, d'où le résultat.

La solution générale de l'équation complète est donc $u(t) = u_h + u_p$, soit

$$u(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{R}{r+R}E.$$

On a établi par continuité $u(0^+) = 0 = A + \frac{R}{r+R}E$. Finalement

$$u(t) = \frac{R}{r+R}E(1 - e^{-t/\tau}).$$

Dans le cas où $R \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire est remplacée par un interrupteur ouvert), le circuit se ramène au classique circuit rC , de constante de temps $\tau = rC$. On vérifie que l'on a bien

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{rRC}{r+R} = rC.$$

De plus comme $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{r+R} = 1$, on retrouve bien le résultat classique $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$.

8 — Réponse indicielle

1. cas n° 1

Loi des mailles :

$$e(t) = s(t) + \frac{q(t)}{C} \quad \text{avec} \quad s(t) = Ri(t) = R \frac{dq}{dt},$$

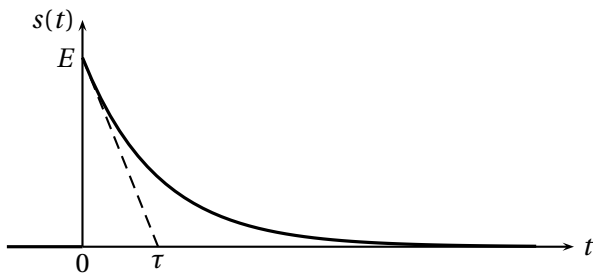
d'où

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau} s(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

Solution générale $s(t) = Ae^{-t/\tau}$ pour $t \geq 0$.

On a $s(0^+) = E$ car $u_C(0^+) =$,

$$s(t) = E e^{-t/\tau}.$$



cas n° 2

Loi des mailles

$$e(t) = s(t) + Ri(t) \quad \text{avec} \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{ds}{dt}$$

d'où pour $t \geq 0$

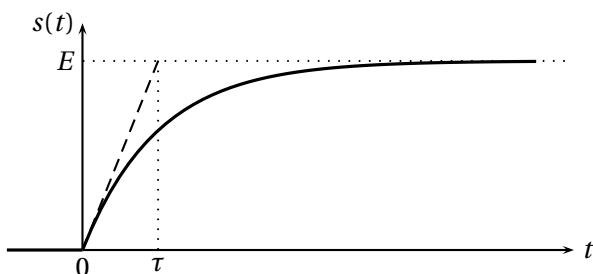
$$s(t) + RC \frac{ds}{dt} = E.$$

Solution générale

$$s(t) = E + Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad s(0^+) = 0$$

soit

$$s(t) = E(1 - e^{-t/\tau}).$$



2.a) Loi des mailles

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + e(t)$$

avec

$$s(t) = \frac{q(t)}{C} \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{dq}{dt},$$

d'où

$$e(t) = RC \frac{ds}{dt} + LC \frac{d^2s}{dt^2} + s(t).$$

En régime harmonique, en notation complexe, la structure en pont diviseur de tension conduit à

$$\underline{s} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e} = \frac{1}{1 + RCj\omega + LC(j\omega)^2} \underline{e}.$$

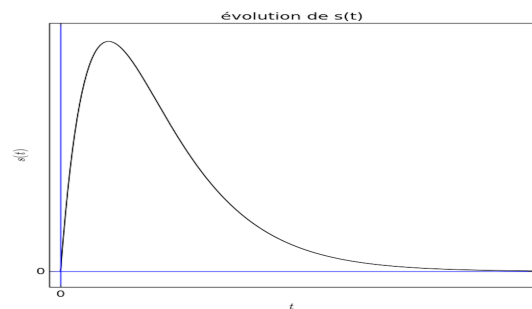
On en déduit

$$e(t) = s(t) + RC \frac{ds}{dt} + LC \frac{d^2s}{dt^2}.$$

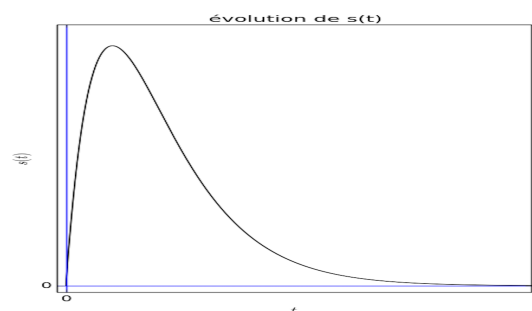
2.b) Les coefficients sont tous du même signe : le système est stable.

2.c) Évolution de $s(t)$ pour les trois régimes.

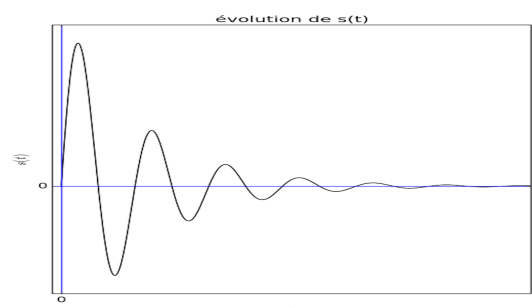
Régime apériodique :



Régime critique :

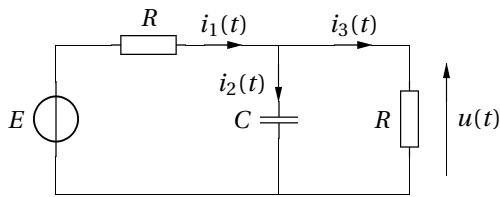


Régime pseudo-périodique :



9 — Circuit RC à deux mailles

Circuit à $t \geq 0$:



La loi des nœuds s'écrit

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t). \quad (1)$$

La loi des mailles s'écrit

$$E = u(t) + Ri_1(t).$$

On a

$$i_2(t) = C \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad i_3(t) = \frac{u(t)}{R}$$

d'où

$$\frac{E - u(t)}{R} = C \frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{R},$$

soit

$$u(t) + \tau \frac{du}{dt} = \frac{E}{2} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC}{2}.$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$u_h(t) = Ae^{-t/\tau}.$$

Une solution particulière de l'équation complète est $u_p = \frac{E}{2}$; la solution générale de l'équation complète est donc

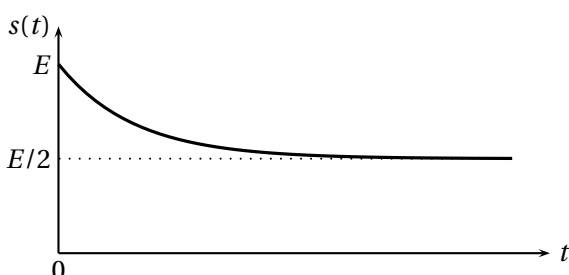
$$u(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{2}.$$

Pour $t \geq 0$, la tension $u(t)$ se retrouve aux bornes du condensateur. Cette dernière est continue et vaut E pour $t < 0$. On a donc

$$u(0^+) = E = A + \frac{E}{2}$$

d'où $A = E/2$ et

$$u(t) = \frac{E}{2} (1 + e^{-t/\tau}).$$



10 — Étude énergétique de la charge d'un condensateur

1. On a

$$E = Ri(t) + u(t) \quad \text{avec} \quad i(t) = C \frac{du}{dt}$$

d'où

$$\tau \frac{du}{dt} + u(t) = E \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

La solution est ici

$$u(t) = E(1 - e^{-t/\tau}).$$

L'énergie emmagasinée dans le condensateur à l'instant t est

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t)$$

soit

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2} CE^2 (1 - e^{-t/\tau})^2.$$

En régime établi, elle vaut

$$\mathcal{E}_{C,\infty} = \frac{1}{2} CE^2.$$

2. La puissance fournie par le générateur à l'instant t vaut

$$p_g(t) = Ei(t)$$

avec

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = C \frac{E}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau},$$

soit

$$p_g(t) = \frac{E^2}{R} e^{-t/\tau}.$$

L'énergie fournie jusqu'à l'instant t vaut alors

$$\mathcal{E}_g(t) = \int_0^t p(t') dt' = \frac{E^2}{R} \int_0^t e^{-t'/\tau} dt' = -\tau \frac{E^2}{R} [e^{-t'/\tau}]_0^t$$

soit

$$\mathcal{E}_g(t) = CE^2 (1 - e^{-t/\tau}).$$

➤ On peut se passer de l'intégrale en remarquant que

$$p_g(t) = EC \frac{du}{dt}$$

d'où

$$\mathcal{E}_g(t) = \int_0^{u(t)} CE du = CEu(t)$$

et on retrouve le résultat précédent.

En régime établi, on a

$$\mathcal{E}_{g,\infty} = CE^2.$$

Cette valeur est indépendante de R .

3. Le rendement énergétique de la charge du condensateur peut être défini comme le rapport de l'énergie emmagasinée dans le condensateur (énergie « utile ») sur l'énergie fournie par le générateur (énergie « dépensée »), soit

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{g,\infty}}{\mathcal{E}_{C,\infty}}.$$

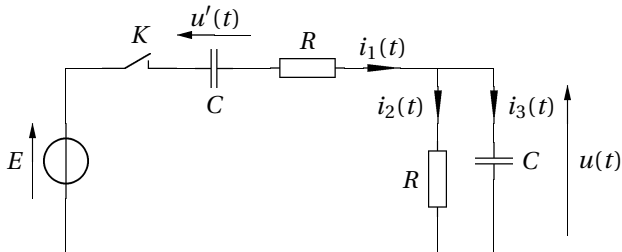
On obtient $\eta = \frac{1}{2} = 50\%$.

L'énergie « perdue » est dissipée par effet Joule dans le condensateur (on pourrait le vérifier explicitement en intégrant temporellement $Ri^2(t)$ de $t = 0$ à $t = \infty$).

Il est remarquable que la moitié de l'énergie fournie par le générateur soit dissipée dans la résistance, quelle que soit la valeur de R .

11 — Pont de Wien

Les condensateurs étant déchargés et les intensités nulles, on ferme l'interrupteur K à $t = 0$.



1. Les tensions aux bornes des condensateurs sont continues. On a donc $u(0^+) = 0$ et $u'(0^+) = 0$.

La loi des mailles s'écrit $E = u(t) + Ri_1(t) + u'(t)$, d'où

$$E = 0 + Ri_1(0^+) + 0.$$

On a donc $i_1(0^+) = \frac{E}{R}$.

De $u(t) = Ri_2(t)$ on déduit $i_2(0^+) = 0$.

Enfin la loi des nœuds $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$ donne

$$i_3(0^+) = \frac{E}{R}.$$

2. En régime continu établi, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts. On a donc

$$i_1(\infty) = 0, \quad i_3(\infty) = 0 \quad \text{et} \quad i_2(\infty) = 0.$$

De $u(t) = Ri_2(t)$ on déduit $u(\infty) = 0$.

La loi des mailles $E = u(t) + Ri_1(t) + u'(t)$ donne $u'(\infty) = E$.

3. Les intensités vérifient

$$i_3(t) = C \frac{du}{dt}; \quad i_2(t) = \frac{u(t)}{R} \quad \text{et} \quad i_1(t) = C \frac{du'(t)}{dt},$$

avec $E = u(t) + Ri_1(t) + u'(t)$ d'après la loi des mailles. Comme $u'(t)$ est relié aux autres grandeurs par sa dérivée, dérivons cette loi des mailles :

$$0 = \frac{du(t)}{dt} + R \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{du'(t)}{dt}$$

On a

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = \frac{u(t)}{R} + C \frac{du}{dt}$$

d'où

$$\frac{du'(t)}{dt} = \frac{u(t)}{RC} + \frac{du(t)}{dt}$$

et

$$0 = \frac{du(t)}{dt} + \frac{du(t)}{dt} + RC \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{u(t)}{RC} + \frac{du(t)}{dt}.$$

On a donc

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{(RC)^2} = 0.$$

Ce circuit est donc du **second ordre**.

4. Nous pouvons écrire l'équation sous forme canonique

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{RC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{3}.$$

Le discriminant de l'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{3}{RC}r + \frac{1}{(RC)^2} = 0$$

vaut

$$\Delta = \frac{9}{(RC)^2} - \frac{4}{(RC)^2} = \frac{5}{(RC)^2}.$$

On a $\Delta > 0$: le régime est **apériodique amorti**.

► Si on se souvient du cours, on sait que le régime est apériodique amorti pour $Q < 1/2$, ce qui est le cas ici.

La nature du régime ne dépend pas de R et C : le facteur de qualité vaut $Q = 1/3$ quelles que soient les valeurs des composants.

5. Les racines de l'équations caractéristiques sont

$$r = -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2RC}$$

soient

$$r_1 = -\frac{3 - \sqrt{5}}{2RC} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{3 + \sqrt{5}}{2RC}.$$

La solution générale de l'équation différentielle est

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

Une première condition initiale est $u(0) = 0$, d'où

$$A + B = 0.$$

On a de plus

$$i_3(0) = C \frac{du}{dt}(t=0) = \frac{E}{R}$$

d'où

$$\frac{du}{dt}(0) = Ar_1 + Br_2 = \frac{E}{RC}.$$

On a donc

$$A(r_1 - r_2) = \frac{E}{RC}$$

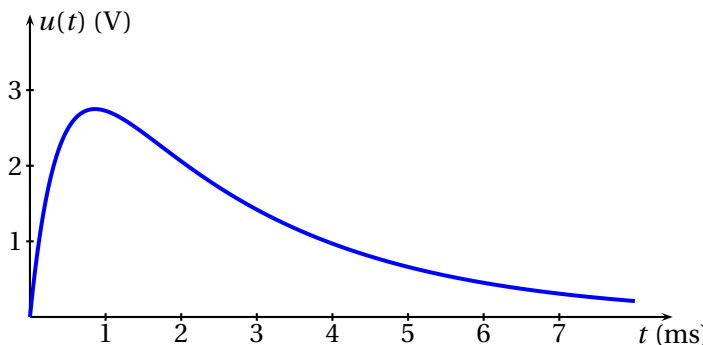
d'où

$$A = \frac{E}{\sqrt{5}} = -B$$

et

$$u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} \left[\exp\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2RC}t\right) - \exp\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2RC}t\right) \right].$$

Avec les valeurs données, on a $RC = 1$ ms.



► Les amateurs de mise en forme mathématique élégante pourront s'amuser à simplifier l'écriture de $u(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{E}{\sqrt{5}} \left[e^{\left(-\frac{3}{2RC} + \frac{\sqrt{5}}{2RC}\right)t} - e^{\left(-\frac{3}{2RC} - \frac{\sqrt{5}}{2RC}\right)t} \right] \\ &= \frac{E}{\sqrt{5}} e^{-\frac{3}{2RC}t} \left[e^{\frac{\sqrt{5}}{2RC}t} - e^{-\frac{\sqrt{5}}{2RC}t} \right] \end{aligned}$$

Soit

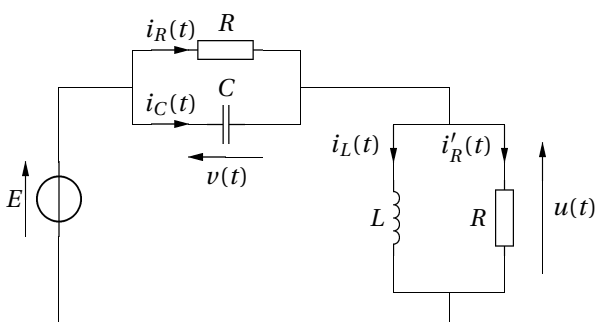
$$u(t) = \frac{2E}{\sqrt{5}} e^{-\frac{3}{2RC}t} \sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right),$$

en faisant apparaître la fonction sinus hyperbolique :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

12 — Réponse d'un circuit

Représentons le circuit après fermeture de l'interrupteur.



1. La tension $v(t)$ aux bornes du condensateur est continue, donc $v(0) = 0$.

On a $E = u(0) + v(0)$, d'où $u(0) = E$.

De $v(0) = 0$ on déduit $i_R(0) = \frac{v(0)}{R} = 0$.

De $u(0) = E$ on déduit $i'_R(0) = \frac{E}{R}$.

Par continuité du courant dans la bobine, $i_L(0) = 0$.

La loi des nœuds $i_R(0) + i_C(0) = i_L(0) + i'_R(0)$ conduit donc à $i_C(0) = E/R$. Comme $i_C = C \frac{dv}{dt}$, on obtient

$$\frac{dv}{dt}(t=0) = \frac{E}{RC}.$$

On a $E = u(t) + v(t)$, d'où en dérivant $\frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} = 0$; on

en déduit $\frac{du}{dt}(t=0) = -\frac{E}{RC}$.

2. Pour les 4 dipôles du circuit, on peut écrire

$$v(t) = Ri_R(t); \quad i_C(t) = C \frac{dv}{dt};$$

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}; \quad u(t) = Ri'_R(t).$$

On a de plus $E = u(t) + v(t)$, soit $\frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} = 0$.

On dérive loi des nœuds $i_R(t) + i_C(t) = i_L(t) + i'_R(t)$ pour l'écrire avec les tensions :

$$\frac{di_R(t)}{dt} + \frac{di_C(t)}{dt} = \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{di'_R(t)}{dt},$$

soit

$$\frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + C \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{u(t)}{L} + \frac{1}{R} \frac{du(t)}{dt}.$$

On obtient

$$-\frac{1}{R} \frac{du}{dt} - C \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{u(t)}{L} + \frac{1}{R} \frac{du(t)}{dt},$$

d'où l'équation différentielle

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{2}{RC} \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u(t) = 0.$$

De même comme $v(t) = E - u(t)$, on a

$$-\frac{d^2v(t)}{dt^2} - \frac{2}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{E - v(t)}{LC} = 0,$$

d'où

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{2}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{E}{LC}.$$

On peut écrire ces équations sous la forme canonique

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0$$

et

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dv(t)}{dt} + \omega_0^2 v(t) = \frac{E}{LC}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$.

3. Si $Q \gg 1$, on est dans le cas d'un régime pseudo-périodique faiblement amorti. Le discriminant de l'équation réduite est

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 \approx -4\omega_0^2$$

et les solutions de l'équation caractéristique s'écrivent

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0.$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$v_h(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)].$$

Avec la solution particulière $v_p(t) = E$, on obtient

$$v(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)] + E.$$

On a $v(0) = A + E = 0$, d'où $A = -E$:

$$v(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [-E \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)] + E.$$

On calcule

$$\frac{dv}{dt} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[-\frac{\omega_0}{2Q} (-E \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)) + \omega_0 E \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right]$$

On a donc

$$\frac{dv}{dt}(t=0) = \frac{E\omega_0}{2Q} + B\omega_0 = \frac{E}{RC}$$

soit

$$B = \frac{E}{\omega_0 RC} - \frac{E}{2Q}.$$

Or on a

$$\frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2Q},$$

d'où $B = 0$. On a donc

$$v(t) = E \left[1 - e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega_0 t) \right].$$

4. Le maximum de $v(t)$ est atteint pour

$$\frac{dv}{dt} = 0 = E e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left[\frac{\omega_0}{2Q} \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t) \right]$$

soit pour

$$\sin(\omega_0 t_{\max}) = -\frac{1}{2Q} \cos(\omega_0 t_{\max})$$

d'où

$$\tan(\omega_0 t_{\max}) = -\frac{1}{2Q}.$$

Comme $Q \gg 1$, on a $\tan(\omega_0 t_{\max}) \approx 0$ avec $\tan(\omega_0 t_{\max}) < 0$, d'où

$$\omega_0 t_{\max} \approx \pi.$$

On a alors

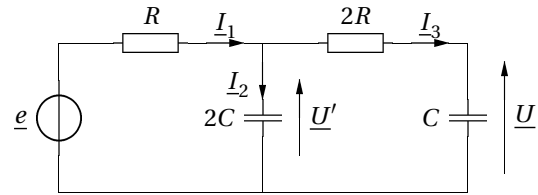
$$v_{\max} = v(t_{\max}) = E \left[1 - e^{-\frac{\pi}{2Q}} \cos(\pi) \right] = E \left[1 + e^{-\frac{\pi}{2Q}} \right].$$

Comme $\frac{\pi}{2Q} \ll 1$, on a $e^{-\frac{\pi}{2Q}} \approx 1$, d'où

$$v_{\max} \approx 2E.$$

13 — Équation différentielle d'un système

On introduit les courants et la tension intermédiaire $u'(t)$:



La loi des nœuds s'écrit

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

soit

$$\frac{e - u'}{R} = jC\omega u + 2jC\omega u'.$$

Posons $\tau = RC$:

$$e - u' = j\tau\omega u + 2j\tau\omega u'.$$

La formule du pont diviseur de tension donne

$$u = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{2R + \frac{1}{jC\omega}} u' = \frac{1}{1 + j2RC\omega} u'$$

soit

$$u' = (1 + j2\tau\omega) u.$$

On a donc

$$e - (1 + j2\tau\omega) u = jC\omega u + 2j\tau\omega(1 + j2\tau\omega) u$$

soit

$$e = u + j5\tau\omega u + (j\omega)4\tau^2 u.$$

L'équation différentielle correspondante est donc

$$4\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5\tau \frac{du}{dt} + u(t) = e(t).$$

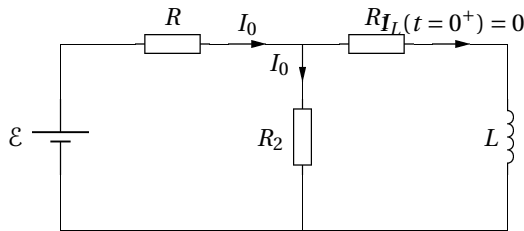
L'équation caractéristique associée est

$$4\tau^2 x^2 + 5\tau x + 1 = 0.$$

Son discriminant vaut $\Delta = 25\tau^2 - 16\tau^2 = 9\tau^2 > 0$. Le régime est donc **apériodique**.

14 — Inductance

1. L'intensité traversant l'inductance étant continue, elle est nulle juste après la fermeture de l'interrupteur. On a donc

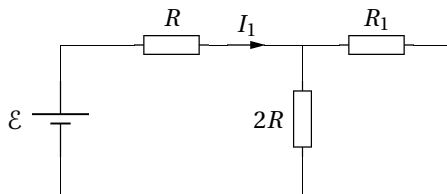


On a donc

$$\mathcal{E} = (R + R_2)I_0 = 3RI_0 = 3 \times 2,5 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-3}$$

soit $\mathcal{E} = 37,5 \text{ V}$.

À l'équilibre, c'est-à-dire en régime continu établi, la bobine est équivalente à un fil. On a donc, avec $R_2 = 2R$:



On en déduit

$$\mathcal{E} = \left(R + \frac{2RR_1}{2R + R_1} \right) I_1,$$

soit

$$2R\mathcal{E} + R_1\mathcal{E} = 2R^2 I_1 + 3RR_1 I_1,$$

d'où

$$R_1 = 2R \frac{\mathcal{E} - RI_1}{3RI_1 - \mathcal{E}}.$$

On calcule $R_1 = 2,5 \text{ k}\Omega$.

2. L'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine en régime établi est

$$E_L = \frac{1}{2} LI_1^2.$$

Quand on ouvre l'interrupteur, le circuit se ramène à une maille constituée de la bobine et des résistances R_1 et 2 en série.

L'énergie se dissipe dans les deux résistances. Comme $R_2 = 2R_1$, la puissance dissipée dans R_2 est deux fois plus grande que celle dissipée dans R_1 , les intensités étant les mêmes. On a donc

$$E_L = E_{R_1} + E_{R_2} = E + 2E = 3E,$$

d'où

$$L = \frac{6E}{I_1^2}.$$

On calcule $L = 3,0 \text{ mH}$.

3. Le courant traversant la bobine étant continu, il vaut I_1 à la réouverture de l'interrupteur, et traverse alors les résistances R_1 et R_2 .

La tension aux bornes de la bobine vaut alors

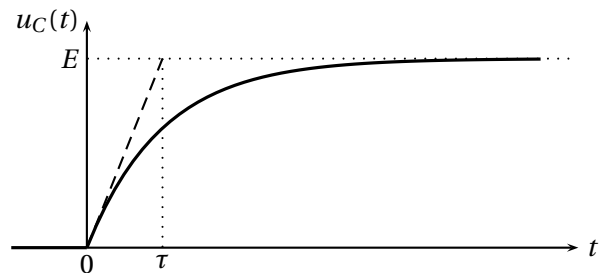
$$u_L = (R_1 + R_2)I_1 = 67,5 \text{ V}.$$

Elle est donc plus grande que la f.é.m. du générateur.

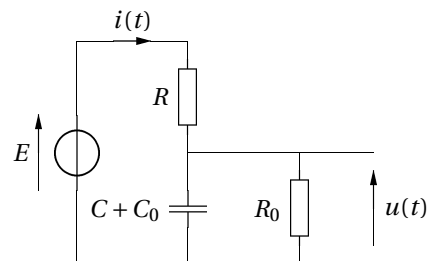
15 — Perturbation d'une mesure

1. Le calcul est très classique (cf. exercice 9) :

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$



2. L'association en parallèle des deux condensateurs est équivalente à un condensateur de capacité $C + C_0$. Le circuit se ramène alors à



On a

$$E = Ri(t) + u(t)$$

avec

$$i(t) = (C + C_0) \frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{R_0}$$

d'où

$$E = \left(1 + \frac{R}{R_0} \right) u(t) + R(C + C_0) \frac{du}{dt} = E.$$

La nouvelle équation différentielle est

$$\tau' \frac{du}{dt} + u(t) = \frac{R_0}{R_0 + R} E \quad \text{avec} \quad \tau' = \frac{RR_0(C + C_0)}{R + R_0}.$$

La nouvelle valeur maximale de la tension $u(t)$ est

$$U_{\max} = \frac{R_0}{R_0 + R} E.$$

3.a) L'erreur relative sur la tension maximale $\Delta r_u = \left| \frac{U_{\max} - U_{c,\max}}{U_{c,\max}} \right|$ vaut

$$\Delta r_u = \frac{R}{R_0 + R}.$$

3.b) On veut

$$\frac{R}{R_0 + R} < 0,01$$

soit $R < \frac{0,01}{0,99} R_0$ qui donne

$$R < 10 \text{ k}\Omega.$$

► Idéalement, un oscilloscope qui ne perturbe pas du tout les mesures aurait une résistance d'entrée infinie.

16 — Charge et décharge d'un super-condensateur

1. On a $I = C \frac{du_c}{dt}$, d'où $u_c(t) = \frac{I}{C} t$.

On a $u_c(t_1) = U_{c,1}$ pour $t_1 = C \frac{U_{c,1}}{I}$, soit $t_1 = 36 \text{ s}$.

2. On observe la décharge du condensateur, régie par

$$u_c(t) + \tau \frac{du_c(t)}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC.$$

Avec $u_c(t_1) = U_{c,1}$, on obtient

$$u_c(t) = U_{c,1} (1 - e^{-(t-t_1)/\tau}).$$

La LED s'éteint à l'instant t_2 tel que $u_c(t_2) = 1,5 \text{ V}$, soit

$$2(1 - e^{-(t_2-t_1)/\tau}) = 1,5$$

d'où

$$e^{-(t_2-t_1)/\tau} = 0,25.$$

On calcule

$$t_2 = t_1 - RC \ln(0,25) = 5,0 \times 10^3 \text{ s}.$$

soit près de 14 heures.

La charge, très rapide, permet d'alimenter la LED pendant une longue durée.

La variation d'énergie du condensateur pendant sa décharge est

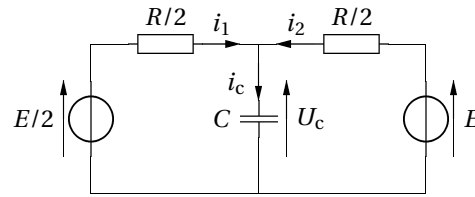
$$\Delta \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} C (1,5)^2 - \frac{1}{2} C 2^2 = -0,875 C = -1575 \text{ J}.$$

Cette énergie est fournie à la résistance; la puissance dissipée en moyenne sur la durée $t_2 - t_1$ vaut donc

$$P = \frac{1575}{t_2 - t_1} = 31,6 \text{ mW}.$$

17 — Régime transitoire

1. Représentons le circuit après fermeture de l'interrupteur :



On a

$$\frac{E}{2} - U_c = \frac{R}{2} i_1$$

d'où

$$i_1 = \frac{E - 2U_c}{R}$$

et

$$E - U_c = \frac{R}{2} i_2$$

d'où

$$i_2 = \frac{2(E - U_c)}{R}.$$

La loi des nœuds s'écrit

$$i_1 + i_2 = i_c = C \frac{dU_c}{dt}$$

soit

$$\frac{E - 2U_c}{R} + \frac{2(E - U_c)}{R} = C \frac{dU_c}{dt}$$

soit

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{4}{RC} U_c = \frac{3}{RC} E.$$

La constante de temps de ce circuit est donc

$$\tau_c = \frac{RC}{4}.$$

2. En $t = 0^-$, l'interrupteur est fermé depuis longtemps. On est donc en régime continu établi, et

$$U_c(0^-) = E.$$

La solution générale de l'équation différentielle est

$$U_c = A e^{-t/\tau_c} + \frac{3E}{4}.$$

La continuité de U_c en $t = 0$ s'écrit

$$A + \frac{3E}{4} = E$$

d'où $A = E/4$ et

$$U_c(t) = \frac{3E}{4} \left(1 - \frac{1}{3} e^{-t/\tau_c} \right).$$

3. La valeur finale de la tension est

$$U_c(\infty) = \frac{3E}{4}.$$

On a donc $U_c(\tau) = 0,99U_c(\infty)$ pour

$$1 - \frac{1}{3}e^{-\tau/\tau_c} = 0,99$$

soit

$$e^{-\tau/\tau_c} = 0,03.$$

On en déduit

$$\tau = -\frac{RC}{4} \ln 0,03 \approx 0,88RC.$$

4. L'énergie initialement emmagasinée dans le condensateur est

$$\mathcal{E}_i = \frac{CE^2}{2}.$$

Au bout de la durée τ , l'énergie emmagasinée vaut

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}C \left(\frac{0,99 \times 3E}{4} \right)^2 = \frac{1}{2}C(0,7425)^2 E^2.$$

L'énergie perdue vaut alors

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f$$

soit $\Delta \mathcal{E} \approx 0,2372CE^2.$

18 — Décrément logarithmique

1. La tension aux bornes du condensateur étant continue, on a $u_C(0) = 0$.

L'intensité dans la bobine étant continue, on a $i(0) = 0$, d'où $u_R(0) = Ri(0) = 0$.

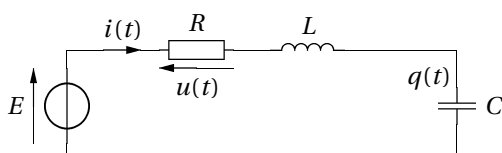
La loi des mailles $E = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$ conduit en $t = 0$ à $u_L(0) = 0$.

La tension $u(t)$ étant nulle en $t = 0$, il peut s'agir de la tension aux bornes du condensateur ou de la résistance, mais pas celle aux bornes de la bobine.

En régime établi ($t \rightarrow \infty$), le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, d'où $i = 0$, et la bobine à un fil d'où $u_L(\infty) = 0$. On a alors $u_R(\infty) = 0$ et $u_C(\infty) = E$.

La tension $u(t)$ est donc la tension aux bornes de la résistance.

2. Schéma :



Loi des mailles :

$$E = u(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{q(t)}{C}.$$

On a $i = \frac{dq}{dt} = \frac{u}{R}$. Dérivons la loi des mailles :

$$0 = \frac{du}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt},$$

d'où

$$0 = \frac{du}{dt} + \frac{L}{R} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{u(t)}{RC},$$

soit

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u(t) = 0.$$

Forme canonique :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0$$

avec

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

3. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

Le régime est pseudo-périodique si cette équation admet deux racines complexes conjuguées, soit si

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0,$$

c'est-à-dire pour

$$Q > \frac{1}{2}.$$

L'équation caractéristique admet alors les deux racines

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

La solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire

$$u(t) = A \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \cos(\Omega t - \varphi)$$

où A et φ sont deux constantes déterminées par les conditions initiales.

► La grandeur Ω est appelée pseudo-pulsation. Elle diffère de la pulsation propre ω_0 , mais en est très proche si le facteur de qualité est élevé ($Q \gg 1$).

4. La pseudo-période des oscillations est

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

On a

$$\begin{aligned} u(t+T) &= A \exp\left(-\frac{\omega_0(t+T)}{2Q}\right) \cos[\Omega(t+T) + \varphi] \\ &= A \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \exp\left(-\frac{\omega_0 T}{2Q}\right) \cos[\Omega t + \varphi] \\ &= u(t) \exp\left(-\frac{\omega_0 T}{2Q}\right). \end{aligned}$$

compte tenu de la période T du terme sinusoïdal.

On a donc

$$\frac{u(t)}{u(t+T)} = \exp\left(\frac{\omega_0 T}{2Q}\right)$$

d'où

$$\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{\omega_0 \pi}{Q\Omega} = \frac{\omega_0 \pi}{Q\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

On a donc

$$\delta = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - 1/4}}.$$

5. On peut écrire

$$\begin{aligned} u(t+nT) &= A \exp\left(-\frac{\omega_0(t+nT)}{2Q}\right) \cos[\Omega(t+nT) + \varphi] \\ &= A \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \exp\left(-\frac{\omega_0 nT}{2Q}\right) \cos[\Omega t + \varphi] \\ &= u(t) \exp\left(-\frac{\omega_0 nT}{2Q}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{u(t)}{u(t+nT)} &= \exp\left(\frac{\omega_0 nT}{2Q}\right) = \left(\exp\left(\frac{\omega_0 T}{2Q}\right)\right)^n \\ &= \left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right)^n. \end{aligned}$$

On a donc

$$\ln\left(\frac{u(t)}{u(t+nT)}\right) = n \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right) = n\delta,$$

d'où

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+nT)}\right).$$

Cette expression permet une meilleure détermination de δ d'après le graphe de $u(t)$, et repérant les valeurs d'extrema séparés de n pseudo-périodes : l'amplitude décroissant lentement, l'écart des maxima est plus important en prenant en compte plusieurs pseudo-périodes.

6. On repère le 1^{er} maximum : $u_1 = 10$ V. Le 5^e maximum vaut $u_5 = 0,5$ V.

On en déduit le décrément logarithmique

$$\delta = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{10}{0,5}\right)$$

soit $\delta = 0,60$.

D'après l'expression de δ , on déduit

$$Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}}.$$

On estime $Q = 5,3$.

► On a bien $Q > 1/2$.

► La valeur de Q donne un ordre de grandeur du nombre de pseudo-oscillations visibles : le résultat obtenu est compatible avec le graphe donné.

19 — Circuit peu amorti

1. Quand l'interrupteur est fermé, nous observons le régime libre d'un circuit RLC série. On a

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{avec} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

d'où

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0.$$

On identifie à la forme canonique

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

d'où

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2)$$

Le circuit est faiblement amorti si $Q \gg 1$, soit si

$$R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

2. L'équation caractéristique associée à (2) est

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant est

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 \approx -4\omega_0^2$$

car $Q \gg 1$. L'équation admet donc deux racines conjuguées

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0 \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0.$$

La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$q(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)]$$

Initialement, le condensateur est chargé sous la tension E , d'où

$$q(0) = CE = A.$$

Le courant est donné par

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[-\frac{\omega_0}{2Q} A \cos(\omega_0 t) - \frac{\omega_0}{2Q} B \sin(\omega_0 t) - A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \right]$$

L'intensité était nulle pour $t < 0$; la bobine assurant la continuité de l'intensité, on a

$$i(0) = 0 = -A \frac{\omega_0}{2Q} + B\omega_0$$

d'où

$$B = \frac{A}{2Q}.$$

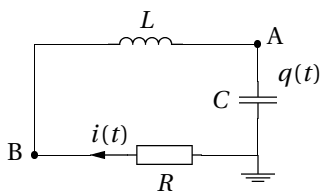
Comme $Q \gg 1$, on a $B \ll A$ et les expressions de $q(t)$ et $i(t)$ se simplifient selon

$$q(t) = CE e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_0 t)$$

et

$$i(t) = -\omega_0 CE e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin(\omega_0 t).$$

3. La tension aux bornes du condensateur est proportionnelle à $q(t)$, et la tension aux bornes de la résistance est proportionnelle à $i(t)$. Il faut donc placer la masse à la borne commune à R et C :



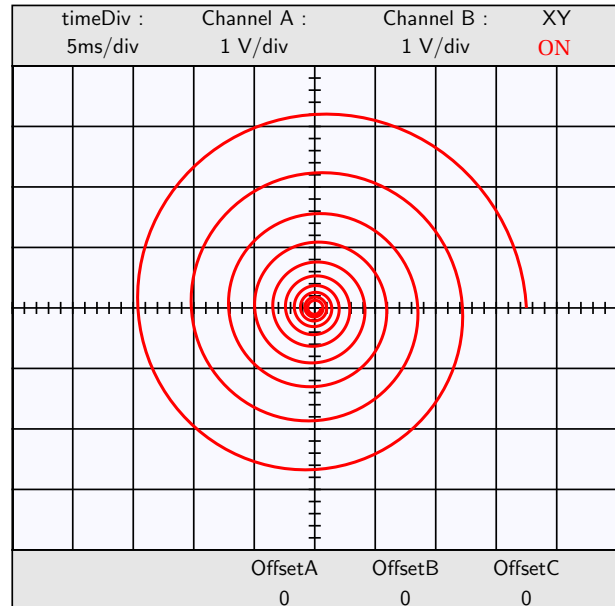
— On relie la borne A à la voie I de l'oscilloscope pour visualiser $u_A(t) = q(t)/C$.

— On relie la borne B à la voie II de l'oscilloscope pour visualiser $u_B(t) = -Ri(t)$.

On remarque que

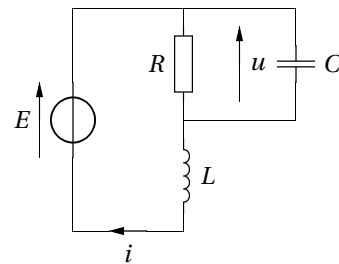
$$\left(\frac{q(t)}{CE} \right)^2 + \left(\frac{i(t)}{\omega_0 CE} \right)^2 = e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}.$$

On observe donc une spirale dont le rayon décroît exponentielle au cours du temps en mode XY à l'oscilloscope.



20 — Réponse d'un circuit

1. Introduisons des grandeurs utiles :



En exprimant les courants dans les deux branches en fonction de la tension $u(t)$, la loi des nœuds peut s'écrire

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} + C \frac{du}{dt}.$$

La loi des mailles s'écrit

$$E = L \frac{di}{dt} + u(t)$$

ce qui permet de remplacer

$$u(t) = E - L \frac{di}{dt}$$

dans la loi des nœuds :

$$i(t) = \frac{1}{R} \left(E - L \frac{di}{dt} \right) + C \frac{d}{dt} \left(E - L \frac{di}{dt} \right)$$

soit, comme E est une constante

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{L}{R} \frac{di}{dt} - LC \frac{d^2i}{dt^2}.$$

On obtient l'équation différentielle

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{LC} = \frac{E}{RLC}.$$

2. L'équation différentielle peut se mettre sous la forme canonique

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = \frac{E}{RLC}.$$

Par identification, on obtient

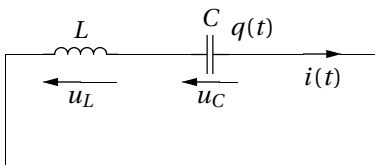
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

3. En régime continu établi, la bobine équivaut à un court-circuit et le condensateur à un interrupteur ouvert. Le circuit se ramène alors à la résistance branchée sur la source de tension, et on a tout simplement

$$i(\infty) = \frac{E}{R}.$$

21 — Circuit non linéaire

Orientons l'intensité dans le circuit. Nous faisons l'hypothèse que la diode est passante (on la remplace donc par un court-circuit)



Les relations relatives aux dipôles sont (attention aux orientations)

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}; \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{et} \quad q(t) = -Cu_C(t).$$

On a $u_L + u_C = 0$, soit $L \frac{di}{dt} + u_C = 0$, d'où

$$-L \frac{d^2 q}{dt^2} - \frac{q}{C} = 0$$

La charge du condensateur obéit donc à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

► On reconnaît l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

La solution générale est $q(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

On a $q(0) = q_0 = A$, et

$$i(0) = 0 = \frac{dq}{dt}(t=0) = B\omega_0$$

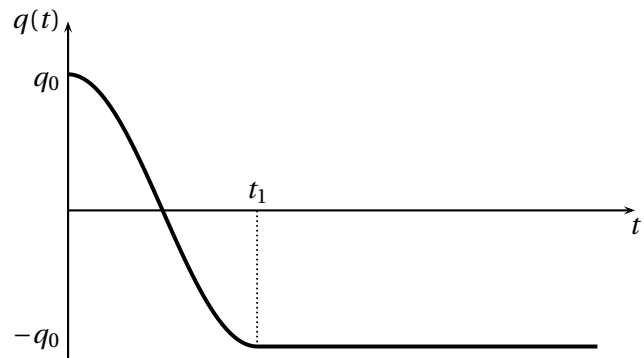
d'où $B = 0$. Finalement :

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t).$$

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t).$$

Ces calculs sont valables tant que la diode est passante, c'est-à-dire que $i(t) > 0$. On remarque que c'est le cas au début de l'évolution (en considérant $q_0 > 0$). En revanche, l'intensité change de signe à l'instant t_1 tel que $\sin(\omega_0 t_1) = 0$, soit $\omega_0 t_1 = \pi$.

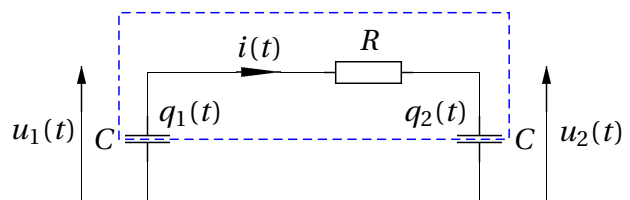
Pour $t > t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$, on aurait $i(t) < 0$ ce qui est impossible en présence de la diode; celle-ci passe donc à l'état bloqué, et $i(t) = 0$. Le système n'évolue plus.



► La charge $q_0 > 0$ est initialement sur l'armature « de droite » du condensateur. Lors de la première décharge, cette charge traverse le circuit et passe sur l'autre armature du condensateur. La charge ne peut se dérouler dans l'autre sens du fait de la diode et reste bloquée sur l'armature « de gauche »; on appelle la diode « diode de roue libre » quand elle a ce rôle (par analogie avec les cliquets d'une roue libre qui lui permettent de ne tourner que dans un sens).

22 — Deux condensateurs

1. Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices séparées par un milieu isolant.



La partie du circuit délimitée par le cadre hachuré est donc électriquement isolée du reste du circuit; la **charge électrique totale portée par les deux condensateurs est alors constante**, ce qui se traduit par $q_1(t) + q_2(t) = q_1(0) + q_2(0)$, soit

$$q_1(t) + q_2(t) = Q.$$

2. La loi des mailles s'écrit

$$u_2(t) + Ri(t) - u_1(t) = 0,$$

avec

$$u_1(t) = \frac{q_1(t)}{C} \quad \text{et} \quad u_2(t) = \frac{q_2(t)}{C}.$$

On a donc

$$\frac{q_2(t)}{C} - \frac{q_1(t)}{C} + Ri(t) = 0.$$

On a, compte tenu des orientations des grandeurs électriques,

$$i(t) = -\frac{dq_1(t)}{dt}.$$

Comme $q_2(t) = Q - q_1(t)$, on en déduit

$$\frac{Q - 2q_1(t)}{C} - R \frac{dq_1(t)}{dt} = 0,$$

que l'on écrit sous la forme canonique

$$\frac{dq_1(t)}{dt} + \frac{2}{RC} q_1(t) = \frac{Q}{RC},$$

soit

$$\frac{dq_1(t)}{dt} + \frac{q_1(t)}{\tau} = \frac{Q}{2\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC}{2}.$$

- C'est à partir de l'équation différentielle que l'on trouve l'expression du temps caractéristique, et non à partir de la « formule du cours $\tau = RC$ » qui n'est valable que pour le circuit RC .

La solution particulière constante est $q_{1,p} = \frac{Q}{2}$.

- Elle correspondant à la solution en régime établi : la charge se répartie également sur les deux condensateurs.

La solution générale de l'équation homogène étant $q_{1,h}(t) = Ae^{-t/\tau}$, la solution générale de l'équation complète est

$$q_1(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{Q}{2}.$$

La charge d'un condensateur étant une grandeur continue, la condition initiale conduit à

$$q_1(0) = Q = A + \frac{Q}{2} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{Q}{2}.$$

On en déduit

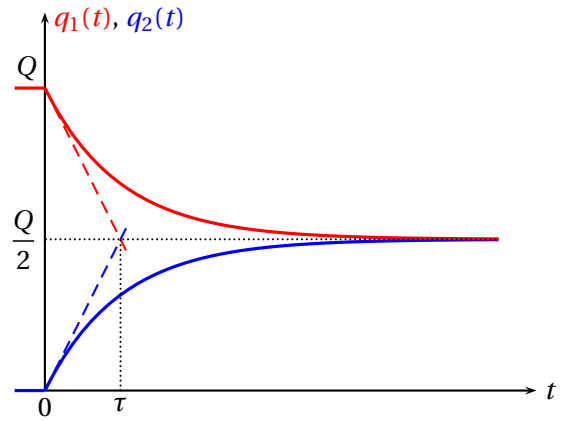
$$q_1(t) = \frac{Q}{2} (1 + e^{-t/\tau}).$$

3. De la relation $q_1(t) + q_2(t) = Q$, on déduit

$$q_2(t) = Q - \frac{Q}{2} (1 + e^{-t/\tau})$$

soit

$$q_2(t) = \frac{Q}{2} (1 - e^{-t/\tau}).$$



4. L'énergie emmagasinée dans le circuit est donnée par

$$\mathcal{E}(t) = \frac{q_1^2(t)}{2C} + \frac{q_2^2(t)}{2C}.$$

Initialement on a donc

$$\mathcal{E}(0) = \frac{Q^2}{2C}.$$

Dans la limite $t \rightarrow \infty$, on a

$$\mathcal{E}(\infty) = \frac{1}{2C} \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \frac{1}{2C} \left(\frac{Q}{2}\right)^2$$

soit

$$\mathcal{E}(\infty) = \frac{Q^2}{4C} = \frac{\mathcal{E}(0)}{2}.$$

L'énergie « manquante » a été dissipée dans la résistance par effet Joule.

La puissance instantanée dissipée dans la résistance vaut

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{RQ^2}{4\tau^2} e^{-2t/\tau}.$$

L'énergie totale dissipée dans la résistance entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_J &= \int_0^\infty p(t) dt = \frac{RQ^2}{4\tau^2} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{RQ^2}{4\tau^2} [-\tau e^{-2t/\tau}]_0^\infty \\ &= \frac{RQ^2}{4\tau} = \frac{Q^2}{4C}. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(\infty) + \mathcal{E}_J.$$

- On remarque que la moitié de l'énergie initialement emmagasinée dans le circuit se dissipe dans la résistance... quelle que soit la valeur de R .

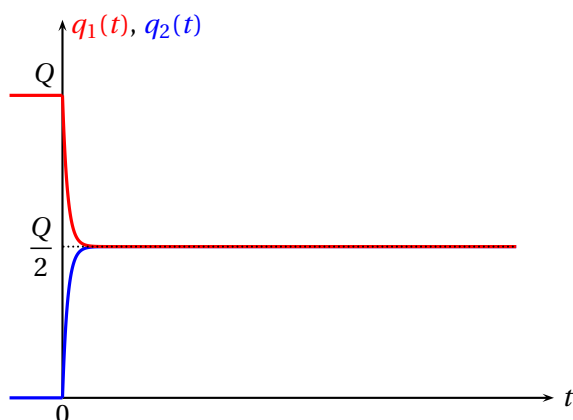
5. On a initialement $u_1(0^-) = Q$ et $u_2(0^-) = 0$.

Quand l'interrupteur est fermé, la loi des mailles donne $u_1(t) = u_2(t)$; en particulier juste après sa fermeture on a $u_1(0^+) = u_2(0^+)$.

La continuité de la tension aux bornes des condensateurs n'est pas respectée...

La modélisation d'un tel circuit est trop simplifiée : on a négligé la résistance des fils qui, même si elle est très faible, n'est pas nulle. Posant r cette résistance, on se ramène au cas précédent, avec une constante de temps $\tau = \frac{rC}{2}$ très faible.

Représentons alors l'évolution des charges des condensateurs :

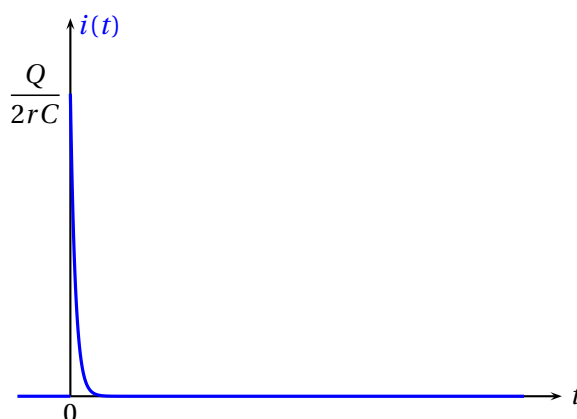


Dans la limite où $\tau \rightarrow 0$, on tend vers une évolution

« discontinue » des charges; en fait elle est continue mais très rapide.

► La moitié de l'énergie initialement emmagasinée dans le circuit est toujours dissipée dans la résistance des fils. Cette dissipation se faisant pendant une durée très courte, la puissance correspondante est très élevée.

► L'intensité est donnée par $i(t) = \frac{Q}{2rC} e^{-t/\tau}$. En particulier à la fermeture de l'interrupteur elle vaut $i(0) = \frac{Q}{2rC}$ qui est très élevée quand $r \rightarrow 0$. On observe donc un pic d'intensité très élevée et très bref à la fermeture de l'interrupteur. L'expérience n'est pas conseillée...



~~~~~ Régime harmonique, filtrage ~~~~~

23 — Circuit en régime harmonique

Tout d'abord, la fréquence se déduit facilement de l'oscillogramme : la période des signaux est $T = 5 \times 0,2 = 1$ ms, d'où $f = 1,0$ kHz.

On se place en notation complexe en régime harmonique. On relie facilement les amplitudes complexes des tensions d'entrée et de sortie (pont diviseur de tension) :

$$\underline{U} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{E}.$$

En prenant le module, on relie les amplitudes (réelles) des tensions :

$$U = \frac{E}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \quad (3)$$

Notons φ le déphasage de $u(t)$ par rapport à $e(t)$; comme $\underline{E} = E$ est réelle — on a $e(t) = E \cos(\omega t)$ — le terme φ est l'argument de $\underline{U}$, tel que

$$\tan \varphi = -RC\omega. \quad (4)$$

Nous raisonnons de deux façons.

1^{re} méthode : à partir des amplitudes.

D'après (3), on a $U < E$; les calibres étant identiques sur les deux voies, la courbe la plus grande représente le signal de plus grande amplitude, c'est-à-dire $e(t)$. On lit alors simplement $E = 3,0$ V.

Comme $\omega = 2\pi f$, la relation (3) peut s'écrire

$$U = \frac{E}{\sqrt{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}}.$$

On en déduit $4\pi^2 R^2 C^2 f^2 = E^2 / U^2 - 1$, d'où

$$C = \frac{1}{2\pi R f} \sqrt{\frac{E^2}{U^2} - 1}.$$

On estime $U = 1,85$ V, d'où $C = 2,0 \times 10^{-7}$ F, soit $C = 200$ nF.

2^{re} méthode : à partir des déphasages.

D'après (4) on a $\varphi < 0$: la tension $u(t)$ est en retard sur la tension $e(t)$; elle est donc représentée par la plus petite des deux courbes. Le déphasage (en degrés) est relié au retard temporel selon

$$\frac{\varphi}{360} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{-0,7}{5}$$

en prenant le « carreau » comme unité de temps pour simplifier.

On a donc d'après (4), on a

$$C = -\frac{\tan \varphi}{2\pi f R}.$$

On calcule $C = 1,9 \times 10^{-7}$ F, soit $C = 190$ nF.

► Les valeurs obtenues sont du même ordre de grandeur ; l'écart s'explique par la piètre précision de la lecture des valeurs sur l'oscillogramme. Pour information, les valeurs utilisées pour tracer la courbe de $u(t)$ sont $U = 1,868$ V et $\varphi = -51,488^\circ$.

24 — Impédance

1. L'impédance de ce dipôle s'écrit

$$\underline{Z} = r + jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}.$$

La tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont en phase si $\underline{Z}$ est réelle, c'est-à-dire si sa partie imaginaire est nulle. Il faut donc écrire $\underline{Z}$ en explicitant sa partie imaginaire :

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= r + jL\omega + \frac{R(1 - jRC\omega)}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \\ &= r + \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega^2} + j \left(L - \frac{R^2 C}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \right) \omega \end{aligned}$$

Il faut donc

$$L = \frac{R^2 C}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \quad (5)$$

soit $R^2 C(1 - LC\omega^2) = L$, d'où la condition sur R

$$R^2 = \frac{L}{C(1 - LC\omega^2)}. \quad (6)$$

2. La partie imaginaire de $\underline{Z}$ étant nulle, on a

$$\underline{Z} = r + \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega^2}.$$

Pour éliminer ω , il serait maladroit d'exprimer ω en fonction des données à partir de la question précédente ; il suffit de remarquer que d'après (5) la condition précédente s'écrit

$$\frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega^2} = \frac{L}{RC},$$

d'où

$$\underline{Z} = r + \frac{L}{RC}.$$

3. On doit avoir $R^2 \geq 0$; d'après la relation (6) cela implique $1 - LC\omega^2 \geq 0$, soit

$$\omega \leq \omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

On calcule $\omega_{\max} = 1 \times 10^5$ rad · s⁻¹.

En remarquant que $1 - LC\omega^2 \leq 1$, on a $\frac{1}{1 - LC\omega^2} \geq 1$,
d'où $R^2 \geq \frac{L}{C}$. On a donc

$$R \geq R_{\min} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

On calcule $R_{\min} = 1 \text{ k}\Omega$.

25 — Filtre linéaire

1. On a modifié les calibres des deux voies et de la base de temps, et **on est passé en mode AC**.

2. Les deux signaux ne sont pas sinusoïdaux : il y a une composante continue ! En notant

$$u_e(t) = U_0 + U_1 \cos(2\pi f t + \theta)$$

et

$$u_s(t) = U'_0 + U'_1 \cos(2\pi f t + \theta'),$$

$$\text{on a } H_0 = \frac{U'_0}{U_0}.$$

On lit les valeurs des composantes continues sur le 1^{er} oscillogramme (attention aux calibres) : $U_0 = 2 \text{ V}$ et $U_1 = 1 \text{ V}$, d'où $H_0 = 0,5$.

On peut déterminer f_0 en utilisant le déphasage donné par

$$\tan \varphi = -\frac{f}{f_0}.$$

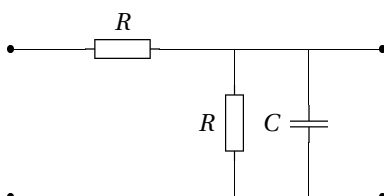
On lit $\frac{\varphi}{360} = -\frac{1,25}{10}$, d'où $\varphi = -45^\circ$ et $\tan \varphi = -1$. On en déduit $f_0 = f$, en lisant la fréquence sur la base de temps, $f_0 = 1 \text{ kHz}$.

On peut aussi utiliser le gain à la fréquence f pour la partie sinusoïdale des signaux, donné par

$$G(f) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_0^2}}}.$$

On lit $\frac{0,5}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_0^2}}} = \frac{0,5 \times 2,1}{3}$, d'où $f_0 = \frac{f}{\sqrt{\left(\frac{3}{2,1}\right)^2 - 1}}$ soit $f_0 = 1,0 \text{ kHz}$ avec $f = 1,0 \text{ kHz}$.

3. On commence par un pont diviseur en continu avec deux résistances identiques pour avoir $H_0 = 0,5$, puis on ajoute un condensateur pour avoir un filtre passe-bas :



Fonction de transfert :

$$H = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{R + \frac{R}{1+jRC\omega}} = \frac{R}{R + R(1+jRC\omega)} = \frac{0,5}{1 + j\frac{RC}{2}\omega}.$$

La pulsation de coupure est $\omega_0 = \frac{2}{RC}$, d'où

$$f_0 = \frac{1}{\pi RC}.$$

On veut $f_0 = 1 \text{ kHz}$. En prenant $R = 1 \text{ k}\Omega$, on obtient $C = 318 \text{ nF}$.

► Cette dernière valeur n'est pas normalisée. On pourrait choisir $C = 300 \text{ nF}$ et $R = 1,05 \text{ k}\Omega$, mais là on chipote !

4. Les variations de la tension sont données par la composante sinusoïdale $U_1 \cos(2\pi f t)$. On peut donc utiliser la fonction de transfert et le gain en décibel associé :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log H_0 - 10 \log \left(1 + \frac{f^2}{f_0^2} \right).$$

On veut $G_{\text{dB}} = -50 \text{ dB}$, soit comme $H_0 = 0,5$

$$10 \log \left(1 + \frac{f^2}{f_0^2} \right) = 50 - 6 = 44.$$

Il faut donc

$$10^{4,4} = 1 + \frac{f^2}{f_0^2} \approx \frac{f^2}{f_0^2}$$

car $10^{4,4} \gg 1$, soit

$$f = f_0 \times 10^{2,2} = 158 f_0.$$

L'amplitude des variations de la tension de sortie est atténuée de 50 dB pour la fréquence $f = 158 \text{ kHz}$.

► La tension de sortie vaut alors

$$u_s(t) \approx H_0 U_0 = \frac{U_0}{2}.$$

26 — Dipôle à identifier

La voie X visualise la tension aux bornes du dipôle RCD série, tandis que la voie Y visualise la tension aux bornes de R , c'est-à-dire l'intensité traversant le dipôle série.

On voit sur l'oscillogramme que la tension et le courant sont en phase ; l'impédance du dipôle RCD est donc réelle.

L'impédance de la partie RC est $R - \frac{j}{C\omega}$, de partie imaginaire (réactance) négative. Il faut donc ajouter une impédance de partie imaginaire positive pour obtenir une impédance totale réelle ; ce ne peut être réalisé qu'avec une bobine.

Le dipôle D est une bobine d'inductance L .

L'impédance de l'ensemble est

$$\underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{\omega} \right).$$

Elle est réelle pour

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

soit pour la fréquence

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

L'oscillogramme indique une période $T = 10 \times 0,2 \text{ ms} = 2 \text{ ms}$, soit $f = 1/T = 500 \text{ Hz}$.

On en déduit

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C}.$$

On calcule $L = 0,10 \text{ H}$.

On a

$$\underline{U}_Y = \frac{R}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{jC\omega}\right)} \underline{U}_X.$$

À la fréquence f_0 , on a donc $U_Y = U_X$. Les deux courbes de l'oscillogramme doivent avoir même amplitude.

La calibre de la voie II (B) étant deux fois plus élevé que celui de la voie I (A), la courbe la plus « grande » sur l'oscillogramme correspond à U_X (amplitude 3 V), tandis que la plus petite courbe correspond à U_Y (amplitude de $1,5 \times 2 = 3 \text{ V}$).

27 — Circuit du premier ordre

1. La fonction de transfert est (pont diviseur de tension)

$$\underline{H} = \frac{r}{r + \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}} = \frac{rR + jrL\omega}{rR + j(r+R)L\omega}$$

soit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{R+r}{Rr}L\omega}.$$

Elle est de la forme

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

avec

$$H_0 = 1, \quad \omega_1 = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{Rr}{(R+r)L}.$$

- On remarque que $\omega_2 = \frac{r}{R+r}\omega_1$, soit $\omega_2 < \omega_1$.
- À très basse fréquence, la bobine équivaut à un court-circuit, d'où $u = e$. On a bien $\underline{H}(\omega = 0) = 1$.
- À très haute fréquence, la bobine équivaut à un interrupteur ouvert. On se ramène au pont diviseur avec deux résistances et $\underline{u} = \frac{r}{r+R}e$. On a bien $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \underline{H} = \frac{r}{r+R}$.

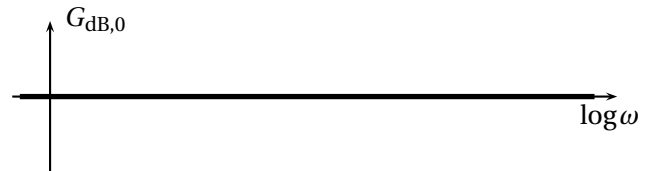
2. Avec $\underline{H} = H_0 \cdot \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$, on a $G = G_0 G_1 G_2$ d'où

$$G_{dB} = G_{dB,0} + G_{dB,1} + G_{dB,2}$$

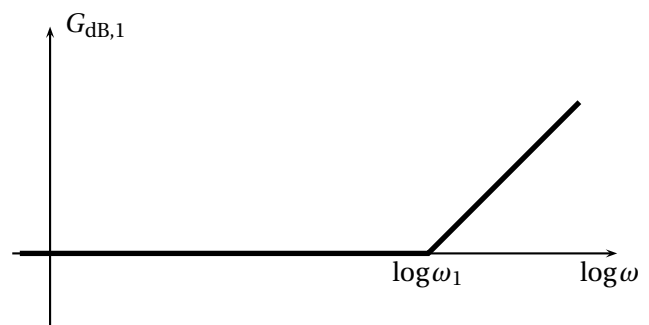
avec

$$G_{dB,0} = 20 \log H_0; \quad G_{dB,1} = 20 \log G_1; \quad G_{dB,2} = 20 \log G_2.$$

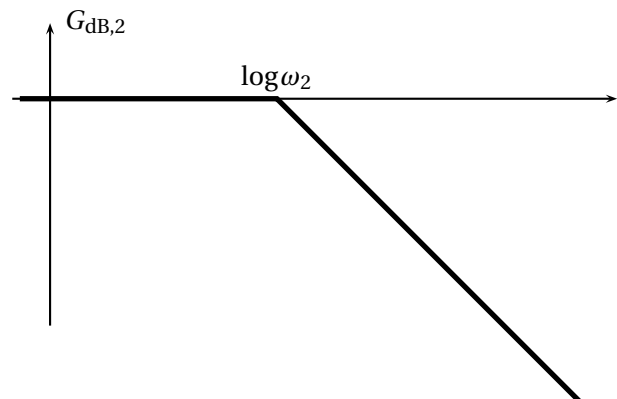
On a $G_{dB,0} = 0$:



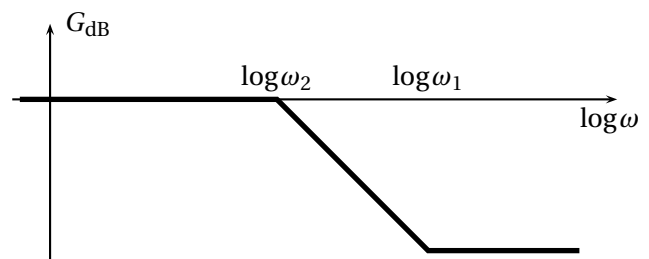
Avec $\underline{H}_1 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$, on a



Avec $\underline{H}_2 = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$, on a



3. On somme les trois diagrammes, sachant que $\omega_2 < \omega_1$:



4. On a, comme $H_0 = 1$, on a

$$\underline{H} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} = \frac{u}{e}$$

d'où

$$\underline{u} + \frac{j\omega}{\omega_2} \underline{u} = \underline{e} + \frac{j\omega}{\omega_1} \underline{e}.$$

On en déduit l'équation différentielle

$$u(t) + \frac{1}{\omega_2} \frac{du}{dt} = e(t) + \frac{1}{\omega_1} \frac{de}{dt}.$$

5. Avec $e(t) = E$, l'équation différentielle s'écrit pour $t \geq 0$:

$$u(t) + \frac{1}{\omega_2} \frac{du}{dt} = E.$$

La solution générale est de la forme

$$u(t) = Ae^{-\omega_2 t} + E.$$

Attention à la condition initiale : la bobine assure la continuité du courant qui la traverse. À $t = 0$, le courant est donc nul dans la bobine, et les deux résistances sont traversées par la même intensité. On peut donc appliquer la formule du pont diviseur de tension :

$$u(0) = \frac{r}{r+R} E = A + E$$

d'où $A = -\frac{R}{R+r} E$ et

$$u(t) = E \left(1 - \frac{R}{R+r} e^{-\omega_2 t} \right).$$

28 — Détermination des caractéristiques d'un circuit

1. Attention, dériver par rapport au temps revient à multiplier par $j\omega$, pas par jf .

Avec $u_e(t) = U_e \cos(2\pi f t)$, la dérivation par rapport au temps se ramène en effet, en complexes, à une multiplication par $j2\pi f$.

Le plus simple est de poser $\omega_0 = 2\pi f_0$. On a alors

$$\underline{U} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \underline{U}_e.$$

Il faut se ramener à une fraction rationnelle en $j\omega$ pour faire le lien avec les dérivations temporelles :

$$\underline{U} = \frac{H_0}{1 + j\omega \frac{Q}{\omega_0} + \frac{Q\omega_0}{j\omega}} \underline{U}_e = \frac{j\omega \frac{H_0}{Q\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}} \underline{U}_e$$

soit

$$\left(1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} \right) \underline{U} = j\omega \frac{H_0}{Q\omega_0} \underline{U}_e.$$

On en déduit

$$u(t) + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{du}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{H_0}{Q\omega_0} \frac{du_e}{dt}$$

soit sous forme canonique

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = H_0 \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_e}{dt}.$$

2. L'énoncé donne en fait la fonction de transfert du filtre étudié, par $\underline{U} = \underline{H}(jf) \underline{U}_e$.

On constate que pour $f = 1000$ Hz, les deux tensions sont en phase; la fonction de transfert est donc réelle. En écrivant que sa partie réelle est nulle, il vient immédiatement $\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = 0$, soit $f = f_0$. On en déduit

$$f_0 = 1 \text{ kHz}.$$

À cette fréquence, on a $\underline{H}(jf_0) = H_0$, et $u(t) = H_0 u_e(t)$, soit en terme d'amplitudes $U = H_0 U_e$. On lit $U = 10$ V et $U_e = 5$ V. On en déduit $H_0 = 2$.

On utilise maintenant le graphe correspondant à $f = 500$ Hz pour déterminer le facteur de qualité Q .

En terme de déphasage

On a ici $x = 0,5$, soit

$$\underline{H} = \frac{2}{1 - jQ1,5}.$$

Le déphasage est donc donné par

$$\tan \varphi = 1,5Q.$$

➤ On trouve $\varphi > 0$: la courbe de $u(t)$ est en effet en avance de phase sur celle de $u_e(t)$ sur le graphe.

Le décalage temporel est $\Delta t = 0,4 \times 10^{-3}$ s.

Pour $f = 500$ Hz, la période est $T = 2 \times 10^{-3}$ s.

Le déphasage en degrés vaut donc

$$\varphi = 360 \times \frac{0,4}{2} = 72^\circ.$$

On calcule alors $Q = \frac{\tan \varphi}{1,5}$ soit $Q = 2,1$.

29 — Étude d'un filtre

1. Il s'agit d'un filtre passe-bande bien sûr. Pour un filtre d'ordre 2, la fonction de transfert est de la forme

$$\underline{H}(jf) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}.$$

On lit tout de suite sur le diagramme la fréquence centrale $f_0 = 1 \text{ kHz}$.

Comme $\underline{H}(jf_0) = H_0$, on lit directement $H_0 = 1$.

2. Le gain vaut

$$G(f) = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}}.$$

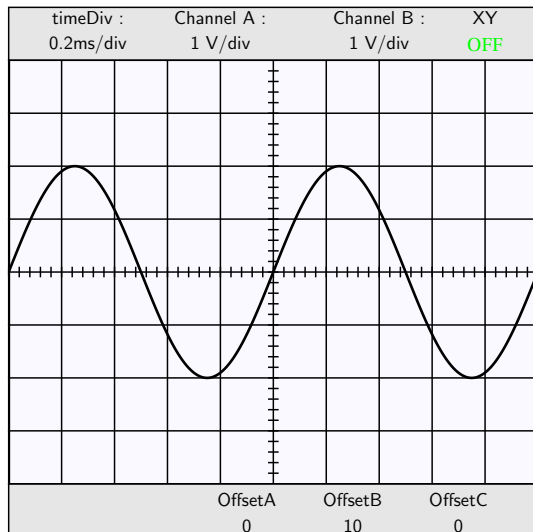
En posant $x = f/f_0$, on a

$$G_{dB} = -20 \log G = -10 \log \left[1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right].$$

On a $G(100) = -40 = -10 \log(1 + Q^2 9,9^2)$, d'où $10^4 = 1 + Q^2 9,9^2 \approx Q^2 9,9^2$ car $1 \ll 10^4$. On en déduit $Q = \frac{100}{9,9} = 10,1$, soit $Q = 10$.

► On obtient cette valeur plus rapidement encore en considérant $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \approx 10^2$.

3. Le signal comporte une composante continue qui est coupée, une composante « rapide » oscillant avec une fréquence de 10 kHz (on mesure la période sur l'oscillogramme) qui peut être considérée comme coupée (atténuée de -40 dB), une composante à la fréquence 1 kHz qui correspond à la fréquence centrale du filtre, qui est restituée sans atténuation. On obtient donc :



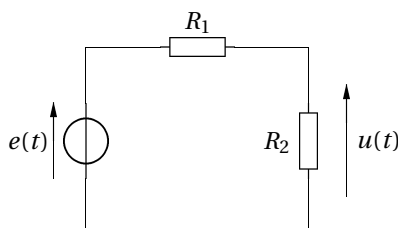
4. Il faut prendre la tension aux bornes de la résistance pour avoir un comportement en filtre passe-bande.

On a d'une part $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, d'où $L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$; on calcule $L = 25 \text{ mH}$.

De $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ on déduit $R = 15 \Omega$.

30 — Étude d'un filtre

1. En très basse fréquence, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts; le circuit se ramène donc à



La fonction de transfert vaut alors

$$\underline{H}_{BF} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}.$$

D'après le diagramme de Bode, on en déduit

$$G_{dB,BF} = -20 \log \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = -20,$$

d'où

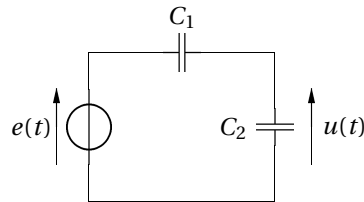
$$\log \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = 1 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{R_1}{R_2} = 10.$$

On a donc $R_2 = \frac{R_1}{9}$, soit $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$.

En très haute fréquence, l'admittance de l'association en parallèle d'un condensateur et d'une résistance est

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega \approx jC\omega.$$

Cette association est donc équivalente au condensateur seul, et le circuit se ramène à



La fonction de transfert vaut

$$\underline{H}_{HF} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{jC_1\omega}{jC_1\omega + jC_2\omega} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}}.$$

D'après le diagramme de Bode, on en déduit

$$G_{dB,HF} = -20 \log \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) = -80,$$

d'où

$$\log \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) = 4 \quad \text{et} \quad \frac{C_2}{C_1} = 10^4 - 1 \approx 10^4.$$

On a donc $C_2 = 10^4 C_1$, soit $C_2 = 100 \mu\text{F}$.

2. Dans l'intervalle [100 Hz; 100 kHz], soit pour $\log \frac{f}{f_0} \in [1; 4]$, le gain diminue de 60 dB sur 3 décades, soit une pente de -20 dB/décade, caractéristique d'un **comportement intégrateur**.

3. Le signal d'entrée est de la forme

$$e(t) = 6 \cos(4\pi f_1 t + \varphi_1) + 4 \cos(8\pi f_1 t + \varphi_2)$$

avec $f_1 = 1 \text{ kHz}$.

Nous sommes dans le domaine de fréquence où le filtre est intégrateur. La droite du diagramme de Bode passant par l'origine, elle pour équation

$$G_{dB} = -20 \frac{f}{f_0}.$$

La fonction de transfert correspondante est donc

$$\underline{H} = \frac{f_0}{jf} = \frac{2\pi f_0}{j\omega},$$

la multiplication par $\frac{1}{j\omega}$ revenant à intégrer le signal. On a donc

$$s(t) = 6 \times \frac{2\pi f_0}{4\pi f_1} \sin(4\pi f_1 t + \varphi_1) + 4 \times \frac{2\pi f_0}{8\pi f_1} \sin(8\pi f_1 t + \varphi_2),$$

soit comme $\frac{f_0}{f_1} = 10^2$,

$$s(t) = 3 \times 10^{-2} \sin(4\pi f_1 t + \varphi_1) + 10^{-2} \sin(8\pi f_1 t + \varphi_2).$$

4. À la fréquence $f_1 = 10$ Hz, on a

$$G_{dB}(f_1) = 20 \log G(f_1) = -20$$

d'où $G(f_1) = 0,1$.

À la fréquence $f_2 = 100$ kHz, on a

$$G_{dB}(f_2) = 20 \log G(f_2) = -80$$

d'où $G(f_1) = 10^{-4}$.

Compte tenu de la forte atténuation de la composante de fréquence f_2 , on peut la considérer comme absente du signal de sortie.

La composante de fréquence f_1 est atténuée d'un facteur 10; le signal de sortie est donc, en l'absence de donnée sur le diagramme de Bode en phase, de la forme

$$s(t) = \cos(2\pi f_1 t + \varphi).$$

31 — Étude d'un filtre

1. Il s'agit d'un **filtre passe-bas**.

La pente de l'asymptote étant de -20 dB/décade, le filtre est **d'ordre 1**.

2. À la pulsation $\omega_1 = \omega_0/100$, on a $\varphi \approx 0$ et $G_{dB} \approx 0$, soit $G \approx 1$. La composante du signal de sortie à cette pulsation est donc

$$s_1(t) = E_1 \cos(\omega_1 t).$$

À la pulsation $\omega_2 = \omega_0$, on a $\varphi \approx -45^\circ = -\pi/4$ et $G_{dB} \approx -3$ dB, soit $G \approx 1/\sqrt{2}$. La composante du signal de sortie à cette pulsation est donc

$$s_2(t) = \frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right).$$

À la pulsation $\omega_3 = 100\omega_0$, on a $\varphi \approx -90^\circ = -\pi/2$ et $G_{dB} \approx -40$ dB, soit $G \approx 10^{-2}$. La composante du signal de sortie à cette pulsation est donc

$$s_3(t) = \frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E_3}{100} \sin(\omega_3 t).$$

Le signal de sortie est donc

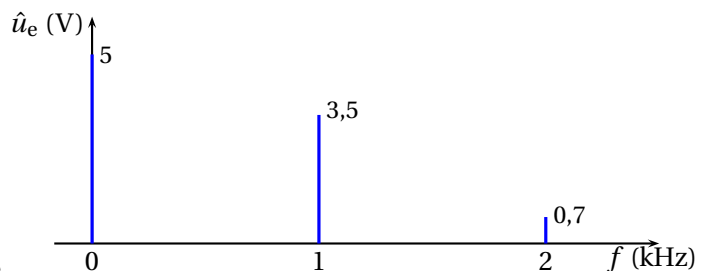
$$s(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_3}{100} \sin(\omega_3 t).$$

3. Si le signal d'entrée est un signal créneau de pulsation $\frac{\omega_0}{1000}$, les premiers harmoniques jusqu'à un rang élevé (plusieurs centaines) sont dans la zone où l'on peut assimiler $\underline{H} \approx 1$; le signal de sortie sera similaire au signal d'entrée.

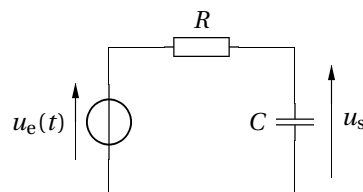
4. Si le signal d'entrée est un signal créneau de pulsation $100\omega_0$, il est situé dans la zone où le filtre se comporte comme un intégrateur. Le signal de sortie sera donc un signal triangulaire de même pulsation,

32 — Filtrage d'un signal composé

1. Spectre en amplitude :



2. Pour obtenir une tension continue, il faut filtrer les composantes de fréquence $f > 0$. Il faut donc un filtre passe-bas, dont la structure est



3. La fonction de transfert du filtre est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Le gain est

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}}.$$

La composante de fréquence f en sortie du filtre a pour valeur crête-à-crête (la valeur crête-à-crête en entrée est $2 \times 3,4 = 6,8$ V) $6,8G(f)$.

La condition sur le taux d'ondulation est donc $6,8G(f) < 0,05$, soit

$$\sqrt{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2} > \frac{6,8}{0,05} = 136.$$

Il faut donc

$$R > \frac{\sqrt{136^2 - 1}}{2\pi C f}.$$

On calcule $R > 21,7 \text{ k}\Omega$.

33 — Fonction retard

1. Prenons $e(t) = E \cos(\omega t)$. La sortie correspondante est

$$s(t) = E \cos[\omega(t - \tau)] = E \cos(\omega t - \omega \tau).$$

En notation complexe, on a alors

$$\underline{e}(t) = E e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{s}(t) = E e^{j(\omega t - \omega \tau)}$$

d'où les amplitudes complexes

$$\underline{E} = E \quad \text{et} \quad \underline{S} = E e^{-j\omega \tau}.$$

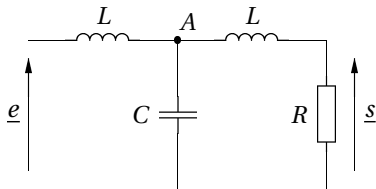
La fonction de transfert correspondante est alors

$$\underline{H}_0(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = e^{-j\omega \tau}.$$

La fonction de transfert associée à un quadripôle réalisant la fonction de retard est

$$\underline{H}_0(j\omega) = e^{-j\omega \tau}.$$

2. On note



La loi des nœuds en terme de potentiels en Q s'écrit

$$\frac{\underline{e} - \underline{V}_A}{jL\omega} + (0 - \underline{V}_A)jC\omega + \frac{\underline{s} - \underline{V}_A}{jL\omega} = 0$$

soit

$$\underline{e} - \underline{V}_A - \underline{V}_A LC(j\omega)^2 + \underline{s} - \underline{V}_A = 0$$

d'où

$$\underline{V}_A = \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2 + LC(j\omega)^2}.$$

Un pont diviseur de tension entre $\underline{V}_A$ et $\underline{s}$ avec la résistance et la bobine de la maille de droite permet d'écrire

$$\underline{s} = \frac{R}{R + jL\omega} \underline{V}_A.$$

On a alors

$$\underline{s} = \frac{R}{R + jL\omega} \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2 + LC(j\omega)^2}$$

soit

$$[2R + RLC(j\omega)^2 + 2Lj\omega + L^2 C(j\omega)^3] \underline{s} = R \underline{e} + R \underline{s}.$$

On en déduit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{R}{R + 2Lj\omega + RLC(j\omega)^2 + L^2 C(j\omega)^3}.$$

En simplifiant par R on obtient la fonction de transfert sous forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2L}{R}(j\omega) + LC(j\omega)^2 + \frac{L^2 C}{R}(j\omega)^3}.$$

3. Dans le cas où $\omega \tau \ll 1$, on développe à l'ordre 2 la fonction de transfert générale d'une ligne à retard

$$\underline{H}_0(j\omega) = e^{-j\omega \tau} \approx 1 - j\omega \tau + \frac{1}{2}(j\omega \tau)^2$$

soit

$$\underline{H}_0(j\omega) = 1 - \tau(j\omega) + \frac{\tau^2}{2}(j\omega)^2.$$

Développons $\underline{H}(j\omega)$ en se limitant à l'ordre 2 en $(j\omega)$:

$$\underline{H}(j\omega) \approx 1 - \frac{2L}{R}(j\omega) - LC(j\omega)^2 + \frac{4L^2}{R^2}(j\omega)^2$$

soit

$$\underline{H}(j\omega) = 1 - \frac{2L}{R}(j\omega) + \left(\frac{4L^2}{R^2} - LC\right)(j\omega)^2.$$

Identifions terme à terme (en puissance de $j\omega$) les deux développements :

$$\frac{2L}{R} = \tau \quad \text{et} \quad \frac{4L^2}{R^2} - LC = \frac{\tau^2}{2}.$$

On a donc

$$\frac{4L^2}{R^2} - LC = \frac{4L^2}{2R^2} \quad \text{d'où} \quad LC = \frac{2L^2}{R^2}.$$

Il faut donc

$$R = \sqrt{\frac{2L}{C}}.$$

On a alors

$$\tau = 2L \sqrt{\frac{C}{2L}}$$

et le retard vaut alors

$$\tau = \sqrt{2LC}.$$

34 — Étude d'un filtre

1. Très basses fréquences :

La bobine équivaut à un fil ; la sortie est donc reliée à l'entrée et $\underline{s} = \underline{e}$.

Très hautes fréquences :

Le condensateur équivaut à un fil ; la sortie est donc court-circuitée et $\underline{s} = 0$.

Il s'agit donc d'un **filtre passe-bas**.

2. On a une structure en pont diviseur de tension, avec

$$\underline{Z}_1 = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

et

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = jC\omega + \frac{1}{R}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = \frac{1}{1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_1} = \frac{1}{1 + \frac{jRL\omega}{R + jL\omega} (jC\omega + \frac{1}{R})} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{jRL\omega(1 + jRC\omega)}{R(R + jL\omega)}} = \frac{R(R + jL\omega)}{R(R + jL\omega) + jRL\omega(1 - jRC\omega)} \\ &= \frac{R^2 + jRL\omega}{R^2 + 2jRL\omega - R^2LC\omega^2} \end{aligned}$$

soit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 + j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{2L}{R}\omega - LC\omega^2}.$$

L'expression est de la forme

$$\underline{H}(jx) = \frac{1 + jax}{1 - x^2 + jbx} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

En identifiant le terme en ω^2 , on a

$$x^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = LC\omega^2$$

d'où

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

On a alors $\omega = x\omega_0 = \frac{x}{\sqrt{LC}}$ et la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H}(jx) = \frac{1 + j\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}x}{1 + j\frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}x - x^2}.$$

On en déduit

$$a = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad b = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Le gain est donné par

$$G(x) = \frac{\sqrt{1 + a^2x^2}}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + b^2x^2}}.$$

En notant $\underline{H}_N$ le numérateur et $\underline{H}_D$ le dénominateur de la fonction de transfert, on a

$$\varphi(x) = \arg(\underline{H}) = \arg(\underline{H}_N) - \arg(\underline{H}_D)$$

soit

$$\varphi(x) = \arctan(ax) - \arctan\left(\frac{bx}{1 - x^2}\right).$$

Très basses fréquences

On a $\underline{H} \approx 1$, donc $G_{dB,BF} = 0$ et $\varphi_{BF} = 0$.

Très hautes fréquences

On a $\underline{H} \approx -\frac{1}{x^2}$, donc $G_{dB,HF} = -40 \log x$ et $\varphi_{HF} = -\pi$.

Diagramme asymptotique en gain :

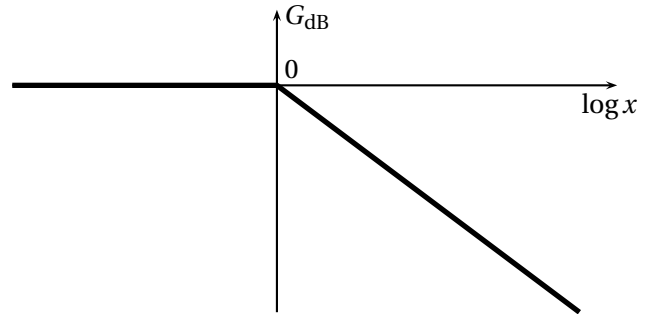
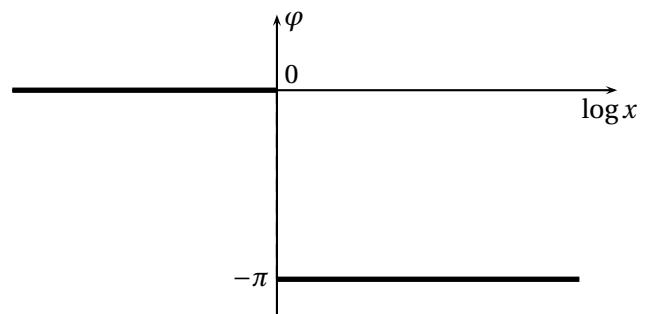


Diagramme asymptotique en phase :



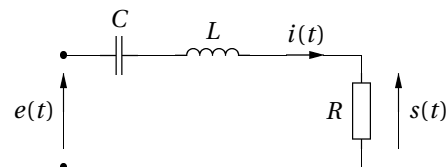
3. Dans le cas $\omega \ll \omega_0$, on peut considérer qu'un grand nombre d'harmoniques est dans la bande passante du filtre passe-bas : le signal sera peu perturbé, et $s(t) \approx e(t)$.

Dans le cas $\omega \gg \omega_0$, les composantes harmoniques du signal sont très atténuées. Il ne reste que la composante continu qui passe intégralement, et $s(t) \approx E/2$.

35 — Éléments d'un filtre

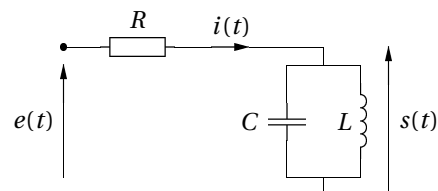
Avec R , L et C , il existe deux possibilités d'obtenir un filtre passe-bande.

Montage n° 1 :



➤ À très haute (respectivement à très basse fréquence), la bobine (respectivement le condensateur) est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $i(t) = 0$ et $s(t) = Ri(t) = 0$. On a un comportement passe-bande.

Montage n° 2 :



- À très haute (respectivement à très basse fréquence), le condensateur (respectivement la bobine) est équivalent à un court-circuit, et $s(t) = 0$. On a un comportement passe-bande.

On mesure un courant non nul en régime continu. Seul le **montage n° 2** convient compte tenu de la discussion précédente (on a $i(t) = 0$ en continu dans le premier montage, le condensateur étant équivalent à un interrupteur ouvert).

En continu, on a $s(t) = 0$ (la bobine est équivalente à un court-circuit), d'où $e(t) = Ri(t)$.

On en déduit $R = \frac{e(t)}{i(t)} = \frac{3}{1 \times 10^{-3}}$, soit $R = 3 \text{ k}\Omega$.

Notons $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$ l'impédance équivalente à l'association en parallèle de la bobine et du condensateur. La structure en pont diviseur de tension permet d'écrire la fonction de transfert du filtre sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}}, \quad \text{avec} \quad \underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{j\omega},$$

d'où

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + R\left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}.$$

La forme canonique d'un tel filtre est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

L'identification des deux expressions de $\underline{H}$ pour toute valeur de ω conduit à

$$RC = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{Q}{2\pi f_0} \quad \text{et} \quad \frac{R}{L} = Q\omega_0 = 2\pi f_0 Q.$$

Le facteur de qualité est relié à la bande passante relative par

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1 \times 10^3}{200} = 5.$$

On en déduit d'une part

$$C = \frac{Q}{2\pi R f_0} = \frac{5}{2\pi \times 3 \times 10^3 \times 1 \times 10^3} = 2,7 \times 10^{-7} \text{ F}$$

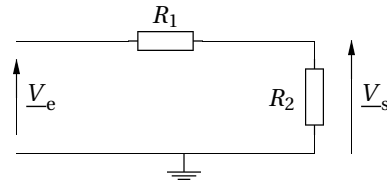
soit $C = 270 \text{ nF}$, et d'autre part

$$L = \frac{R}{2\pi f_0 Q} = \frac{3 \times 10^3}{2\pi \times 1 \times 10^3 \times 5} = 9,5 \times 10^{-2} \text{ H}$$

soit $L = 95 \text{ mH}$.

36 — Étude d'un filtre

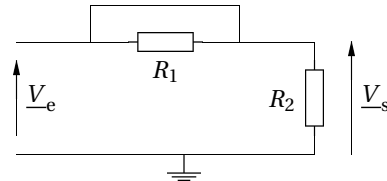
1. À très basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, et le circuit se ramène à



Il s'agit d'un simple pont diviseur de tension, dont la fonction de transfert est

$$\underline{H}_{BF}(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

À très haute fréquence, le condensateur est équivalent à un court-circuit, et le circuit se ramène à



Les tensions de sortie et d'entrée sont donc égales, et

$$\underline{H}_{HF}(j\omega) = 1.$$

- Ces deux asymptotes ne permettent pas de tracer le diagramme de Bode asymptotique : nous avons deux droites horizontales qui ne se recoupent pas. Il est nécessaire d'établir la fonction de transfert du filtre pour faire la jonction entre ces asymptotes.

2. L'association de R_1 et C en parallèle a pour impédance équivalente

$$\underline{Z} = \frac{\frac{R_1}{jC\omega}}{R_1 + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R_1}{1 + jR_1 C\omega}.$$

- Il est recommandé de retenir de résultat.

La fonction de transfert s'écrit donc

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_2}{R_2 + \underline{Z}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1 + jR_1 C\omega}}.$$

Mettons l'expression sous la forme d'une fraction rationnelle en $j\omega$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_2(1 + jR_1 C\omega)}{R_2(1 + jR_1 C\omega) + R_1} = \frac{R_2 + jR_1 R_2 C\omega}{R_1 + R_2 + jR_1 R_2 C\omega}.$$

Le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré 1 en $j\omega$; on peut mettre l'expression sous la forme canonique

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}},$$

soit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + jR_1 C\omega}{1 + j\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C\omega}.$$

On en déduit

$$H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad \omega_1 = \frac{1}{R_1 C} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}.$$

► On remarque que $\omega_2 > \omega_1$.

3. La fonction de transfert peut se décomposer sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega)$$

avec

$$\underline{H}_1(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1} \quad \text{et} \quad \underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}.$$

Le gain en décibel s'écrit alors sous la forme

$$G_{dB} = G_{dB,0} + G_{dB,1} + G_{dB,2}.$$

avec

$$G_{dB,0} = 20 \log \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) < 0.$$

À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_1$), on a

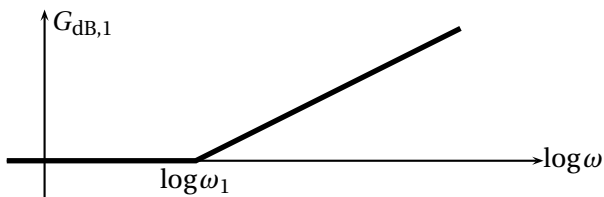
$$\underline{H}_1 \approx 1 \quad \text{et} \quad G_{dB,1} \approx 0.$$

À très haute fréquence ($\omega \gg \omega_1$), on a

$$\underline{H}_1 \approx j\frac{\omega}{\omega_1} \quad \text{et} \quad G_{dB,1} \approx 20 \log \frac{\omega}{\omega_1}.$$

Ces deux asymptotes se coupent en $\omega = \omega_1$.

On en déduit le diagramme asymptotique :



À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_2$), on a

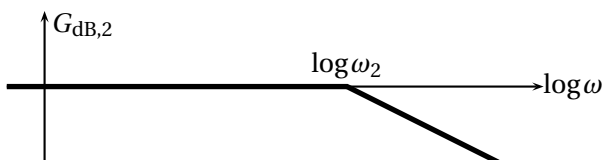
$$\underline{H}_2 \approx 1 \quad \text{et} \quad G_{dB,2} \approx 0.$$

À très haute fréquence ($\omega \gg \omega_2$), on a

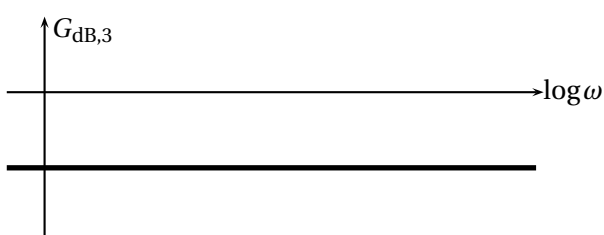
$$\underline{H}_2 \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_2}} \quad \text{et} \quad G_{dB,2} \approx -20 \log \frac{\omega}{\omega_2}.$$

Ces deux asymptotes se coupent en $\omega = \omega_2$.

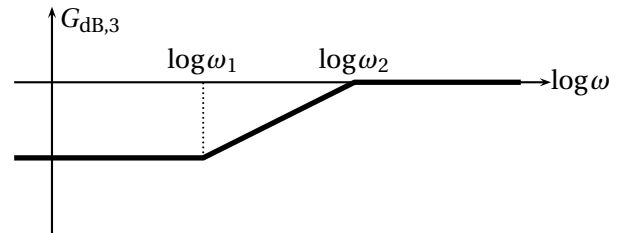
On en déduit le diagramme asymptotique :



On a de façon évidente



Le diagramme asymptotique du filtre s'obtient en effectuant la somme des trois courbes asymptotes :



► Ce diagramme est bien compatible avec l'étude préliminaire : le filtre atténue les basses fréquences et laisse passer les hautes fréquences.

4. Nous venons de mener une étude fréquentielle, en régime harmonique. Dans le cadre de la réponse à un signal carré indiquée ici, il convient de raisonner de façon temporelle.

Pour chaque échelon (on en distingue deux sur le graphe), on voit une réponse qui débute par une exponentielle (phase transitoire), puis devient constante (régime établi).

La partie constante de la réponse décrit le régime établi continu.

1^{re} méthode : le régime continu correspond au cas limite $\omega \rightarrow 0$; le système est alors décrit par la fonction de transfert

$$\underline{H}(0) = H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

On lit $E = 1,0 \text{ V}$ et $S = 0,5 \text{ V}$; on en déduit

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{S}{E} = 0,5$$

d'où $R_2 = R_1$, soit $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$.

2^e méthode : on établit l'équation différentielle entre l'entrée et la sortie à partir de la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{R_2 + jR_1 R_2 C \omega}{R_1 + R_2 + jR_1 R_2 C \omega}$$

d'où

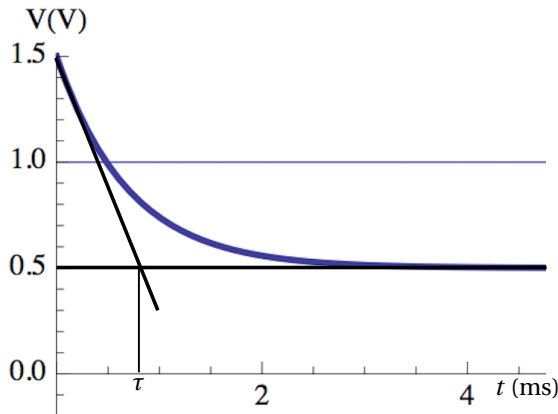
$$(R_1 + R_2)s(t) + R_1 R_2 C \frac{ds}{dt} = R_2 e(t) + R_1 R_2 C \frac{de}{dt}. \quad (7)$$

Le régime continu établi correspond à la solution particulière de l'équation complète (régime établi) quand le cas où $e(t) = E$ (régime continu); cette solution est cherchée de la même nature que le second membre qui est alors une constante, soit

$$(R_1 + R_2)S = R_2 E.$$

On retrouve le résultat précédent.

La valeur de C peut être déterminée en étudiant la phase transitoire de la réponse à un échelon (la période du signal carré est visiblement suffisamment faible pour que le régime établi soit atteint à chaque demi-période).



On lit à partir de la tangente à l'origine $\tau = 0,8$ ms.
Sachant que $R_1 = 10$ k Ω , déterminer R_2 et C . L'équation (7) peut s'écrire

$$\frac{ds}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} s(t) = \frac{de}{dt} + \frac{1}{R_1 C} e(t).$$

La constante de temps est donnée par le membre de gauche, soit

$$\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}.$$

On en déduit

$$C = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tau = \frac{2}{1 \times 10^4} 0,8 \times 10^{-3} = 1,6 \times 10^{-7} \text{ F}$$

soit $C = 160$ nF.

37 — Filtrage de parasites

1. En très basse fréquence, la bobine est équivalente à un court-circuit, d'où $U_s = U_e$.

En très haute fréquence, le condensateur est équivalent à un court-circuit, d'où $U_s = U_e$.

Un filtre passe-haut, passe-bas ou passe-bande doit couper au moins les basses ou les hautes fréquences. Ce filtre n'est donc pas de cette nature.

Notons $\underline{Z}$ et $\underline{Y}$ respectivement l'impédance et l'admittance équivalente à l'association parallèle de L et C .

La structure du pont diviseur de tension permet d'écrire

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + \underline{Z}} = \frac{R \underline{Y}}{1 + R \underline{Y}} = \frac{jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}.$$

On a donc $\underline{H}(j\omega_0) = 0$.

Le filtre coupe une bande de pulsation centrée sur ω_0 (c'est un filtre *coupe-bande* ou *réjecteur de bande*).

2. On veut supprimer la tension parasite de fréquence $f_0 = 50$ Hz. Il faut donc choisir C de telle sorte que

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

soit

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}.$$

On calcule $C = 50,7$ μ F.

3. La fonction de transfert du filtre s'écrit sous la forme canonique

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}.$$

Par identification, le facteur de qualité du filtre est

$$Q = R \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

On souhaite ne supprimer que la fréquence parasite f_0 , sans perturber le reste du signal. Le filtre doit donc être le plus sélectif possible, c'est-à-dire avoir le facteur de qualité le plus grand possible.

Il faut donc choisir la plus grande valeur de R , soit

$$R = 50 \text{ k}\Omega.$$

38 — Étude d'un filtre

Corrigé succinct.

1. Il s'agit du filtre de Wien déjà étudié. On établit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec

$$H_0 = \frac{1}{3}; \quad Q = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

On obtient le diagramme de Bode d'un filtre passe-bande du second-ordre :

- asymptote de pente 20 dB/décade à basse fréquence;
- asymptote de pente 20 dB/décade à haute fréquence.

2. Un signal triangulaire est constitué des harmoniques de fréquences multiples de celle du fondamental (plus précisément, les harmoniques de rang impair).

Si la fréquence centrale du filtre est réglée à $f_0 = 300$ kHz, le filtre laissera passer l'harmonique de rang 3 et coupera les autres composantes. On aura alors une sinusoïde de fréquence 300 kHz.

Il faut donc prendre

$$RC = \frac{1}{2\pi f_0} = \frac{1}{2\pi \times 300 \times 10^3} = 531 \times 10^{-9} \text{ s}.$$

3. Un signal créneau se déduit d'un signal triangulaire par dérivation. Il faut donc se placer dans un domaine de pulsation où on peut considérer

$$\underline{H}(j\omega) \approx \alpha j\omega.$$

Si $\omega \ll \omega_0$, on a

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{3j\omega}{\omega_0}$$

et

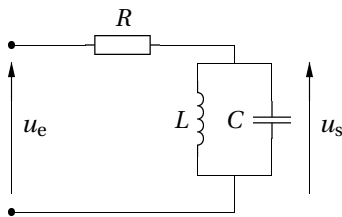
$$s(t) \approx \frac{3}{\omega_0} \frac{de}{dt}.$$

Il faut donc choisir

$$RC \gg \frac{1}{2\pi f} = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^3} = 1,6 \times 10^{-6} \text{ s.}$$

39 — Effet d'un filtre

1. Il faut que D se comporte comme un court-circuit à très basse fréquence (comportement d'une bobine) et à très haute fréquence (comportement d'un condensateur). La structure du filtre est donc



2. Le dipôle D a pour admittance

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}.$$

La fonction de transfert vaut donc

$$\underline{H} = \frac{1/\underline{Y}}{R + 1/\underline{Y}} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}} = \frac{1}{1 + R\left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)}$$

soit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jR\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}.$$

3. La fonction de transfert peut se mettre sous la forme canonique

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

En identifiant

$$\frac{Q}{\omega_0} = RC \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{R}{L}$$

on obtient

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Modifier C permet de fixer la fréquence centrale du filtre passe-bande : le signal comporte deux fréquences $f_a = 1/T_a$ et $f_b = 1/T_b$ que l'on peut ainsi « isoler » pour peu que le filtre soit suffisamment sélectif (ce dont on peut s'assurer en modifiant R qui influe sur le facteur de qualité Q).

Le signal d'entrée se met sous la forme

$$u_e(t) = \frac{e_0}{2} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + \frac{e_0}{2} \cos[(\omega_2 - \omega_1)t].$$

Comme $T_b < T_a$, les deux fréquences filtrées sont

$$\omega_b = \omega_2 + \omega_1 = 2\pi(f_1 + f_2) = \frac{2\pi}{T_b}$$

$$\omega_a = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi(f_2 - f_1) = \frac{2\pi}{T_a}$$

d'où $f_1 = 481 \text{ Hz}$ et $f_2 = 556 \text{ Hz}$.

4. On doit avoir $\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC_a}}$ et $\omega_b = \frac{1}{\sqrt{LC_b}}$, d'où

$$C_a = \frac{T_a^2}{4\pi^2 L} \quad \text{et} \quad C_b = \frac{T_b^2}{4\pi^2 L}.$$

On calcule $C_a = 90,0 \mu\text{F}$ et $C_b = 471 \text{ nF}$.

La résistance R joue sur le facteur de qualité, c'est-à-dire la sélectivité du filtre.

Pour l'expérience (a), on a $G_a(\omega_a) = 1$; on veut donc $G_a(\omega_b) = 0,01$ pour que la pulsation ω_b ne représente que 1 % du signal de sortie. Il faut donc

$$G_a(\omega_b) = \frac{1}{\sqrt{1 + R_a^2 \left(C_a\omega_b - \frac{1}{L\omega_b}\right)^2}} \leq 10^{-2}$$

soit

$$1 + R_a^2 \left(C_a\omega_b - \frac{1}{L\omega_b}\right)^2 \geq 10^4.$$

On considérant $10^4 - 1 \approx 10^4$, on a donc

$$R_a \geq \frac{10^2}{C_a\omega_b - \frac{1}{L\omega_b}}.$$

On calcule $R_a \geq 171 \Omega$.

Pour l'expérience (b), on a $G_b(\omega_b) = 1$; on veut donc $G_b(\omega_a) = 0,01$ pour que la pulsation ω_a ne représente que 1 % du signal de sortie. Il faut donc

$$G_b(\omega_a) = \frac{1}{\sqrt{1 + R_b^2 \left(C_b\omega_a - \frac{1}{L\omega_a}\right)^2}} \leq 10^{-2}.$$

On obtient comme précédemment

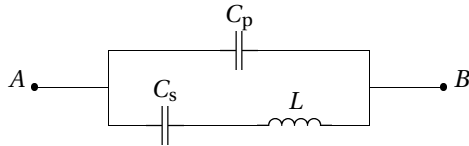
$$R_b \geq \frac{10^2}{\left|C_b\omega_a - \frac{1}{L\omega_a}\right|}.$$

Compte tenu du signe de $L\omega_a - \frac{1}{C_b\omega_a}$, il faut

On calcule $R_b \geq 2,37 \text{ k}\Omega$.

40 — Impédance d'un quartz

En considérant $R = 0$, le quartz est équivalent à



1. Dans la limite des basses fréquences, la bobine est équivalente à un court-circuit; le quartz est donc équivalent à l'association en parallèles des condensateurs C_p et C_s , qui équivaut à un condensateur de capacité $C_{\text{eq,BF}} = C_p + C_s$.

L'impédance vaut donc $Z_{\text{BF}} = \frac{1}{j(C_p + C_s)\omega}$, dont le module vérifie

$$\log Z_{\text{BF}} = -\log \omega - \log(C_p + C_s).$$

Le graphe est une droite de pente -1 , d'ordonnée à l'origine $-\log(C_p + C_s)$.

Dans la limite des hautes fréquences, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert; le quartz est donc équivalent au condensateur C_p , soit

$$Z_{\text{HF}} = \frac{1}{jC_p\omega}.$$

On a donc

$$\log Z_{\text{HF}} = -\log \omega - \log C_p.$$

Le premier graphe est une droite de pente -1 , d'ordonnée à l'origine $-\log C_p$.

Sur le graphe fourni, on constate que les deux droites asymptotiques HF et BF sont parfaitement alignées : elles ont même ordonnée à l'origine. On en déduit

$$-\log(C_p + C_s) \approx -\log C_p,$$

soit $C_s \ll C_p$.

2. Prenons un point particulier sur les asymptotes : pour $f = 10^1$ Hz, on lit $Z = 5 \times 10^9$; on a donc $\log 5 \times 10^9 = -\log(20\pi) - \log C_p$, soit

$$\log C_p = -\log(20\pi) - \log 5 \times 10^9 = \log 3,2 \times 10^{-12}.$$

On a donc $C_p = 3,2 \times 10^{-12}$ F, soit $C_p = 3,2$ pF.

3. L'admittance de l'association série de C_s et L s'écrit

$$\underline{Y}_{C_s+L} = \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}} = \frac{jC_s\omega}{1 - LC_s\omega^2}.$$

L'admittance de l'association en parallèle de C_p et des deux dipôles précédents en série est donc $\underline{Y} = jC_p\omega + \underline{Y}_{C_s+L}$, soit

$$\underline{Y} = jC_p\omega + \frac{jC_s\omega}{1 - LC_s\omega^2}.$$

4. On peut écrire $\underline{Y} = j\omega \frac{C_p(1 - LC_s\omega^2) + C_s}{1 - LC_s\omega^2}$, d'où le module

$$Y = |\underline{Y}| = \omega \frac{|C_p(1 - LC_s\omega^2) + C_s|}{1 - LC_s\omega^2}.$$

La résonance $Y \rightarrow \infty$ se produit pour $1 - LC_s\omega_r^2 = 0$, c'est-à-dire pour la fréquence

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_s}}.$$

L'anti-résonance $Y \rightarrow 0$ se produit pour

$$C_p(1 - LC_s\omega_a^2) + C_s = 0,$$

soit pour la fréquence

$$f_a = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_s}} \sqrt{\frac{C_p + C_s}{C_p}}.$$

5. Nous utilisons le second graphe qui précise les phénomènes de résonance et d'anti-résonance.

Attention : c'est $|\underline{Z}|$ qui est représenté en ordonnée; la résonance définie par $|\underline{Y}| \rightarrow \infty$ se traduit donc ici par $|\underline{Z}| \rightarrow 0$. De même l'anti-résonance se traduit par $|\underline{Z}| \rightarrow \infty$.

On lit donc $f_r = 33\,114$ Hz et $f_a = 33\,125$ Hz. D'après les expressions de la question précédente, on obtient

$$\frac{f_a}{f_r} = \sqrt{1 + \frac{C_s}{C_p}},$$

d'où $C_s = C_p \left(\frac{f_a^2}{f_r^2} - 1 \right) = \left(\frac{33\,125^2}{33\,114^2} - 1 \right) \times 3,2 \times 10^{-12}$, soit

$$C_s = 2,12 \times 10^{-15} \text{ F}.$$

L'impédance est donnée par

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 C_s} = \frac{1}{4\pi^2 (f_a^2 - f_r^2) C_p}.$$

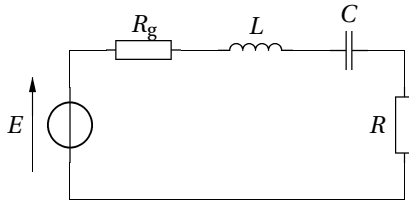
On calcule $L = 10,9 \times 10^3$ H.

➤ Cette valeur est très élevée! Il ne s'agit en fait pas de l'impédance d'une « vraie » bobine, mais de la modélisation (par une bobine) du caractère inductif des propriétés électro-mécaniques du quartz (l'impédance L prend en compte des propriétés mécaniques; on parle d'impédance motionnelle).

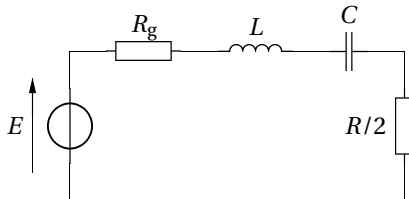
41 — Étude d'un circuit

1. L'association de deux résistance R en parallèle équivalent à une résistance $R/2$, on peut représenter les deux circuits étudiés :

Circuit A :



Circuit B :



Par un examen de l'équivalent en très basse fréquence et en très haute fréquence du circuit RLC s'écrit, on obtient la nature du filtrage effectué en fonction du dipôle aux bornes duquel on prend la tension :

filtre passe-bas tension aux bornes de C ;

filtre passe-bande tension aux bornes de R ;

filtre passe-haut tension aux bornes de L .

Les courbes ① et ② correspondent à un filtre passe-bande : elle représentent la tension aux bornes de la résistance.

Les courbes ③ et ④ correspondent à un filtre passe-bas : elle représentent la tension aux bornes du condensateur.

Tension aux bornes de la résistance pour le circuit A :

$$\underline{U}_{R,A} = \frac{R}{R + R_g + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} E.$$

Tension aux bornes de la résistance pour le circuit B :

$$\underline{U}_{R,B} = \frac{R/2}{R/2 + R_g + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} E.$$

La résonance se produit quand $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$. On a alors

$$U_{R,A,\max} = \frac{R}{R + R_g} E \quad \text{et} \quad U_{R,B,\max} = \frac{R}{R + 2R_g} E.$$

On constate que $U_{R,B,\max} < U_{R,A,\max}$, ce qui permet d'identifier ces courbes.

courbe ① : U_R , circuit A
courbe ② : U_R , circuit B

Tension aux bornes du condensateur pour le circuit A :

$$\underline{U}_{C,A} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + R_g + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} E$$

soit

$$\underline{U}_{C,A} = \frac{1}{1 + j(R + R_g)\omega - LC\omega^2} E.$$

L'amplitude de la tension vaut

$$|\underline{U}_{C,A}| = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (R + R_g)^2 C^2 \omega^2}}.$$

Elle présente un maximum (résonance) si le dénominateur passe par un minimum, c'est-à-dire si

$$f(\omega) = (1 - LC\omega^2)^2 + (R + R_g)^2 C^2 \omega^2$$

passe par un minimum, soit $f'(\omega_r) = 0$.

$$f'(\omega) = -2(1 - LC\omega^2)2LC\omega + 2(R + R_g)^2 C^2 \omega = 0.$$

On a $f'(\omega_r) = 0$ avec $\omega_r \neq 0$ pour

$$-2L(1 - LC\omega_r^2) + (R + R_g)^2 C = 0$$

soit

$$LC\omega_r^2 = 1 - \frac{(R + R_g)^2 C}{2L}. \quad (8)$$

Comme $LC\omega_r^2 > 0$, il faut

$$1 - \frac{(R + R_g)^2 C}{2L} > 0$$

soit

$$R + R_g < \sqrt{\frac{2L}{C}}.$$

Si la résistance du circuit est trop élevée, on n'observe pas de résonance.

On constate qu'il y a résonance pour la courbe ③ mais pas pour la courbe ④.

Comme la résistance du circuit A est supérieure à celle du circuit B, on en déduit l'identification des courbes.

courbe ③ : U_C , circuit B
courbe ④ : U_C , circuit A

2. Pour $\omega = 0$, on a $\underline{U}_C = E$ pour les deux circuits. On lit directement

$$E = 15 \text{ V}.$$

Pour $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$, la tension de résonance aux bornes de R pour le circuit A est

$$U_{R,A,\max} = \frac{R}{R + R_g} E.$$

L'impédance du circuit vaut

$$\underline{Z} = R + R_g + j\left(L\omega - \frac{1}{\omega}\right).$$

À la pulsation de résonance ω_0 , elle vaut $\underline{Z}_0 = R + R_g$, d'où, l'intensité étant maximale

$$E = (R + R_g) i_{\max}.$$

On a donc

$$U_{R,A,\max} = Ri_{\max}.$$

On mesure $U_{R,A,\max} = 10 \text{ V}$, d'où

$$R = 100 \text{ V}.$$

Avec $E = 15 \text{ V}$, on déduit

$$\frac{R}{R + R_g} = \frac{U_{R,A,\max}}{E} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

d'où $R_g = R/2$. On a donc

$$R_g = 50 \text{ } \Omega.$$

► On retrouve la valeur usuelle de la résistance interne d'un GBF.

On a vu que la résonance aux bornes de la résistance se produit pour

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

soit pour la fréquence

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

On a montré que la résonance aux bornes du condensateur se produit dans le cas du circuit B, pour une pulsation donnée par la relation (8) en remplaçant R par $R/2$, soit

$$LC\omega_r^2 = 1 - \frac{(R/2 + R_g)^2 C}{2L}$$

soit

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{(R/2 + R_g)^2}{2L^2} = \omega_0^2 - \frac{(R/2 + R_g)^2}{2L^2}.$$

On en déduit

$$L^2 = \frac{(R/2 + R_g)^2}{2(\omega_0^2 - \omega_r^2)} = \frac{(R/2 + R_g)^2}{2 \times 4\pi^2(f_0^2 - f_r^2)},$$

d'où

$$L = \frac{R + 2R_g}{4\sqrt{2}\pi\sqrt{f_0^2 - f_r^2}}.$$

On mesure sur le document $f_0 = 158 \text{ Hz}$ et $f_r = 112 \text{ Hz}$, d'où

$$L = 100 \text{ mH}.$$

La capacité se déduit de

$$\omega_0^2 = 4\pi^2 f_0^2 = \frac{1}{LC}$$

d'où

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}.$$

On calcule

$$C = 10,0 \text{ } \mu\text{F}.$$

3. On peut réaliser un filtre passe-haut en considérant la tension aux bornes de la bobine.

On a alors

$$\underline{U}_L = \frac{jL\omega}{R + R_g + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} E$$

soit

$$\underline{U}_L = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + j(R + R_g)C\omega} E.$$

La fonction de transfert est donc

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + j(R + R_g)C\omega}.$$

Très basses fréquences

$$\underline{H}_{BF}(j\omega) \approx -LC\omega^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

Le gain est $G_{BF}(\omega) = \omega^2/\omega_0^2$, d'où l'asymptote

$$G_{dB,BF} = 40 \log \omega - 40 \log \omega_0,$$

qui présente une pente de +40 dB/décade.

La phase est $\varphi_{BF} = \pi$.

Très hautes fréquences On a $\underline{H}_{HF}(j\omega) \approx 1$, donc $G_{dB,HF} = 0$.

Les asymptotes en gain se coupent en $\omega = \omega_0$.

La phase est $\varphi_{HF} = 0$.

On remarque que pour $\omega = \omega_0$, on a

$$\underline{H}(j\omega_0) = -\frac{1}{j(R + R_g)C\omega_0} = \frac{j}{(R + R_g)C\omega_0},$$

soit $\varphi(\omega_0) = \pi/2$.

Diagramme asymptotique en gain :

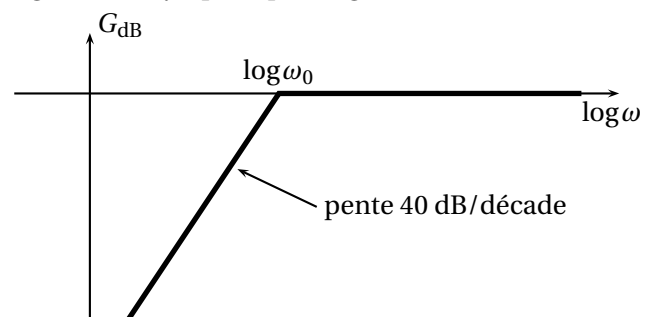
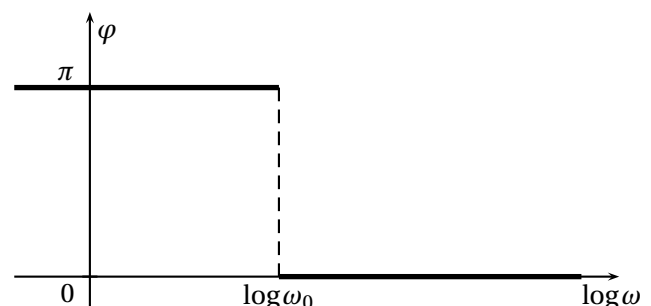


Diagramme asymptotique en phase :



42 — Impédance d'un quartz

1. L'impédance complexe uniquement de la branche comportant les trois composants R_s , C_s et L vaut

$$\underline{Z}_s = R_s + jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}.$$

L'intensité dans cette branche est donnée par

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R_s + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}.$$

On observe une résonance en intensité quand $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$, soit pour

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_s}}.$$

On calcule $\omega_s = 205,85 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. La capacité équivalente à la mise en série de C_s et de C_p est $C_{sp} = \frac{C_s C_p}{C_s + p} = 2,0696 \text{ fF}$.

La pulsation de résonance $\omega_p = 1/\sqrt{LC_{sp}}$ vaut alors

$$\omega_p = 205,92 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

En terme de fréquence :

$$f_s = 32762 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_p = 32773 \text{ Hz}.$$

On a $f_0 = 32768 \text{ Hz}$. On a donc

$$f_s < f_0 < f_p.$$

Les fréquences f_s et f_p sont très proches, d'où la nécessité de donner les valeurs avec 5 chiffres significatifs.

3. Pour le quartz, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}} &= jC_p\omega + \frac{1}{R_s + jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}} \\ &= \frac{j(C_p + C_s)\omega + jC_p\omega(jR_sC_s\omega - LC_s\omega^2)}{1 + jR_sC_s\omega - LC_s\omega^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1 + jR_sC_s\omega - LC_s\omega^2}{j(C_p + C_s)\omega + jC_p\omega(jR_sC_s\omega - LC_s\omega^2)} \\ &= \frac{1}{j(C_p + C_s)\omega} \frac{1 + jR_sC_s\omega - LC_s\omega^2}{1 + jR_s\frac{C_pC_s}{C_p + C_s}\omega - \frac{LC_sC_p}{C_p + C_s}\omega^2}. \end{aligned}$$

Par identification avec l'expression proposée, on obtient

$$C_{\text{éq}} = C_p + C_s; \quad \omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_s}} \quad \text{et} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{C_p + C_s}{LC_pC_s}}.$$

On a alors

$$2 \frac{m_1}{\omega_s = R_s C_s}$$

d'où

$$m_1 = \frac{R_s}{2} \sqrt{\frac{C_s}{L}}$$

et

$$\frac{2m_2}{\omega_p} = \frac{C_p C_s}{C_p + C_s} R_s$$

d'où

$$m_2 = \frac{R_s}{2} \sqrt{\frac{C_p C_s}{L(C_p + C_s)}}.$$

On calcule $C_{\text{éq}} = 3,054 \text{ pF}$, soit $C_{\text{éq}} \approx C_p$.

On a $m_2 \approx m_1 = 6,00879 \times 10^{-6}$. On remarque que $m_1 \ll 1$ et $m_2 \ll 1$: la résonance est très aiguë, ce qui justifie l'emploi des quartz en horlogerie où l'on veut une fréquence déterminée avec précision.