

Complément mathématique

Différentielle

1 — Fonction d'une variable

1.1 Développement limité et différentielle

Un développement limité d'une fonction en un point est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point.

- En physique, on confond souvent une fonction à son approximation polynomiale d'ordre un : on dit qu'on *linéarise* l'expression.

Théorème de Taylor-Young

Soit f une fonction réelle de la variable x , de classe $\mathcal{C}^n$ sur un domaine $\mathcal{D}$.

Au voisinage de $x \in \mathcal{D}$, on peut écrire

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + o(h^n)$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$.

La **différentielle** d'ordre un de la fonction f en x est la partie linéaire de l'accroissement de cette fonction entre x et $x+h$.

Avec la notation de Leibniz¹, l'accroissement infinitésimal de $f(x)$ pour une variation infinitésimale dx de la variation x s'écrit

$$df = f'(x) dx.$$

- On peut alors écrire la dérivée de f en x selon la notation de Leibniz : $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

2 — Fonction de plusieurs variables

On appelle fonction réelle de n variables indépendantes réelles l'application

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

2.1 Dérivée partielle

La dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables est sa dérivée par rapport à une variable, les autres variables étant maintenues constantes :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_j \neq i} (x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}.$$

- Le symbol ∂ se lit « dé rond ».
- Pour une fonction de deux variable $f(x, y)$, ses dérivées partielles sont $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y (x, y)$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x (x, y)$.
- Pour alléger la notation, quand il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra noter simplement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

1. La notation de Leibniz consiste en l'usage des notations « d droit » suivie d'une quantité x pour représenter une variation infinitésimale de x , soit dx .

2.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Dans le cas d'une fonction de deux variables $f(x, y)$, ses dérivées partielles d'ordre deux sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

2.3 Théorème de Schwarz

Si une fonction de deux variables $f(x, y)$ admet des dérivées partielles continues $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, alors les dérivées partielles secondes croisées sont égales :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

- Ce théorème se généralise à une fonction de n variables : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
- Le résultat de la dérivation partielle à l'ordre deux par rapport à deux variables ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation par rapport à ces deux variables.

2.4 Différentielle

Soit f une fonction à n variables réelles. Sa différentielle au point $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est définie par

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_j \neq i} (x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i$$

- La différentielle df représente l'accroissement infinitésimal de la fonction f au point considéré quand chaque variable x_i subit une variation infinitésimale dx_i .
- Dans le cas d'une fonction de deux variables, on écrit $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y (x, y) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x (x, y) dy$.

2.5 Complément(*) : forme différentielle

On appelle *forme différentielle* à deux variables x et y une expression de la forme $\delta\Omega(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, où P et Q sont deux fonctions des variables x et y .

- On généralise la définition d'une forme différentielle à n variables : $\delta\Omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$.

Exemple : le travail élémentaire d'un champ de force est une forme différentielle; il est donné par sa circulation $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz$ en coordonnées cartésiennes.

Une forme différentielle est une différentielle exacte s'il existe une fonction dont elle est la différentielle; on peut alors écrire $\delta\Omega = df$.

La forme différentielle $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ est une différentielle exacte si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

On a alors $df = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$; avec l'écriture générale de la différentielle $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, on identifie $P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$. Le théorème de Schwarz s'écrit alors $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

- Dans l'exemple précédent du travail de $\vec{F}$, c'est une différentielle exacte si il existe une fonction $E_p(x, y, z)$ telle que $\delta W = -dE_p$: la force est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle
- Une différentielle exacte est vue comme une petite variation, tandis qu'une forme différentielle est vue comme une petite quantité, d'où les notations respectives « d » et « δ » que l'on utilisera à bon escient.

2. Le signe - s'explique par l'interprétation énergétique de E_p .