

TD d'électronique n° 5

Modulation, démodulation

2 — Modulateur AM

1. Le signal modulé s'écrit

$$\begin{aligned}
 s(t) &= 0,5[A + B \cos(\omega t)] \cos(\omega_0 t) \\
 &= 0,5A \left[1 + \frac{B}{A} \cos(\omega t) \right] \cos(\omega_0 t) \\
 &= A_p [1 + m \cos(\omega t)] \cos(\omega_0 t),
 \end{aligned}$$

avec

$$m = B/A \quad \text{et} \quad A_p = 0,5A.$$

2. Il n'y a pas surmodulation car l'enveloppe supérieure ne s'annule jamais. En lisant ses extrema, on a

$$A_p[1 - m] = 0,5 \quad \text{et} \quad A_p[1 + m] = 1,5.$$

On a donc

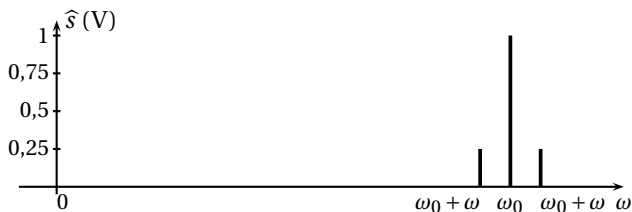
$$\frac{1 - m}{1 + m} = \frac{1,5}{0,5} = 3$$

d'où $m = 0,5$. On en déduit $A_p = 1 \text{ V}$.On a alors $A = 2 \text{ V}$ et $B = 1 \text{ V}$.

3. On linéarise l'expression du signal modulé :

$$s(t) = A_p \cos(\omega_0 t) + \frac{mA_p}{2} \cos[(\omega_0 + \omega)t] + \frac{mA_p}{2} \cos[(\omega_0 - \omega)t].$$

On en déduit son spectre :



3 — Efficacité de la modulation d'amplitude

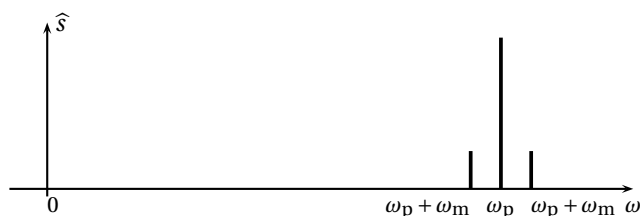
3.1 Modulation à porteuse transmise

1. Le signal modulé s'écrit

$$\begin{aligned}
 s(t) &= [1 + k A_m \cos(\omega_m t)] A_p \cos(\omega_p t) \\
 &= A_p [1 + m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t).
 \end{aligned}$$

L'indice de modulation vaut $m = k A_m$.

2. Se reporter au cours ou à l'exercice précédent.



On parle de modulation à porteuse transmise car la pulsation de la porteuse est présente dans le spectre du signal modulé.

3. Soit $u(t) = U \cos(\omega t)$ une tension sinusoïdale. La puissance moyenne reçue par une résistance R est

$$P = \langle u(t)i(t) \rangle = \left\langle \frac{u^2(t)}{R} \right\rangle = \frac{\langle U^2 \cos^2(\omega t) \rangle}{R} = \frac{U^2}{2R}.$$

4. Le signal modulé s'écrit

$$s(t) = A_p [1 + m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t)$$

soit après linéarisation

$$s(t) = A_p \cos(\omega_p t) + \frac{mA_p}{2} \cos[(\omega_p - \omega_m)t] + \frac{mA_p}{2} \cos[(\omega_p + \omega_m)t].$$

La puissance totale émise par l'antenne vaut donc

$$P_{\text{tot}} = \frac{A_p^2}{2R_{\text{ant}}} + \frac{m^2 A_p^2}{8R_{\text{ant}}} + \frac{m^2 A_p^2}{8R_{\text{ant}}}$$

soit

$$P_{\text{tot}} = \frac{A_p^2}{2R_{\text{ant}}} + \frac{m^2 A_p^2}{4R_{\text{ant}}}.$$

La puissance moyenne émise par la porteuse est

$$P_p = \frac{A_p^2}{2R_{\text{ant}}}.$$

La puissance émise par chaque fréquence latérale du spectre est

$$P_{\text{sp}} = \frac{1}{2R_{\text{ant}}} \left(\frac{mA_p}{2} \right)^2 \quad \text{soit} \quad P_{\text{sp}} = \frac{m^2 A_p^2}{8R_{\text{ant}}}.$$

L'efficacité Γ est définie comme le rapport entre la puissance transportée par les deux bandes latérales, qui portent l'information, et la puissance transportée par la porteuse.

On a

$$\Gamma = \frac{\frac{m^2 A_p^2}{4R_{\text{ant}}}}{\frac{A_p^2}{2R_{\text{ant}}} + \frac{m^2 A_p^2}{4R_{\text{ant}}}} = \frac{\frac{m^2}{4}}{\frac{1}{2} + m^2}$$

$$\text{soit} \quad \Gamma = \frac{m^2}{2 + m^2}.$$

indice de modulation m	50 %	100 %
efficacité de la modulation Γ	0,11	0,33

Pour un indice de modulation de 100 %, la porteuse représente 2/3 de la puissance totale fournie à l'antenne.

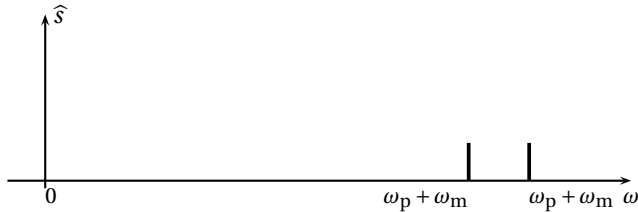
3.2 Modulation à suppression de porteuse

5. On linéarise :

$$\begin{aligned} s(t) &= k A_m A_p \cos(\omega_m t) \cos(\omega_p t) \\ &= \frac{k A_m A_p}{2} \cos[(\omega_p - \omega_m)t] + \frac{k A_m A_p}{2} \cos[(\omega_p + \omega_m)t] \\ &= \frac{m A_p}{2} \cos[(\omega_p - \omega_m)t] + \frac{m A_p}{2} \cos[(\omega_p + \omega_m)t] \end{aligned}$$

en notant $m = k A_m$ (par analogie avec la partie précédente).

On en déduit le spectre :



La pulsation de la porteuse ω_p est absente : on parle de modulation à porteuse supprimée.

6. La puissance totale se limite à la puissance portée par chaque raie latérale :

$$P_{\text{tot}} = 2P_{\text{sb}} = 2 \times \frac{m^2 A_p^2}{8R_{\text{ant}}}.$$

L'efficacité de cette modulation vaut alors

$$\Gamma = \frac{2P_{\text{sb}}}{P_{\text{tot}}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Gamma = 100 \%}.$$

4 — Modulation BLU

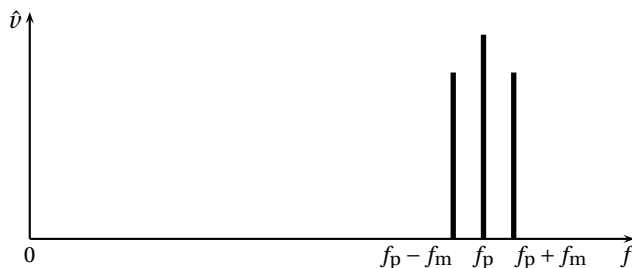
1. En sortie du multiplieur, on a le signal

$$\begin{aligned} s(t) &= k V_m V_p \cos(\omega_m t) \cos \omega_p t \\ &= \frac{k V_m V_p}{2} [\cos[(\omega_p + \omega_m)t] + \cos(\omega_p - \omega_m)t]. \end{aligned}$$

On en déduit le signal en sortie du sommateur :

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{k V_m V_p}{2} [\cos[(\omega_p + \omega_m)t] + \cos(\omega_p - \omega_m)t] \\ &\quad + V_p \cos(\omega_p t). \end{aligned}$$

Son spectre en fréquence est donc



avec $f_p = 500$ kHz, $f_p + f_m = 500,2$ kHz et $f_p - f_m = 499,8$ kHz. Le filtre passe-haut de fréquence de coupure $f_c = 500,1$ kHz ne laisse passer que la fréquence la plus élevée. On a donc en sortie le signal

$$V(t) = \frac{k V_m V_p}{2} \cos[(\omega_p + \omega_m)t]$$

de spectre



➤ On parle de modulation à bande latérale unique car le spectre ne comporte plus la porteuse, et ne comporte que la bande latérale supérieure du spectre de $v(t)$.

Multiplions ce signal par la porteuse :

$$\begin{aligned} w(t) &= V(t) v_p(t) = \frac{k V_m V_p^2}{2} \cos[(\omega_p + \omega_m)t] \cos(\omega_p t) \\ &= \frac{k V_m V_p^2}{4} [\cos[(2\omega_p + \omega_m)t] + \cos(\omega_m t)]. \end{aligned}$$

On peut retrouver le signal informatif à l'aide d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure f'_c telle que

$$f_m \ll f'_c \ll 2f_p + f_c$$

ce qui est tout à fait réalisable car $f_m = 20$ kHz au plus, et $2f_p + f_m = 1000,2$ kHz.

5 — Démodulation

2. 1. La fréquence de la porteuse est f_p , celle du signal modulant f_m .

L'ordre de grandeur de f_m est le kilohertz, celui de f_p la centaine de kilohertz.

2. Le signal modulé s'écrit

$$s(t) = A \cos(2\pi f_p t) + m A \cos(2\pi f_p t) \cos(2\pi f_m t).$$

À partir du signal $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ et de la porteuse $p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$, un multiplieur et un sommateur permettent de réaliser

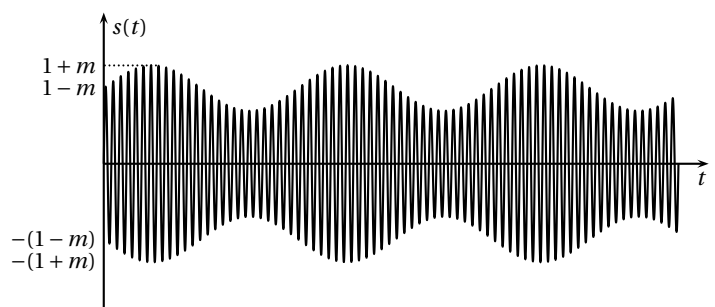
$$\begin{aligned} s(t) &= k e(t) p(t) + p(t) = k A_m A_p \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_p t) \\ &\quad + A_p \cos(2\pi f_p t) \end{aligned}$$

soit

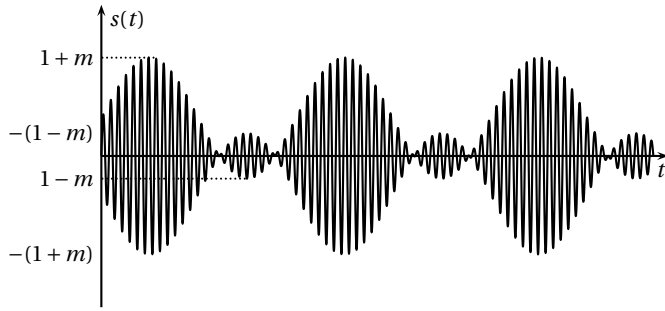
$$s(t) = A_p [1 + k A_m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_p t).$$

On réalise bien une modulation d'amplitude, avec un taux de modulation $m = k A_m$.

3. Pour $m < 1$, on a



Si $m > 1$, on a $1 - m < 0$ et $-(1 - m) > 0$; on observe une **sur-modulation** :



Donner le graphe du signal $s(t)$ pour $m < 1$. Que se passe-t-il si $m > 1$?

4. On développe

$$s(t) = A \cos(2\pi f_p t) + \frac{mA}{2} [\cos(2\pi(f_p + f_m)t) + \cos(2\pi(f_p - f_m)t)]$$

d'où le spectre



5. À la sortie du multiplicateur on a le signal

$$s'(t) = \frac{A^2}{2} + \frac{mA^2}{2} \cos(2\pi f_p t) + \frac{mA^2}{4} \cos[2\pi(2f_p + f_m)t] + \frac{mA^2}{4} \cos(2\pi f_m t) + \frac{mA^2}{4} \cos[2\pi(2f_p - f_m)t] + \frac{mA^2}{4} \cos(2\pi f_m t)$$

soit par ordre croissant des fréquences

$$s'(t) = \frac{A^2}{2} + \frac{mA^2}{2} \cos(2\pi f_m t) + \frac{mA^2}{4} \cos[2\pi(2f_p - f_m)t] + \frac{mA^2}{2} \cos(2\pi f_p t) + \frac{mA^2}{4} \cos[2\pi(2f_p + f_m)t]$$

Se reporter au cours pour le spectre.

6.a) On a

$$s''(t) = \frac{A^2}{2} + \frac{mA^2}{2} \cos(2\pi f_m t) .$$

6.b) Le condensateur C' sert à supprimer la composante continue. On a alors

$$d(t) = \frac{mA^2}{2} \cos(2\pi f_m t) .$$

6.c) À la sortie du filtre 2 on a la composante continue

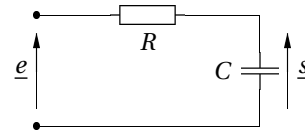
$$a(t) = \frac{A^2}{2} .$$

6.d) Le signal variable donne la fréquence f_m du signal à transmettre.

Le rapport des amplitudes des signaux $d(t)$ et $a(t)$ donne $m = kA_m$, ce qui donne accès à l'amplitude A_m du signal à transmettre (la constante k est une donnée connue d'un multiplicateur).

6 — Mesure d'impédance

1. Filtre passe-bas du premier ordre :



Fonction de transfert

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} .$$

La fréquence de coupure est

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} .$$

On peut réaliser $f_c = 100$ Hz en prenant $C = 100$ nF et $R = 16$ kΩ.

2. Notons $\underline{v}$ la tension en sortie de l'ALL. On a

$$\underline{v} = -\frac{Z}{R_0} \underline{u} .$$

On peut décomposer l'impédance selon

$$\underline{Z} = R + jX ,$$

d'où

$$\underline{v}(t) = -\frac{R}{R_0} \underline{u}(t) - j\frac{X}{R_0} \underline{u}(t)$$

avec $\underline{u}(t) = U_m e^{j\omega_e t}$ où $\omega_e = 2\pi f_e$, soit

$$\underline{v}(t) = -\frac{R}{R_0} U_m e^{j\omega_e t} + \frac{X}{R_0} U_m e^{j(\omega_e t - \pi/2)} .$$

Le multiplicateur étant un opérateur non linéaire, on ne peut plus utiliser la notation complexe. On a $v(t) = \text{Re}(\underline{v}(t))$, soit

$$v(t) = -\frac{R}{R_0} U_m \cos(\omega_e t) + \frac{X}{R_0} U_m \sin(\omega_e t) .$$

La tension en sortie du multiplicateur est alors

$$p(t) = v(t)u(t) = -\frac{R}{R_0} U_m^2 \cos^2(\omega_e t) + \frac{X}{R_0} U_m^2 \sin(\omega_e t) \cos(\omega_e t)$$

soit

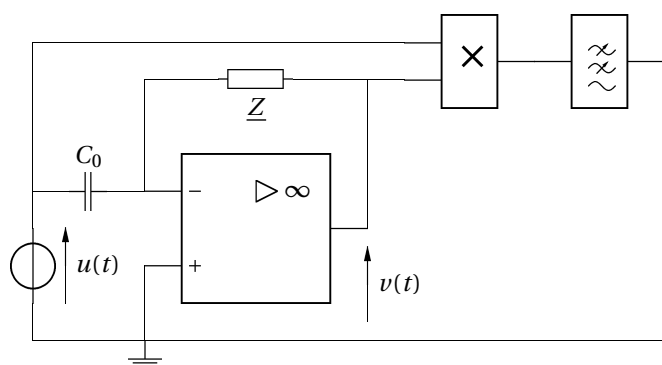
$$p(t) = -\frac{RU_m^2}{2R_0} - \frac{RU_m^2}{2R_0} \cos(2\omega_e t) + \frac{XU_m^2}{2R_0} \sin(2\omega_e t) .$$

La fréquence de coupure du filtre passe-bas est bien inférieure à $2f_e$; on en déduit

$$s(t) = -\frac{RU_m^2}{2R_0} .$$

On a ainsi accès à R , partie réelle de $\underline{Z}$.

3. Pour avoir accès à la partie imaginaire de $\underline{Z}$, on peut remplacer R_0 par un condensateur C_0 :



La tension en sortie de l'ALI est alors

$$\underline{v} = -\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_C} \underline{u} = -jC\omega_e \underline{Z} \underline{u} = -jC\omega_e R U_m e^{j\omega_e t} + C\omega_e X e^{j\omega_e t}$$

$$v(t) = C\omega_e R U_m \sin(\omega_e t) + C\omega_e X U_m \cos(\omega_e t).$$

On a alors en sortie du multiplieur

$$p(t) = C\omega_e R U_m^2 \sin(\omega_e t) \cos(\omega_e t) + C\omega_e X U_m^2 \cos^2(\omega_e t)$$

$$s(t)$$

Par un calcul similaire à précédemment, on en déduit la tension en sortie du filtre passe-bas :

$$s(t) = \frac{C\omega_e U_m^2}{2} X$$

qui donne accès à X , partie imaginaire de $\underline{Z}$.