

DM n° 2

Solution

Partie I — Modulation (EA3 PC)

1 — Modulation d'amplitude

1. En sortie du multiplieur, on a

$$v_{s1}(t) = kU_0U_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_p t).$$

En sortie de l'additionneur, on a

$$v_s(t) = kU_0U_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_p t) + U_0 \cos(\omega_p t) \\ U_0 \cos(\omega_p t) [1 + kU_m \cos(\omega_m t)],$$

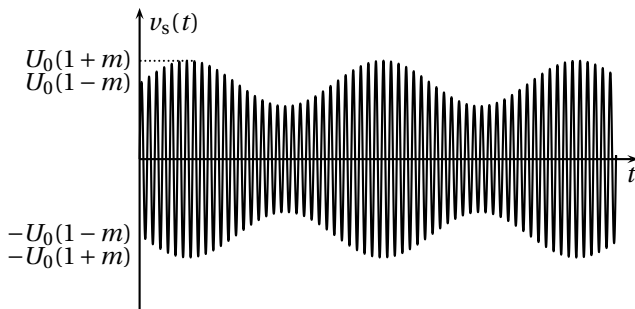
expression de la forme

$$v_s = U_0 \cos(\omega_p t) [1 + m \cos(\omega_m t)]$$

avec

$$m = kU_m.$$

2. Allure de la tension $v_s(t)$:



2 — Modulation de phase — Méthode d'Armstrong

3. En utilisant la formule trigonométrique

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

on peut écrire

$$v_p(t) = U_0 \cos[\omega_p t + m \cos(\omega_m t)] \\ = U_0 \cos(\omega_p t) \cos[m \cos(\omega_m t)] \\ - U_0 \sin(\omega_p t) \sin[m \cos(\omega_m t)]$$

Comme $m \ll 1$, on a

$$\cos[m \cos(\omega_m t)] \approx 1$$

et on peut linéariser

$$\sin[m \cos(\omega_m t)] \approx m \cos(\omega_m t),$$

d'où

$$v_p(t) \approx U_0 \cos(\omega_p t) - mU_0 \cos(\omega_m t) \cos(\omega_p t).$$

On a donc

$$v_p(t) \approx U_0 \cos(\omega_p t) + f(t) \sin(\omega_p t)$$

avec

$$f(t) = -mU_0 \cos(\omega_m t).$$

4. Comme $u_2(t) = U_0 \cos(\omega_p t)$, on peut écrire en remplaçant m par son expression (question 1)

$$v_p(t) = u_2(t) - kU_m U_0 \cos(\omega_m t) \sin(\omega_p t),$$

soit

$$v_p(t) = u_2(t) - k u_1(t) U_0 \sin(\omega_p t).$$

D'après le schéma du modulateur, on a

$$v_p(t) = u_2(t) + k u_1(t) u_2'(t).$$

L'opérateur « Dp », qui reçoit en entrée la tension

$$u_2(t) = U_0 \cos(\omega_p t)$$

doit donc fournir en sortie la tension

$$u_2'(t) = -U_0 \sin(\omega_p t)$$

soit

$$u_2'(t) = U_0 \cos(\omega_p t + \pi/2) = u_2(t + \pi/2).$$

L'opérateur « Dp » introduit donc un déphasage de $+\pi/2$.

3 — Réalisation de l'opérateur « Dp »

5. L'ALI fonctionnant en régime linéaire, on a

$$\underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0.$$

La loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse s'écrit

$$\frac{\underline{u}_e - \underline{V}_-}{R_1} + \frac{\underline{u}_s - \underline{V}_-}{R_1} = 0$$

soit $\underline{u}_e + \underline{u}_s = 0$.

On a donc $\underline{u}_s = -\underline{u}_e$.

L'ensemble formé de l'ALI 1 et les deux résistances identiques de valeur R_1 est donc un **inverseur**.

6. Par la formule du pont diviseur de tension, on peut écrire pour l'ALI 2

$$\underline{V}_+ = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{u}_1 = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{u}_1.$$

La loi des nœuds en terme de potentiel appliquée à l'entrée inverseur de l'ALI 2 donne

$$\frac{\underline{u}_1 - \underline{V}_-}{R} + \frac{\underline{u}_s - \underline{V}_-}{R} = 0,$$

d'où comme l'ALI est en régime linéaire

$$\underline{V}_+ = \underline{V}_- = \frac{\underline{u}_1 + \underline{u}_s}{2}.$$

On a donc

$$\frac{\underline{u}_1 + \underline{u}_s}{2} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{u}_1$$

soit

$$\underline{u}_s + jRC\omega \underline{u}_s = \underline{u}_1 - jRC\omega \underline{u}_1$$

d'où

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_1} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$$

La fonction globale du montage est donc

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$$

7. On a $|\underline{H}(j\omega)| = 1$: le montage ne modifie pas l'amplitude du signal d'entrée; c'est un **passe-tout déphaseur**.

Le déphasage entre l'entrée et la sortie est donné par

$$\varphi_D = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg(-1) + \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega)$$

soit

$$\varphi_D = \pi - 2 \arctan(RC\omega).$$

8. On veut que le montage introduise un déphasage

$$\varphi_D = \frac{\pi}{2} = \pi - 2 \arctan(RC\omega_p)$$

soit

$$\arctan(RC\omega_p) = \frac{\pi}{4}.$$

Il faut donc choisir $RC\omega_p = 1$, soit

$$RC = \frac{1}{\omega_p}.$$

Partie II — Utilisation de panneaux solaires : conversion de puissance (Centrale PSI)

1 — Préliminaire

1. L'association série de V_s et de la bobine se comporte comme une **source de courant** (la bobine impose la continuité du courant).

L'association parallèle de R et du condensateur se comporte comme une **source de tension** (le condensateur impose la continuité de la tension).

2. Si les deux interrupteurs sont fermés, le condensateur est en court-circuit, ce qui revient à court-circuiter une source de tension : c'est interdit.

Si les deux interrupteurs sont ouverts, la bobine est en circuit ouvert, ce qui revient à mettre une source de courant en circuit ouvert : c'est interdit.

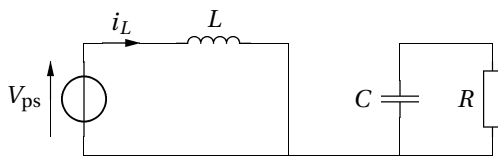
2 — Phase active $0 \leq t < \alpha T$

3. Le transistor étant fermé, on a $v_{T_r} = 0$. La loi des mailles conduit donc à $v_s + v_D = 0$, d'où

$$v_D = -v_s < 0.$$

Comme $v_D < 0$, la diode est bloquée.

Le schéma électrique équivalent est donc



4. La loi des mailles (mailles du générateur) s'écrit

$$V_{ps} = L \frac{di_L}{dt},$$

d'où comme $i_L(t=0) = i_{L,\min}$

$$i_L(t) = \frac{V_{ps}}{L} t + i_{L,\min}. \quad (1)$$

5. Le temps caractéristique associé à l'ensemble résistance-condensateur est

$$\tau = RC.$$

La tension v_s , qui varie avec le temps caractéristique τ , doit très peu varier pendant les phases de fonctionnement du montage, soit

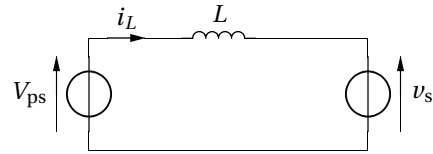
$$\tau \gg T.$$

On en déduit la condition

$$C \gg \frac{T}{R}.$$

3 — Phase de roue libre $\alpha T \leq t < T$

6. Durant la phase de roue libre, la diode est passante et le transistor bloqué; le schéma équivalent au circuit est donc



7. La loi des mailles s'écrit

$$v_s + L \frac{di_L}{dt} - V_{ps} = 0.$$

Avec $i_L(t = \alpha T) = i_{L,\max}$, on en déduit

$$i_L(t) = \frac{V_{ps} - v_s}{L} (t - \alpha T) + i_{L,\max}. \quad (2)$$

4 — Valeurs moyennes sur une période

8. Écrivons que $i_L(t = \alpha T) = i_{L,\max}$ à partir de l'équation (1) :

$$i_{L,\max} = \frac{V_{ps}}{L} \alpha T + i_{L,\min},$$

d'où

$$i_{L,\max} - i_{L,\min} = \frac{V_{ps}}{L} \alpha T. \quad (3)$$

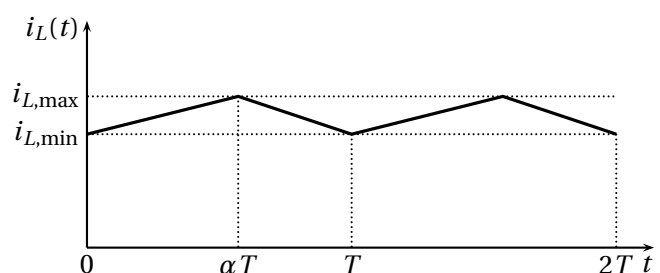
En régime périodique établi, on a $i_L(t = 0) = i_{L,\min}$, d'où $i_L(t = T) = i_{L,\min}$ à partir de l'équation (2) :

$$i_{L,\min} = \frac{V_{ps} - v_s}{L} (1 - \alpha) T + i_{L,\max},$$

d'où

$$i_{L,\max} - i_{L,\min} = \frac{v_s - V_{ps}}{L} (1 - \alpha) T. \quad (4)$$

9. L'intensité $i_L(t)$ est affine par morceaux, croissante pendant la phase active et décroissante pendant la phase de roue libre, d'où



10. On a $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$, d'où $\langle v_L(t) \rangle = L \langle \frac{di_L(t)}{dt} \rangle$.

Comme $i_L(t)$ est périodique, on a

$$\left\langle \frac{di_L(t)}{dt} \right\rangle = 0$$

d'où

$$\langle v_L(t) \rangle = 0.$$

Comme on néglige l'ondulation de tension, on a $\langle v_s \rangle = v_s$.

D'après (3) et (4), on a

$$\frac{V_{ps}}{L} \alpha T = \frac{v_s - V_{ps}}{L} (1 - \alpha) T$$

soit $\alpha V_{ps} = (1 - \alpha) v_s - (1 - \alpha) V_{ps}$. On en déduit

$$\langle v_s \rangle = \frac{V_{ps}}{1 - \alpha}.$$

11. Comme $0 < \alpha < 1$, on a $v_s > V_{ps}$, d'où le nom de **hacheur-survolteur**.

Le rapport cyclique est donné par $\alpha = 1 - \frac{V_{ps}}{v_s}$.

Avec $V_{ps} = 72 \text{ V}$ et $v_s = 350 \text{ V}$, on obtient

$$\alpha = 0,79.$$

5 — Point de vue énergétique

12. La puissance instantanée reçue par la bobine est

$$P_L(t) = u_L(t) i_L(t) = L \frac{di_L}{dt} i_L(t) = \frac{L}{2} \frac{d(i_L^2)}{dt}.$$

Sa valeur moyenne est

$$\langle P_L \rangle = \frac{L}{2} \left\langle \frac{d(i_L^2)}{dt} \right\rangle.$$

Le courant $i_L(t)$ étant une fonction périodique du temps, il en est de même pour $i_L^2(t)$. La valeur moyenne de la dérivée temporelle d'une fonction périodique étant nulle, on en déduit

$$\langle P_L \rangle = 0.$$

Dans la phase active, le courant est croissant dans la bobine; la bobine accumule donc de l'énergie lors de cette phase.

Dans la phase de roue libre, le courant dans la bobine est décroissant; elle cède donc l'énergie accumulée à la charge.

La bobine joue le rôle d'accumulateur d'énergie.

➤ Lors de la phase de roue libre, l'énergie cédée par la bobine s'ajoute à celle fournie par le générateur (effet survolteur).

13. La puissance moyenne délivrée par le générateur vaut

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V_{ps} i_L(t) dt = \frac{V_{ps}}{T} \int_0^T i_L(t) dt.$$

L'intégrale se calcule géométriquement : l'aire sous la courbe est

$$\int_0^T i_L(t) dt = i_{L,\min} T + \frac{i_{L,\max} - i_{L,\min}}{2} T = \frac{i_{L,\min} + i_{L,\max}}{2} T$$

d'où

$$\langle P \rangle = \frac{i_{L,\min} + i_{L,\max}}{2} V_{ps}.$$

14. Le résultat de la question précédente et la question 8 permettent d'écrire

$$\begin{aligned} i_{L,\max} + i_{L,\min} &= \frac{2P}{V_{ps}} \\ i_{L,\max} - i_{L,\min} &= \frac{V_{ps} \alpha T}{L} \end{aligned}$$

On en déduit

$$i_{L,\min} = \frac{P}{V_{ps}} - \frac{V_{ps} \alpha T}{2L}.$$

Le convertisseur fonctionne en régime continu si $i_{L,\min} > 0$, soit si

$$\langle P \rangle > P_{\min} = \frac{\alpha T V_{ps}^2}{2L}.$$

➤ Pour un rapport cyclique donné, la puissance minimum sera d'autant plus faible que la période de hachage T est faible et que l'inductance L de la bobine est élevée.