

DS n° 2

Sujet « difficile »

Le sujet comporte 3 parties indépendantes. **La calculatrice est autorisée.**

Partie I – Multiplicateur numérique à modulation d'amplitude (Centrale PSI)

Il s'agit ici d'étudier un montage dont le schéma est donné figure I-1, destiné à calculer le produit d'une tension $u(t)$ et d'une intensité $i(t)$.

Le signal $u(t)$ est échantillonné selon une période d'échantillonnage T_e , ce qui renvoie la suite de valeurs

$$\{u_n = u(nT_e)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On note $u_{\text{ech}}(t)$ le signal échantillonné, c'est-à-dire le signal tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [nT_e, (n+1)T_e], \quad u_{\text{ech}}(t) = u_n.$$

Q1. On considère que le spectre du signal $u(t)$ est contenu dans l'intervalle de fréquence $[0, F]$. Rappeler la condition dite de Nyquist-Shannon permettant un échantillonnage satisfaisant de ce signal.

Un oscillateur OSC crée une tension périodique $s_r(t)$ en rampe, de période T_e , variant entre les tensions $-U_0$ et $+U_0$ (figure I-2a) telle que $\forall t, |u(t)| < U_0$. Cet oscillateur synchronise les deux échantillonneurs ECHT en imposant les intervalles d'échantillonnage $[nT_e, (n+1)T_e]$.

Le signal $s_r(t)$ est comparé au signal $u(t)$ grâce à un comparateur simple dont le signal de sortie est noté $S(t)$ (figure I-2b). Les ALI du montage sont idéaux. Les tensions de saturation sont notées $\pm V_{\text{sat}}$.

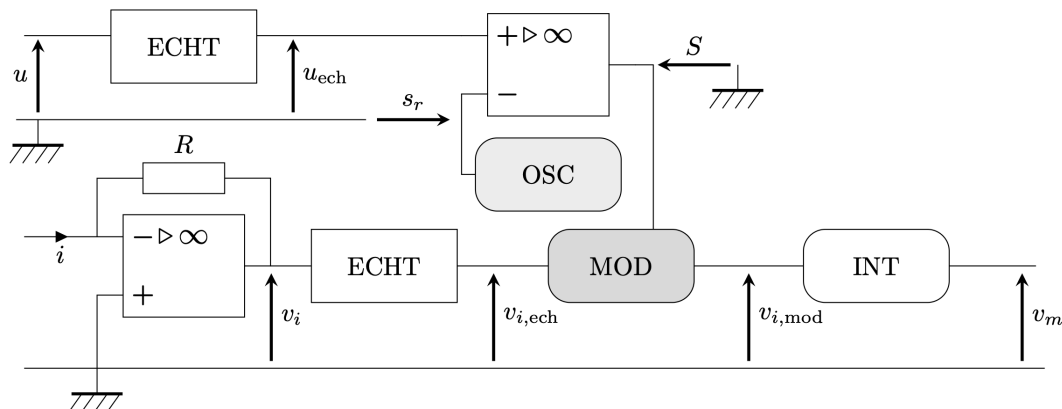


FIGURE I-1 – Montage multiplicateur numérique (ECHT désigne un échantillonneur, MOD le modulateur, INT l'intégrateur et OSC l'oscillateur). L'oscillateur synchronise les deux échantillonneurs mais les contacts entre ces circuits ne sont pas représentés

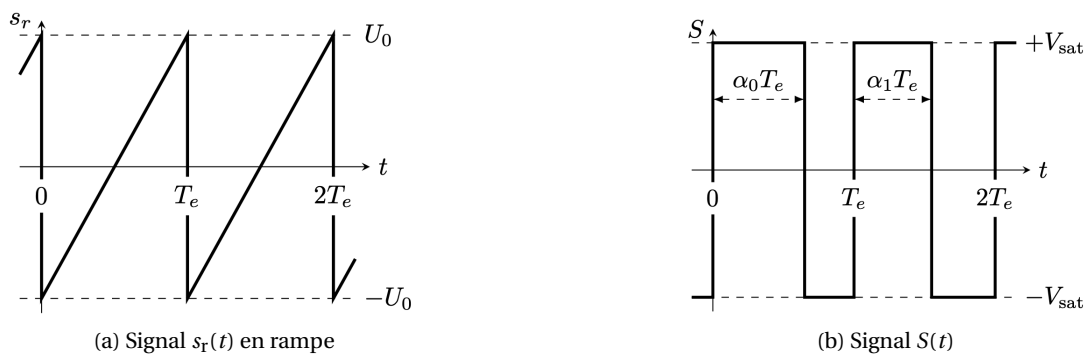


FIGURE I-2 – Signaux

Q2. On a représenté figure I-2b le signal $S(t)$ sur les deux premiers intervalles de temps $n = 0$ et $n = 1$. Pour chaque intervalle de temps $[nT_e, (n+1)T_e]$, la durée pour laquelle $S(t) > 0$ est notée $\alpha_n T_e$ où α_n est le rapport cyclique. Exprimer α_n en fonction de u_n et U_0 .

L'intensité $i(t)$ est appliquée à la seconde entrée du montage de la figure I-1.

Q3. Exprimer la tension $v_i(t)$ en fonction de $i(t)$ et R . Quel est l'intérêt de ce montage?

La tension $v_i(t)$ est elle aussi échantillonnée selon les mêmes paramètres que la tension $u(t)$; on obtient en sortie de l'échantillonneur la tension $v_{i,ech}(t)$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [nT_e, (n+1)T_e], v_{i,ech}(t) = v_{i,n} = v_i(nT_e).$$

Le modulateur, schématisé figure I-3, reçoit en entrée $v_{i,ech}$. L'interrupteur K , idéal, est commandé à l'ouverture et à la fermeture par le signal S :

$$K \begin{cases} \text{fermé} & \text{si } S(t) > 0, \\ \text{ouvert} & \text{si } S(t) < 0. \end{cases}$$

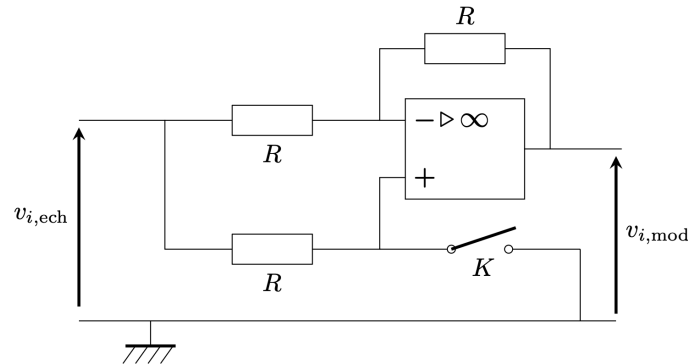


FIGURE I-3 – Modulateur

Q4. Le signal de sortie du modulateur est noté $v_{i,mod}$. Exprimer $v_{i,mod}$ en fonction de $v_{i,ech}$ selon la valeur du signal de commande S .

La tension $v_{i,mod}(t)$ est ensuite intégrée sur un intervalle de longueur T_e .

Q5. Proposer le schéma d'un montage actif intégrant un signal d'entrée $v_e(t)$ par rapport au temps. Donner l'expression de la tension de sortie en fonction de la tension d'entrée.

Soit $v_{i,mod}(t)$ le signal d'entrée de l'intégrateur. Celui-ci fournit en sortie la tension

$$v_m(t) = -\frac{1}{\tau} \int_{nT_e}^t v_{i,mod}(u) du, \quad \text{pour } t \in [nT_e, (n+1)T_e],$$

où τ est une constante caractéristique de l'intégrateur, homogène à un temps.

Q6. Exprimer $v_{m,n} = v_m((n+1)T_e)$ en fonction de u_n , de $i_n = i(nT_e)$ et des différentes constantes du montage. Montrer que l'on a bien obtenu le résultat voulu à une constante multiplicative près.

Le signal périodique nécessaire au fonctionnement du circuit est généré par un oscillateur. On étudie ici un oscillateur dit « à réseau déphaseur », à trois cellules RC (figure I-4).

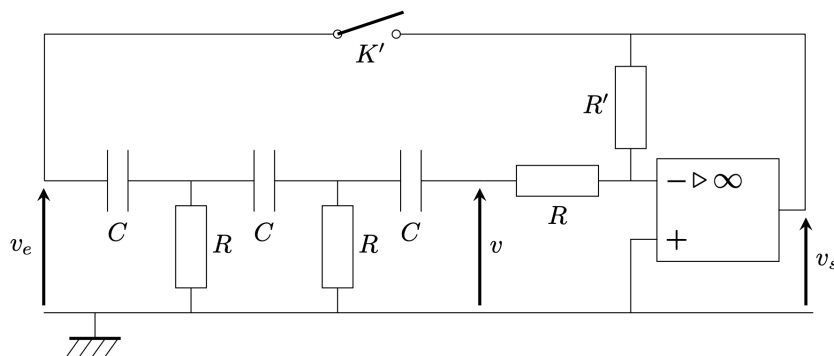


FIGURE I-4 – Oscillateur à réseau déphaseur

La fonction de transfert des trois cellules RC est donnée par

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}}{\underline{v}_e} = \frac{1}{1 - \frac{5}{(RC\omega)^2} + \frac{1}{jRC\omega} \left(6 - \frac{1}{(RC\omega)^2} \right)}.$$

Q7. Préciser la nature de ce filtre.

Q8. Exprimer le gain $G = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}}$ de l'amplificateur. Quand l'interrupteur K' est fermé, montrer que la tension v_s peut être sinusoïdale si G et $\underline{H}$ vérifient une condition que l'on précisera. En déduire l'expression de la pulsation ω_{osc} du signal v_s , ainsi que la valeur numérique de G .

On pose $v_s = A_{osc} \cos(\omega_{osc} t + \varphi_{osc})$. Dans le circuit représenté figure I-4, aucun paramètre ne permet de contrôler l'amplitude A_{osc} . Pour pallier ce problème, la résistance R' est remplacée par une résistance R_{com} commandée en tension selon l'une des deux expressions suivantes :

$$\textcircled{1} \quad R_{com} = R_0 + \frac{r}{1 + \frac{A_{osc}}{V_0}} \qquad \textcircled{2} \quad R_{com} = R_0 - \frac{r}{1 + \frac{A_{osc}}{V_0}},$$

où R_0 , r et V_0 sont des constantes positives caractéristiques de la résistance commandée.

Q9. Quelle est l'expression de R_{com} qui permet de stabiliser les oscillations, et pourquoi? En particulier, quelle valeur faut-il donner à r pour obtenir $A_{osc} = 7 \text{ V}$? On prendra $R = 5 \text{ k}\Omega$, $R_0 = 125 \text{ k}\Omega$ et $V_0 = 5 \text{ V}$.

Partie II — Création d'un synthétiseur analogique rudimentaire (Centrale PSI)

Les synthétiseurs analogiques reposent sur un principe simple : à partir de quelques composants électroniques élémentaires – oscillateurs, filtres, amplificateurs – il est possible de générer une grande variété de sons, parfois d'une complexité étonnante.

Dès 1970, le Minimoog, présenté en figure II-1, a marqué une étape décisive : l'un des premiers synthétiseurs portables, il intégrait un clavier numérique qui permettait d'associer directement chaque touche à la fréquence correspondante, facilitant ainsi son utilisation par les musiciens. La conception de tels dispositifs pose néanmoins plusieurs défis techniques : assurer une correspondance précise entre touches et fréquences, maintenir la stabilité des oscillateurs malgré les variations de température et protéger les circuits contre les contraintes électriques et thermiques.



FIGURE II-1 – Minimoog 44 touches sorti en 1970, l'un des premiers synthétiseurs analogiques portables équipés d'un clavier numérique.

Dans ce sujet, on se place dans un cadre simplifié où l'on étudie la conception d'un synthétiseur analogique rudimentaire, en mettant en évidence ces problématiques de génération de signal, de contrôle thermique et de fiabilité des circuits imprimés.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont repérées par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Partie A — Création d'un synthétiseur analogique

Un synthétiseur analogique fonctionne en générant et en modulant des signaux électriques pour produire des sons variés. Deux éléments centraux composent un synthétiseur : un clavier permettant de choisir les notes produites et un oscillateur. Ce dernier permet de générer des signaux périodiques aux différentes fréquences audibles par l'humain. Dans cette partie, on cherche à concevoir une chaîne de génération sonore inspirée des synthétiseurs analogiques classiques. L'objectif est de produire un son dont la hauteur est déterminée par la tension générée par des touches de clavier d'un piano numérique, afin de simuler le fonctionnement d'un véritable clavier musical.

1 — Des touches de clavier à l'oscillateur

1 Convertisseur « linéaire/exponentiel »

Un clavier est constitué de touches sur lesquelles l'utilisateur appuie pour produire une note. Cette note est identifiée par sa fréquence fondamentale (par exemple, un la_3 correspond à la fréquence de 440 Hz). Deux notes suc-

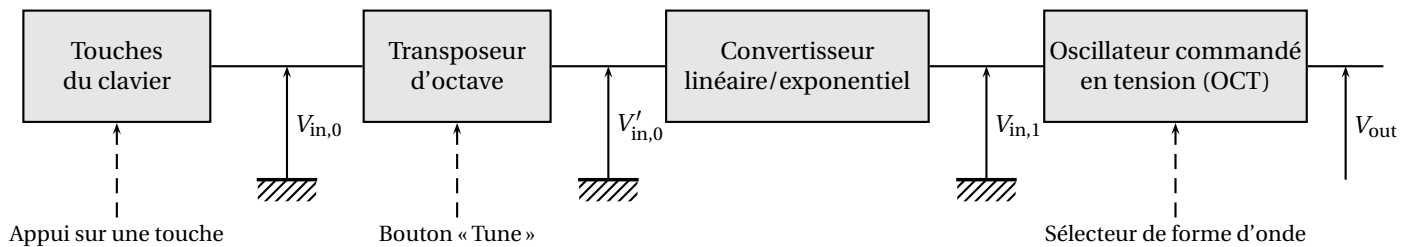


FIGURE II-2 – Extrait d'un diagramme simplifié de fonctionnement d'un synthétiseur analogique rudimentaire. L'utilisateur peut modifier le fonctionnement des blocs à l'aide des boutons du synthétiseur.

cessives sont séparées d'un demi-ton, ce qui correspond à un rapport de fréquence de $\sqrt[12]{2}$. Deux notes séparées d'une octave sont séparées de douze demi-tons. Le la_4 est par exemple situé à une octave au-dessus du la_3 .

Lors d'un appui sur une touche, une tension de contrôle $V_{in,0}$ est générée et est, après ajustement, appliquée à l'oscillateur commandé en tension (OCT). On prend comme base une tension de -5 V pour la fréquence associée au la_0 . La tension générée augmente de 1 V pour le passage à l'octave supérieure. Par exemple, une tension de -1 V aura pour effet de créer un la_4 .

On suppose dans cette partie que le bloc « transposeur d'octave » ne modifie pas le signal généré par les touches du clavier et on considère donc que $V'_{in,0} = V_{in,0}$. L'OCT quant à lui génère un signal périodique V_{out} dont la fréquence est proportionnelle à $V_{in,1}$.

Q1. Expliquer la nécessité d'un bloc convertisseur « linéaire/exponentiel » présenté figure II-2. Déterminer la relation entre $V_{in,0}$ et $V_{in,1}$ sous la forme

$$V_{in,1} = g(V_{in,0}) \quad \text{avec} \quad g(V_{in,0}) = V_{ref} \exp(\alpha V_{in,0}).$$

Évaluer numériquement la constante α .

Une manière plus simple de reproduire analogiquement la fonction g est d'utiliser un transistor, comme représenté sur la figure II-3.

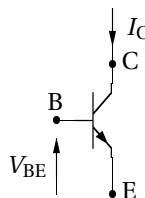


FIGURE II-3 – Schéma de principe d'un transistor bipolaire (BJT) de type NPN

En appliquant une tension V_{BE} entre la base B et l'émetteur E, le courant au niveau du collecteur (point C) s'écrit, par la relation d'Ebers-Moll approchée, sous la forme

$$I_C = I_S(T) \exp\left(\frac{V_{BE}}{v(T)}\right), \quad \text{en posant} \quad v(T) = \frac{k_B T}{q}$$

où k_B est la constante de Boltzmann, q la charge électrique élémentaire et T la température. L'intensité $I_S(T)$, appelée courant de saturation inverse du transistor, double de valeur lorsque la température augmente de 10°C . Il est possible, par un circuit non détaillé ici, d'obtenir une tension $V_{in,1}$ proportionnelle à I_C .

Q2. Déterminer la variation de tension ΔV_{BE} qui permet d'augmenter d'une octave la fréquence émise à l'OCT en fonction de $v(T)$. Calculer ΔV_{BE} à 20°C .

On ajoute, en amont du transistor, deux résistances R et R' . L'intensité I_B prise au niveau de la base du transistor est supposée négligeable par rapport aux autres intensités du circuit et sera prise nulle pour toute la suite.

Q3. Montrer que l'ajout des résistances permet de créer un bloc convertisseur « linéaire/exponentiel », en considérant une température de travail de 20°C .

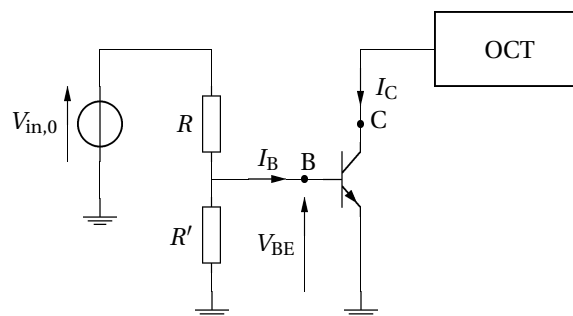


FIGURE II-4 – Bloc « linéaire/exponentiel » simplifié, avec $R = 56,0 \text{ k}\Omega$, et $R' = 1,00 \text{ k}\Omega$

2 Compensation de température

Le transistor utilisé pour la conversion linéaire/exponentielle chauffe lorsqu'il fonctionne, ce qui modifie ses propriétés physiques et peut entraîner une dérive de la fréquence de l'oscillateur, provoquant un désaccord progressif entre les notes du clavier. Une oreille humaine bien entraînée peut détecter une variation relative d'environ 0,0035 entre deux notes successives.

Q4. Avec des composants à 30°C , analyser séparément comment les variations de $I_S(T)$ et de $v(T)$ influencent un la_3 initialement joué à 20°C .

Afin de résoudre ce problème, deux solutions, toutes deux utilisées en pratique, sont étudiées par la suite : rajouter des ailettes de refroidissement, ou modifier le circuit électronique, ce que nous proposons de faire ici.

On complète le circuit électronique de la figure II-4 en rajoutant un deuxième transistor comme représenté figure II-5. Les émetteurs des deux transistors étant reliés, le courant de saturation inverse $I_S(T)$ est identique pour chacun d'eux. Le courant I_{C1} est fourni par un générateur de courant d'intensité constante, tandis que I_{C2} est relié au bloc « OCT ». La tension $V_{in,1}$ est proportionnelle à I_{C2} .

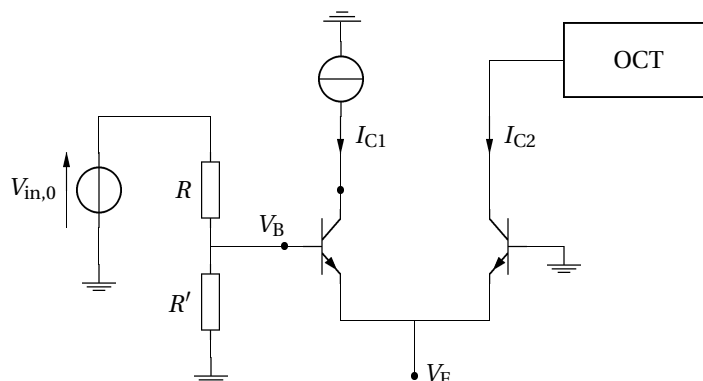


FIGURE II-5 – Bloc « linéaire/exponentiel » à compensation de température

Q5. Exprimer I_{C2} en fonction de I_{C1} , V_B et $v(T)$.

Q6. Quelle amélioration présente ce circuit par rapport au circuit de la figure II-4?

Q7. En prenant pour base un fonctionnement à 20°C , calculer la variation de température acceptable pour le synthétiseur. Commenter.

Les constructeurs de synthétiseurs analogiques apportent une deuxième modification en remplaçant une ou plusieurs résistances par des thermistances CTP, dipôles résistifs dont la résistance augmente avec la température. La relation résistance-température d'une thermistance usuelle utilisée dans les synthétiseurs est donnée par la forme

$$R(T) = R_{T_0}(1 + K \times (T - T_0)),$$

où T_0 est une température de référence, R_{T_0} la résistance électrique à la température de référence et K un coefficient nommé « CTP » (coefficient de température positif) supposé indépendant de la température. On dispose de différents jeux de thermistances fournis avec la *datasheet* suivante :

CTP (10^{-6} K^{-1})	Précision CTP	Résistance $R_{20^\circ\text{C}}$ à 20°C	Précision sur $R_{20^\circ\text{C}}$
500 600 700 800 900	$\pm 20 \%$	500	$\pm 1 \%$
1000 1200 1500 1800 2000 2200	$\pm 15 \%$	500	$\pm 1 \%$
2400 2700 2800 3000 3300	$\pm 10 \%$	500	$\pm 1 \%$
3600 3900 42000 4500	$\pm 20 \%$	500	$\pm 1 \%$

Q8. En considérant $R' \ll R$ et en prenant toujours pour base un fonctionnement à 20°C , proposer une modification du circuit présenté en figure II-5 permettant de compenser au mieux possible la variation de température. Déterminer alors la variation de température acceptable pour le synthétiseur avec le nouveau circuit proposé. Conclure.

3 Transposition d'octave

En réalité, les synthétiseurs analogiques usuels n'ont pas un nombre de touches suffisant pour jouer sur 10 octaves (le synthétiseur Minimoog présenté figure II-1 ne possède que 3 octaves et demi). Pour résoudre ce problème, le bouton « Tune » du Minimoog permet de changer la tension de contrôle associée à une touche du clavier en tournant le sélecteur sur cinq positions différentes (-2 , -1 , 0 , 1 ou 2) et est relié à un circuit électronique représenté figure II-7.

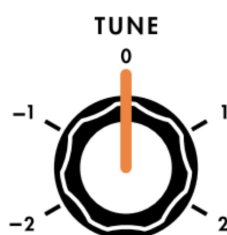


FIGURE II-6 – Bouton « Tune » du synthétiseur Minimoog

Q9. Dans quel(s) régime(s) fonctionnent les deux ALI de la figure II-7? Préciser dans ce cas le modèle de l'ALI idéal.

Q10. Déterminer la valeur de la résistance électrique R_A telle que la tension V_{SW} prenne successivement les valeurs -2 V , -1 V , 0 V , 1 V ou 2 V selon la position du commutateur.

Q11. Quel est le rôle de l'ALI ① situé juste après le commutateur?

Q12. Montrer que le montage de l'ALI ② est un sommateur et que le circuit permet effectivement de modifier l'octave de la note jouée.

2 — Oscillateur commandé en tension

Un OCT, ou oscillateur commandé en tension (la dénomination la plus couramment utilisée est VCO pour *Voltage Controlled Oscillator*), est un circuit électronique capable de produire un signal périodique dont la fréquence

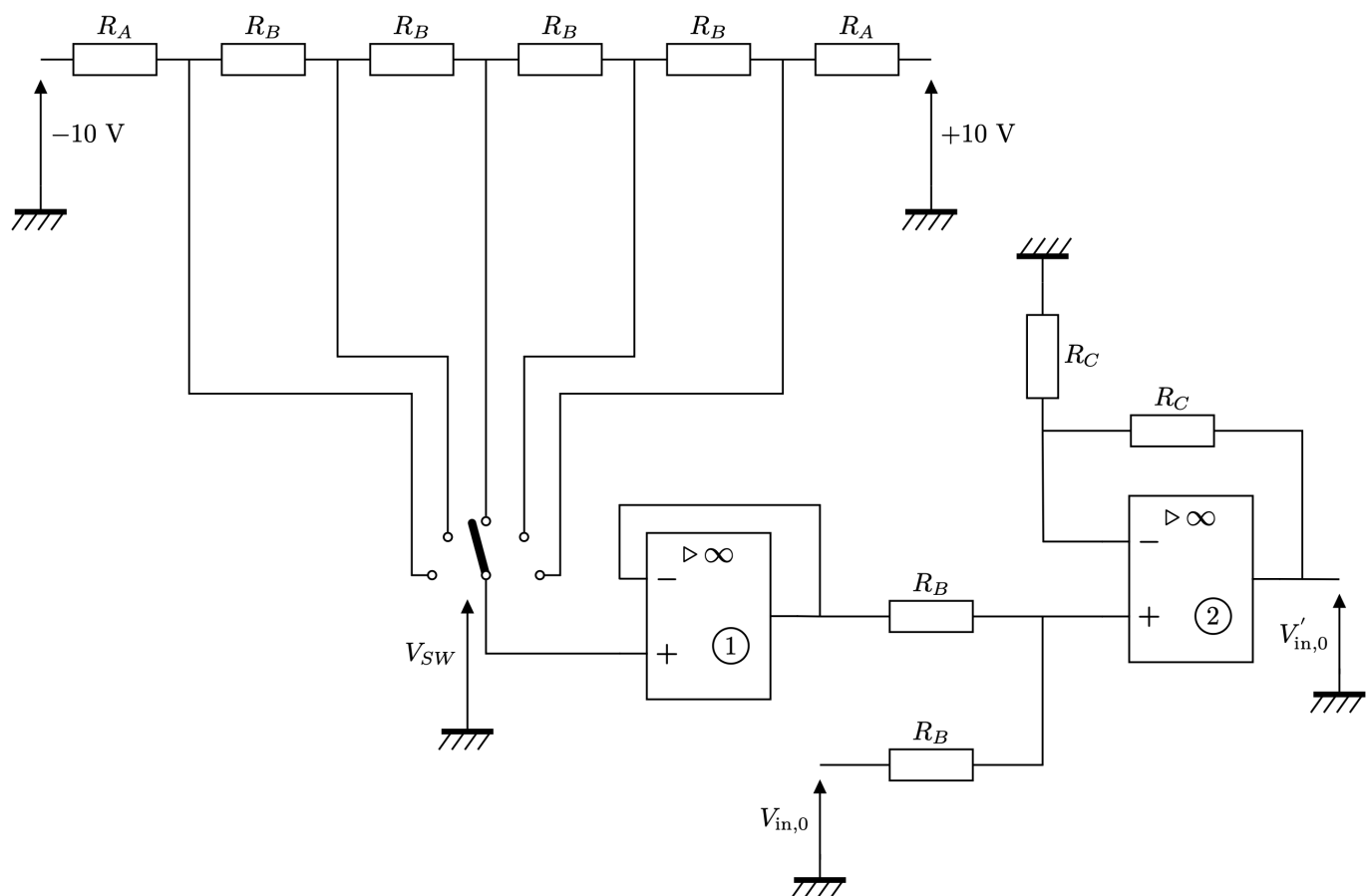


FIGURE II-7 – Schéma électrique simplifié d'un transposeur d'octave « 3U Octave Transposeur – Elby Design », avec $R_B = 10,0 \text{ k}\Omega$ et $R_C = 5,0 \text{ k}\Omega$. La rotation du bouton « Tune » entraîne celle du commutateur.

dépend directement de la tension appliquée à son entrée. Ce type d'oscillateur est couramment utilisé, seul ou en plusieurs exemplaires, dans les synthétiseurs analogiques. La tension de commande est déterminée par la touche pressée sur le clavier, ce qui permet à l'oscillateur d'ajuster sa fréquence afin de produire les différentes hauteurs correspondant aux notes de la gamme musicale. Un exemple simplifié d'un OCT est présenté figure II-8.

On note V_{sat} la tension de saturation des ALI, avec $V_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$. La tension de commande $V_{\text{in},1}$ est supposée constante et strictement positive.

Q13. En justifiant votre réponse, identifier le régime de fonctionnement de l'ALI ④. Quelle(s) conséquence(s) immédiate(s) cela engendre-t-il ?

Selon la valeur de la tension V_{BE} entre la base du transistor (point B) et la masse (point E), on peut distinguer deux phases de fonctionnement du transistor T :

- **phase active** : lorsque V_{BE} est positive, la jonction entre C et E est équivalente à un fil ;
- **phase bloquante** : lorsque V_{BE} est négative, le courant I_C en C est nul.

La résistance R_5 sert à introduire un courant suffisant à la base du transistor et n'intervient pas dans les calculs. On admet ainsi que les tensions V_{BE} et $V_{\text{out},2}$ sont toujours de même signe.

On suppose d'abord que le transistor fonctionne initialement en phase bloquante.

Q14. Déterminer $V_{\text{out},1}$ en fonction de R_1 , C_1 , R_2 , R_3 , $V_{\text{in},1}$, t et d'une constante que l'on déterminera ultérieurement.

Q15. Déterminer, en fonction de V_{sat} , R_6 et R_7 la tension positive de basculement V_{haut} de l'ALI ④ et sa tension négative de basculement V_{bas} . Représenter graphiquement l'évolution de $V_{\text{out},2}$ en fonction de $V_{\text{out},1}$.

Q16. On suppose que $V_{\text{out},1}(t=0) = -V_{\text{bas}} > 0$ à l'instant initial. En déduire l'instant t_1 à partir duquel l'ALI ④ change d'état (bascule). Que se passe-t-il alors ?

Q17. Déterminer $V_{\text{out},1}(t)$ pour $t > t_1$ tant que l'ALI ④ reste dans le même état. Quelle condition sur R_4 permet d'obtenir des oscillations symétriques ? On supposera cette condition vérifiée par la suite.

Q18. On suppose que $R_6 = R_7$. En déduire que la fréquence f de fonctionne de l'OCT est donnée par

$$f = \frac{1}{2R_1 C_1} \frac{R_2}{R_2 + R_3} \frac{V_{\text{in},1}}{V_{\text{sat}}}.$$

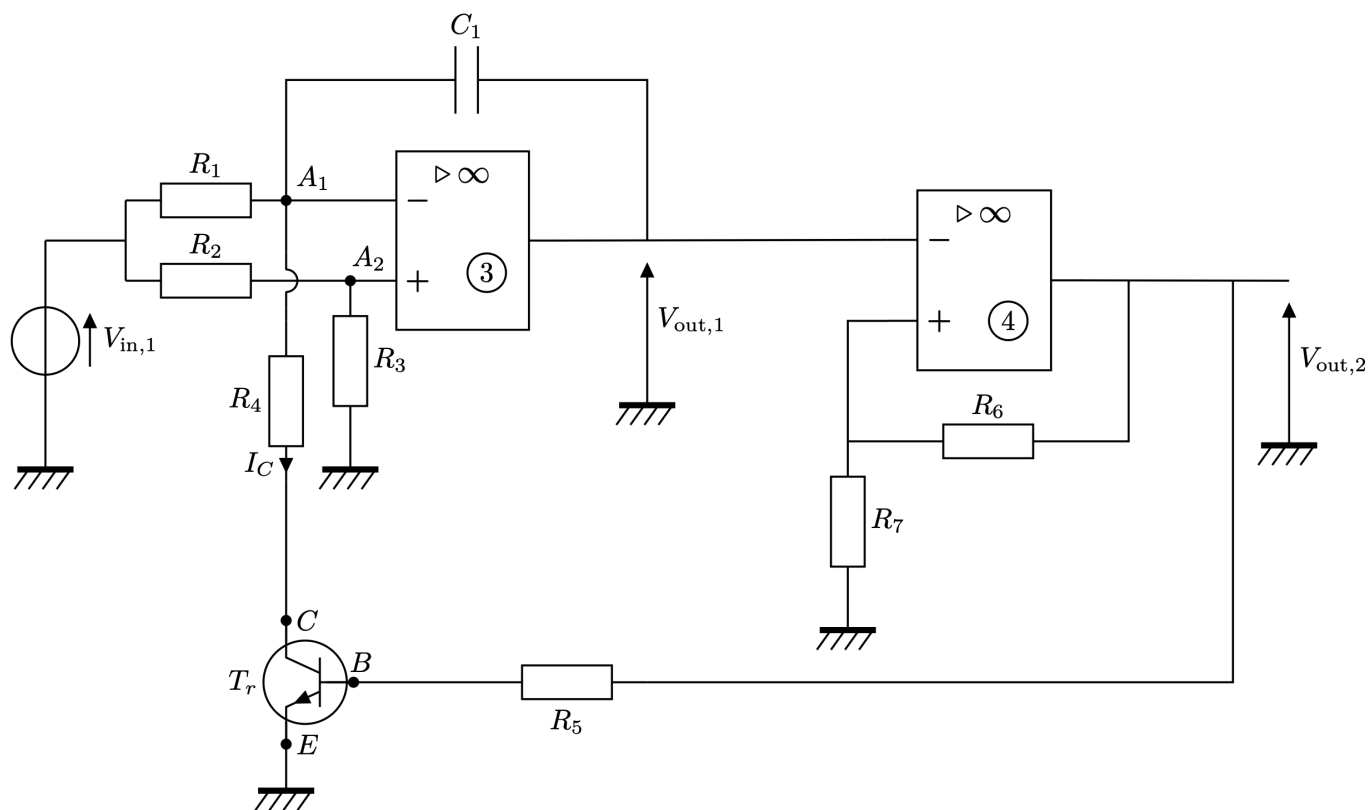


FIGURE II-8 – Schéma électrique d'un OCT classique; R_1 et R_4 sont reliées en A_1 indépendamment de R_2 et R_3 qui sont reliées en A_2 .

Q19. Représenter schématiquement les évolutions temporelles des tensions $V_{out,1}$ et $V_{out,2}$.

Q20. La fiche technique des ALI utilisés indique une vitesse de balayage de $0,3 \text{ V}/\mu\text{s}$ en contre-réaction négative. Décrire ce que cela signifie et en déduire une borne supérieure de la fréquence de fonctionnement de l'OCT. Commenter.

Données et formulaire

Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Charge électrique élémentaire	$q = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Partie III — Le bioéthanol (Mines PSI)

L'épuisement des ressources fossiles ainsi que l'augmentation de l'effet de serre impliquent de trouver des solutions économes en consommation de pétrole, notamment dans le domaine des transports. Une voie consiste à mélanger l'essence à des biocarburants : le bioéthanol est ainsi présent à hauteur de 10 % dans l'essence SP95-E10, et jusqu'à 85 % dans le superéthanol E85.

Les biocarburants de seconde génération sont issus de sources ligno-cellulosiques (bois, feuilles, pailles). Afin de fabriquer le biocarburant, la cellulose contenue dans ces végétaux est tout d'abord séparée de la lignite et de l'hémicellulose par cuisson acide puis par explosion à la vapeur. La cellulose, polymère de glucose, est ensuite transformée en glucose (sucre à six atomes de carbone de formule brute $C_6H_{12}O_6(s)$) par hydrolyse enzymatique. Le glucose est enfin transformé en éthanol lors d'une étape de fermentation utilisant des levures.

Q1. Écrire l'équation chimique (réaction (1)) de la synthèse de l'éthanol liquide à partir de la fermentation anaérobie d'une mole de glucose ($C_6H_{12}O_6(s)$). Seul du dioxyde de carbone est produit en même temps que l'éthanol.

Q2. Calculer l'enthalpie standard de réaction de cette réaction à 298 K en commenter le résultat obtenu.

On cherche à présent à mesurer la quantité de chaleur libérée lors de la combustion complète de l'éthanol dans l'air. On brûle complètement 3 g d'éthanol dans une enceinte isobare adiabatique à partir de la température $T_i = 298,0$ K. À la fin de l'expérience, l'eau du calorimètre est à la température $T_f = 318,0$ K. Le volume d'eau initialement contenu dans le calorimètre est de 1000 mL et on négligera la capacité calorifique du calorimètre par rapport à celle du volume d'eau.

Q3. Écrire l'équation bilan de la réaction (notée (2)). Pourquoi dit-on que le bioéthanol est un carburant propre alors que sa combustion produit des gaz à effets de serre ?

Q4. Calculer grâce à l'expérience de calorimétrie l'enthalpie standard molaire de la réaction de combustion de l'éthanol (liquide) à 298 K.

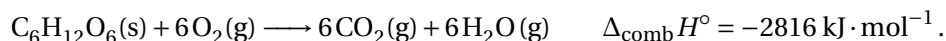
Q5. Calculer grâce aux données fournies en annexe l'enthalpie standard molaire de la réaction de combustion de l'éthanol (liquide) à 298 K. Conclure.

Données

Enthalpies standard de formation, entropies standard et capacités calorifiques molaires standard (à 298 K) :

espèce	$\Delta_f H^\circ$ (kJ · mol ⁻¹)	S_m° (J · K ⁻¹ · mol ⁻¹)	$C_{p,m}^\circ$ (J · K ⁻¹ · mol ⁻¹)
C ₂ H ₅ OH(g)	-235	283	
C ₂ H ₅ OH(l)	-277	161	112
O ₂ (g)	0	205	29
N ₂ (g)			29
CO ₂ (g)	-394	214	37
H ₂ O(g)	-242	189	34
H ₂ O(l)	-286	70	75

Enthalpie standard de combustion du glucose :



Masses molaires :

$M(C) = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(O) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(H) = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.