Outils mathématiques — Opérateurs vectoriels : exercices

On se reportera au formulaire d'analyse vectorielle pour les expressions des opérateurs.

1 — Exercices en coordonnées cartésiennes

Ces exercices sont purement mathématiques et calculatoires. Les grandeurs n'ont pas de dimension physique.

1.1 Calculs de gradients

Calculer le gradient des champs scalaires suivants en coordonnées cartésiennes :

1. $G(x,y) = yx^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

2. $f(x,y,z) = \sin(xyz)$.

3. $g(x,y,z) = 3x^2y - y^3z$. Calculer de plus $\overrightarrow{\text{grad}}\, g$ au point $M_0(1,-2,-1)$.

4. $h(x,y,z) = a(x+y+z)$.

5. $u(x,y,z) = a(x^2+y^2+z^2)$.

6. $F(x,y) = x^2 - y^2$.

1.2 Calculs de laplaciens

7. Calculer le laplacien des champs précédents.

1.3 Calculs de divergences

Calculer la divergence des champs vectoriels suivants :

8. $\vec{A}(x,y,z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_x + z\vec{e}_x$.

9. $\vec{B}(x,y) = y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$.

10. $\vec{U}(x,y,z) = ax^2\vec{e}_x + ay^2\vec{e}_x + az^2\vec{e}_z$.

11. $\vec{V}(x,y,z) = xy\vec{e}_x + xz\vec{e}_y + xyz\vec{e}_z$.

2 — Exercices dans divers systèmes de coordonnées

12. On donne le champ scalaire

$$V_1(x,y,z) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

en coordonnées cartésienne.
En utilisant un autre système de coordonnées adapté, calculer son gradient de façon la plus simple.

13. On donne le champ scalaire suivant :

$$G(x,y,z) = \frac{a}{x^2+y^2} + bz^2.$$

Calculer son laplacien de la façon la plus simple possible.

3 — Exercices en coordonnées cartésiennes

3.1 Calculs de gradients

1. On calcule

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_y = 3yx^2 + 3y^2 - 15 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_x = x^3 + 6xy - 12.$$

On en déduit

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, G = (3yx^2 + 3y^2 - 15)\,\vec{e}_x + (x^3 + 6xy - 12)\,\vec{e}_y}.$$

2. On calcule

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} = yz\cos(xyz),$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} = xz\cos(xyz)$$

et

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} = xy\cos(xyz).$$

On en déduit

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \cos(xyz)\left[yz\,\vec{e}_x + xz\,\vec{e}_y + xy\,\vec{e}_z\right]}.$$

3. On calcule

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z} = 6xy\,;\ \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x,z} = 3x^2 - 3y^2 z\,;\ \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{x,y} = -y^3.$$

On en déduit

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, g = 6xy\,\vec{e}_x + 3(x^2 - y^2 z)\,\vec{e}_y - y^3\,\vec{e}_z}.$$

On calcule

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, g(M_0) = -12\,\vec{e}_x + 15\,\vec{e}_y + 8\,\vec{e}_z}.$$

4. On calcule

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{y,z} = a\,;\ \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{x,z} = a\,;\ \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{x,y} = a.$$

On en déduit $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, h = a[\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z]}$.

5. On calcule

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z} = 2ax\,;\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x,z} = 2ay\,;\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x,y} = 2az.$$

On en déduit

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, u = 2a[x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z] = 2a\,\vec{e}_{OM}}.$$

6. On calcule

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = 2x \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = -2y.$$

On en déduit $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, F = 2x\,\vec{e}_x - 2y\,\vec{e}_y}$.

3.2 Calculs de laplaciens

7. On calcule

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_y = 6yx \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)_x = 3x^2 + 6x.$$

On en déduit $\boxed{\Delta G = 6yx + 3x^2 + 6x}$.

8. On calcule

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{y,z} = -y^2 z^2 \sin(xyz),$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{x,z} = -x^2 z^2 \sin(xyz)$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{x,y} = -x^2 y^2 \sin(xyz).$$

On en déduit

$$\boxed{\Delta f = -(y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2)\sin(xyz)}.$$

9. On calcule

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)_{y,z} = 6y\,;\ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)_{x,z} = -6yz\,;\ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right)_{x,y} - 0.$$

On en déduit $\boxed{\Delta g = 6y(1-z)}$.

On calcule $\boxed{\Delta g(M_0) = -24}$.

10. On calcule

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_{y,z} = 0\,;\ \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)_{x,z} = 0\,;\ \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)_{x,y} = 0.$$

On en déduit $\boxed{\Delta h = 0}$.

11. On calcule

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{y,z} = 2a\,;\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{x,z} = 2a\,;\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{x,y} = 2a.$$

On en déduit $\boxed{\Delta u = 6a}$.

12. On calcule

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_y = 2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_x = -2.$$

On en déduit $\boxed{\Delta F = 0}$.

Calculs de divergences

13. On calcule

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)_{y,z} = 1\,;\ \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)_{x,z} = 1\,;\ \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_{x,y} = 1\,.$$

On en déduit $\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = 3}$.

14. On calcule

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right)_{y} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial B_y}{\partial y}\right)_{x} = 0\,.$$

On en déduit $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$.

15. On calcule

$$\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}\right)_{y,z} = 2ax\,;\ \left(\frac{\partial U_y}{\partial y}\right)_{x,z} = 2ay\,;\ \left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right)_{x,y} = 2az\,.$$

On en déduit $\boxed{\operatorname{div}\vec{U} = 2a(x+y+z)}$.

16. On calcule

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)_{y,z} = y\,;\ \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)_{x,z} = 0\,;\ \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)_{x,y} = xy\,.$$

On en déduit $\boxed{\operatorname{div}\vec{V} = y + xy}$.

4 — Exercices dans divers systèmes de coordonnées

17. On remarque que

$$x^2 + y^2 + z^2 = OM^2 = r^2$$

en coordonnées sphériques. On se ramène donc au calcul du gradient de

$$V_1(r,\theta,\varphi) = V_1(r) = \frac{\alpha}{r}$$

en coordonnées sphériques.

On a

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} = \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}r} = -\frac{\alpha}{r^2}\,,$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V_1 = -\frac{\alpha}{r^2}\,\vec{e}_r}\,.$$

18. On peut calculer le laplacien directement à partir de l'expression fournie, mais on peut simplifier l'expression en se plaçant en coordonnées cylindriques, en remarquant que $x^2 + y^2 = r^2$; on a donc

$$G(r,\theta,z) = G(r,z) = \frac{a}{r^2} + bz^2\,.$$

On a de façon évidente

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}\right)_{r,z} = 0\,.$$

On calcule

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)_{=} 2b$$

et

$$\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{\theta,z} = -\frac{2a}{r^3} \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{\theta,z} = -\frac{2a}{r^2}\,.$$

On a alors

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) = \frac{4a}{r^3} \quad \text{d'où} \quad r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) = \frac{4a}{r^2}\,.$$

Finalement

$$\boxed{\Delta G = \frac{4a}{r^2} + 2b = \frac{4a}{x^2+y^2} + 2b}\,.$$

Si vous voulez vous convaincre que le calcul direct en cartésienne est pénible :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{2ax}{(x^2+y^2)^2} \quad \textit{et} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{2ay}{(x^2+y^2)^2}$$

puis

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{2a}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8ax^2}{(x^2+y^2)^3}$$

et

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\frac{2a}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8ay^2}{(x^2+y^2)^3}$$

On a alors

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\frac{4a}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8a(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} - \frac{4a}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8a}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4a}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

On retrouve bien l'expression du laplacien, mais au prix de calculs bien plus lourds.