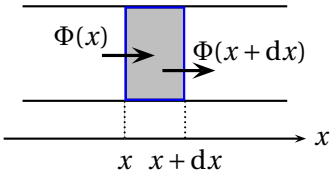
Méthode **Bilans de particules (diffusion)**

Ce document expose des propositions de rédaction pour établir un bilan de particule (sans sources internes).

Phénomène unidimensionnel en cartésiennes

On considère un phénomène diffusif tel que $n(M,t) = n(x,t)$ et $\vec{j}_N(M,t) = j(x,t)\vec{e}_x$.
Le système étudié est la tranche de section S comprise entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$, de volume $\mathrm{d}\tau = S\,\mathrm{d}x$:



Il contient [1] $\delta N_x(t) = n(x,t)S\,\mathrm{d}x$ particules.
Entre t et $t+\mathrm{d}t$, en l'absence de sources internes, le bilan de particules s'écrit [2]

$$\mathrm{d}(\delta N_x) = \delta N_{\text{reçu}}\,. \tag{1}$$

Entre t et $t+\mathrm{d}t$, le nombre de particules varie de

$$\mathrm{d}(\delta N_x) = \delta N_x(t+\mathrm{d}t) - \delta N_x(t) = [n(x,t+\mathrm{d}t) - n(x,t)]\,S\,\mathrm{d}x = \frac{\partial n(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

Avec $\Phi(x,t) = j_N(x,t)S$, on en déduit le nombre de particules reçues entre t et $t+\mathrm{d}t$ [3]

$$\delta N_{\text{reçu}} = \Phi(x,t)\,\mathrm{d}t - \Phi(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_N(x,t)}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Le bilan (1) s'écrit alors

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x = -\frac{\partial j_N(x,t)}{\partial x}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

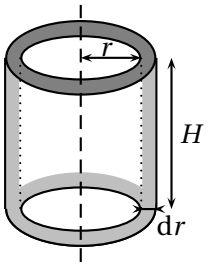
soit

$$\boxed{\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_N(x,t)}{\partial x}}\,.$$

➤ On utilise la loi de Fick $\jmath_N = -D\dfrac{\partial n}{\partial x}$ pour en déduire l'équation de la diffusion.

Phénomène unidimensionnel en cylindriques

On considère $n(M,t) = n(r,t)$ et $\vec{j}_N(M,t) = j(r,t)\vec{e}_r$ en coordonnées cylindriques.
Le système étudié est le tube de hauteur H arbitraire, de rayon r et d'épaisseur $\mathrm{d}r$, de volume $\mathrm{d}\tau = 2\pi r H\,\mathrm{d}r$.
Il contient $\delta N_r(t) = n(r,t)\,\mathrm{d}\tau = n(r,t)2\pi r H\,\mathrm{d}r$ particules.



Entre t et $t+\mathrm{d}t$, en l'absence de sources internes, le bilan de particules s'écrit

$$\mathrm{d}(\delta N_r) = \delta N_{\text{reçu}}\,. \tag{3}$$

1. Je propose la notation $\delta N_x(t)$ pour indiquer que la tranche est prise à l'abscisse x, mais on pourra se contenter de noter $\delta N(t)$.
2. On pourra noter $\delta^2 N_{\text{reçu}}$ pour préciser l'ordre des infiniment petits : ici d'ordre 2 (en $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$), car c'est un nombre de particules reçues par un système infiniment petit pendant une durée infiniment petite.
3. Le flux en x est entrant, donc $+\Phi(x,t)$, tandis que le flux en $x+\mathrm{d}x$ est sortant, donc $-\Phi(x+\mathrm{d}x,t)$.

Entre t et $t+\mathrm{d}t$, le nombre de particules varie de

$$\mathrm{d}(\delta N_r) = \delta N_r(t+\mathrm{d}t) - \delta N_r(t) = [n(r,t+\mathrm{d}t) - n(r,t)]\,2\pi r H\,\mathrm{d}r = \frac{\partial n(r,t)}{\partial t} 2\pi H r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Le nombre de particules reçues entre t et $t+\mathrm{d}t$ est donné par

$$\delta N_{\text{reçu}} = \Phi(r,t)\,\mathrm{d}t - \Phi(r+\mathrm{d}r,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

avec $\Phi(r,t) = 2\pi r H j_N(r,t)$, soit

$$\delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial\left[r\,j_N(r,t)\right]}{\partial r} 2\pi H\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t.$$

Le bilan (1) s'écrit alors

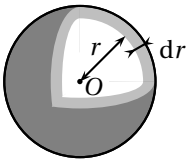
$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} 2\pi H r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial\left[r\,j_N(r,t)\right]}{\partial r} 2\pi H\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\left[r\,j_N(r,t)\right]}{\partial r}}.$$

Phénomène unidimensionnel en sphériques

On considère un phénomène diffusif tel que $n(M,t) = n(r,t)$ et $\vec{j}_N(M,t) = j(r,t)\,\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.
Le système étudié est la coquille de rayon r et d'épaisseur $\mathrm{d}r$:



Le système de volume $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ contient $\delta N_r(r,t) = n(r,t) 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ particules.
Entre t et $t+\mathrm{d}t$, en l'absence de sources internes, le bilan de particules s'écrit

$$\mathrm{d}(\delta N_r) = \delta N_{\text{reçu}}. \tag{5}$$

Entre t et $t+\mathrm{d}t$, le nombre de particules varie de

$$\mathrm{d}(\delta N_r) = \delta N_r(t+\mathrm{d}t) - \delta N_r(t) = [n(r,t+\mathrm{d}t) - n(r,t)]\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\partial n(r,t)}{\partial t} 4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Le nombre de particules reçues entre t et $t+\mathrm{d}t$ est donné par

$$\delta N_{\text{reçu}} = \Phi(r,t)\,\mathrm{d}t - \Phi(r+\mathrm{d}r,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

avec $\Phi(r,t) = 4\pi r^2 j_N(r,t)$, soit

$$\delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial\left[r^2 j_N(r,t)\right]}{\partial r} 4\pi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t.$$

Le bilan (5) s'écrit alors

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} 4\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial\left[r^2 j_N(r,t)\right]}{\partial r} 4\pi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2 j_N(r,t)\right]}{\partial r}}.$$

En coordonnées cylindriques ou sphériques, il est important de faire apparaître la dérivée partielle du flux *avant* de remplacer son expression en fonction de $j_N(r,t)$ dans l'expression de $\delta N_{\text{reçu}}$.