TP de physique n° 5 — Filtrage numérique

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Électronique numérique	
Filtrage numérique.	**Réaliser un filtrage numérique passe-bas d'une acquisition, et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.**

1 — Principe et mise en œuvre théorique du filtrage numérique

1.1 De la fonction de transfert à l'équation différentielle

On considère un filtre linéaire décrit par la fonction de transfert

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{b_0 + b_1(\mathrm{j}\omega) + \cdots + b_m(\mathrm{j}\omega)^m}{a_0 + (\mathrm{j}\omega)a_1 + \cdots + a_n(\mathrm{j}\omega)^n}$$

où $\underline{E}$ est l'amplitude complexe du signal d'entrée $e(t) = E\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{e})$ et $\underline{S}$ l'amplitude complexe du signal de sortie $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{s})$.
On en déduit l'équation différentielle reliant les grandeurs d'entrée et de sortie :

$$a_0 s(t) + a_1\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \cdots + a_n\frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = b_0 e(t) + b_1\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \cdots + b_m\frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m}.$$

Objectif du filtrage linéaire

➤ On réalise l'échantillonnage de la tension d'entrée $e(t)$ qui nous donne un ensemble de N valeurs $\{e_n\}$, où $e_n = e(nT_\mathrm{e})$ avec $T_\mathrm{e} = 1/F_\mathrm{e}$ la période d'échantillonnage.

➤ On veut construire l'ensemble des N valeurs $\{s_n\}$ du signal de sortie du filtre de fonction de transfert $\underline{H}$.

Pour cela, on passe par l'équation différentielle associée que l'on résout par la méthode d'Euler.

1.2 Application à un filtre du premier ordre

On considère un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}. \tag{1}$$

1. Écrire l'équation différentielle reliant $s(t)$ à $e(t)$.

Méthode d'Euler explicite

On note $e_n = e(t_n) = e(nT_\mathrm{e})$ et $s_n = s(t_n) = s(nT_\mathrm{e})$.
La méthode d'Euler explicite approxime la dérivée en t_n de $s(t)$ par la pente du segment reliant (t_n, s_n) à (t_{n+1}, s_{n+1}) :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_n) \approx \frac{s_{n+1} - s_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{s_{n+1} - s_n}{T_\mathrm{e}}.$$

2. Montrer que l'équation différentielle établie à la question **1** se ramène à la relation de récurrence

$$s_{n+1} = Ae_n + Bs_n, \tag{2}$$

où l'on exprimera les coefficients A et B en fonction de T_e, τ et H_0.

➤ On parle de méthode *explicite* car le terme s_{n+1} s'écrit explicitement en fonction des termes à l'instant précédent s_n et e_n.

La méthode d'Euler explicite a pour avantage la simplicité de sa programmation, mais présente un problème de stabilité : elle est conditionnellement stable, c'est-à-dire qu'il faut une condition sur le pas T_e pour qu'elle ne diverge pas.
L'étude de la stabilité se mène sur l'équation différentielle homogène

$$\tau \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = 0\,. \tag{3}$$

3. Montrer que (3) permet d'exprimer s_{n+1} en fonction de s_n, τ et T_e.

4. En déduire l'expression de s_n en fonction de la valeur initiale s_0.
Discuter alors de la stabilité de la solution en fonction du pas d'échantillonnage τ.

Méthode d'Euler implicite

La méthode d'Euler explicite approxime la dérivée en t_{n+1} de $s(t)$ par la pente du segment reliant (t_n, s_n) à (t_{n+1}, s_{n+1}) :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_{n+1}) \approx \frac{s_{n+1} - s_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{s_{n+1} - s_n}{T_e}\,.$$

5. En écrivant l'équation différentielle à l'instant t_{n+1}, montrer que l'on se ramène à l'équation de récurrence

$$s_{n+1} = A' s_n + B' e_{n+1}\,, \tag{4}$$

où l'on exprimera les coefficients A' et B' en fonction de T_e, τ et H_0.

6. Discuter de la stabilité de ce schéma à partir de l'équation différentielle homogène.

➤ On parle de méthode *implicite* car le terme s_{n+1} est présent dans les deux membres de l'équation différentielle. Il est facile à isoler dans le cas de l'équation linéaire considérée ici, mais ça peut être impossible dans le cas d'une équation non linéaire.

2 — Mise en œuvre expérimentale d'un filtre passe-bas du premier ordre

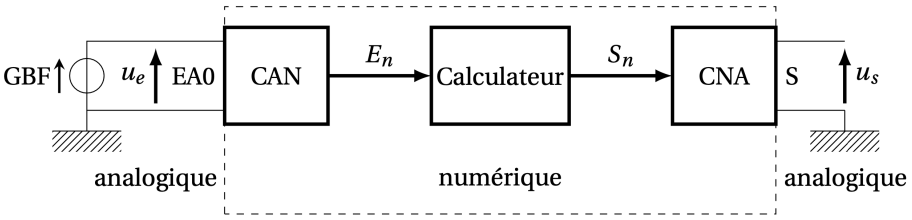
Le filtrage numérique comprend trois étapes :

— la tension $e(t)$ analogique est d'abord convertie en un signal numérique $\{e_n\}$ par l'échantillonnage effectué par le convertisseur analogique-numérique (CAN) ;

— le calculateur permet de déterminer le signal numérique filtré $\{s_n\}$;

— un convertisseur numérique-analogique permet ensuite de générer la tension analogique $s(t)$ correspondante.

L'interface SYSAM, associée au logiciel LatisPro, permet d'effectuer ces trois étapes.



carte SYSAM

Le signal est généré par un GBF ; son acquisition se fait en utilisant l'entrée **EA0** de l'interface Sysam, et la restitution du signal calculé se fait en utilisant la sortie **SA1**.
On visualisera en parallèle sur l'oscilloscope l'entrée **EA0** et la sortie **SA1**.

2.1 Paramètres d'acquisition et de calcul

Les **paramètres d'acquisition** sont fixés à :

— $T_e = 200\,\mu s$;

— $N = 10\,000$ points.

Les **paramètres du filtre** sont :

1. $H_0 = 1$;

2. $f_c = 100$ Hz.

7. Quelle est la valeur de la fréquence d'échantillonnage ?

2.1.1 Génération du signal filtré

Dans le logiciel LatisPro, l'option Traitement permet d'ouvrir une feuille de calcul (**F3**).

8. Après l'avoir complété [1], entrer le code suivant :

```
1 Te =
2 fc =
3 omega0 =
4 H_0 = 1
5 A =
6 B =
7 S = Table(0)
8 S =
```

La ligne 7 définit la liste `S` (en la remplissant de zéros).
La ligne 8 calcule les éléments de cette liste à l'aide de la relation de récurrence. Par exemple, la relation $s_n = s_{n-1} + 0{,}5e_{n-1}$ est codée par la ligne `S = S[n-1] + 0.5*EA0[n-1]`.

➤ Quand le code est rentré (ou modifié), il faut l'exécuter (**F2**).

9. Afin de générer le signal calculé par l'interface Sysam, il faut régler les paramètres d'émission dans LatisPro.

— ouvrir la fenêtre de paramétrage en cliquant sur  ;

— cocher **Sortie active** et dans la liste **Courbes** sélectionner **S** ;

— cocher le mode **GBF** afin d'émettre le signal calculé en continu [2].

2.2 Effets d'un filtre passe-bas

10. Prendre comme signal d'entrée une sinusoïde de fréquence $f = 100$ Hz, d'amplitude $U_e = 10$ V. Faire l'acquisition et observer à l'oscilloscope le signal filtré calculé. Commenter son aspect.

11. Dans les paramètres d'acquisition de Sysam, régler $T_e = 10\,\mu s$.

Modifier en conséquence la ligne 1 du code calculant le signal filtré [3].

Comment est modifié le signal calculé ?

Mesurer l'amplitude du signal d'entré et l'amplitude du signal filtré numériquement. Comparer à la valeur théorique attendue.

12. Prendre comme signal $e(t)$ un signal rectangulaire de fréquence $f = 100$ Hz. Commenter le signal de sortie observé.

13. Même question avec un signal $e(t)$ triangulaire de fréquence identique.

14. Le signal d'entrée $e(t)$ est une sinusoïde de fréquence $f = 4{,}9$ kHz. Observer et expliquer le signal de sortie pour les paramètres suivants :

14.a) $T_e = 200\,\mu s$.

14.b) $T_e = 20\,\mu s$.

1. La valeur 2×10^{-4} se code `2e-4` ; la constante π est accessible avec `Pi`.
2. À partir d'une acquisition de N points, LatisPros calcule N valeurs du signal de sortie ; ce dernier a donc une durée NT_e. Le mode **GBF** émet en boucle le signal calculé.
3. Ne pas oublier de relancer une exécution de la feuille de calcul (**F2**)

3 — Complément : effet d'un filtre passe-bande

On considère un filtre passe-bande de fonction de transfert $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{H_0}{1+\mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ de facteur de qualité Q et de fréquence centrale $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$.
L'équation différentielle reliant la tension de sortie $s(t)$ à la tension d'entrée $e(t)$ est

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s(t) = \frac{\omega_0 H_0}{Q}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}. \tag{5}$$

Il s'agit d'une équation différentiel d'ordre deux. La méthode d'Euler étant adaptée aux équations différentielles du premier ordre, on se ramène à un système de deux équations différentielles du premier ordre, en posant :

$$\begin{cases} s_1(t) &= s(t) \\ s_2(t) &= \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

La méthode d'Euler implicite peut conduire une solution instable, surtout si le facteur de qualité Q est élevé.
La méthode d'Euler implicite peut conduire à un amortissement de la solution.
On montre que la méthode d'Euler semi-implicite conduit à de meilleurs résultats :

— on utilise le schéma d'Euler explicite pour évaluer la dérivée de $s_2(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t}(t_n) = \frac{s_{2,n+1}-s_{2,n}}{T_\mathrm{e}} = -\frac{\omega_0}{Q}s_{2,n} - \omega_0^2 s_{1,n} + \omega_0^2 H_0 e_n\,;$$

— on utilise le schéma d'Euler implicite pour évaluer la dérivée de $s_1(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}(t_{n+1}) = \frac{s_{1,n+1}-s_{1,n}}{T_\mathrm{e}} = s_{2,n+1}\,.$$

On en déduit les relations de récurrence :

$$\begin{cases} s_{2,n+1} &= s_{2,n} + T_\mathrm{e}\left(-\dfrac{\omega_0}{Q}s_{2,n} - \omega_0 s_{1,n} + \omega_0^2 H_0 e_n\right) \\ s_{1,n+1} &= s_{1,n} + T_\mathrm{e}\, s_{2,n+1} \end{cases}$$

➤ Il est important de les calculer dans cette ordre, car on utilise la nouvelle valeur $s_{2,n+1}$ pour calculer $s_{1,n+1}$.

15. À partir des deux relations de récurrences précédentes, écrire l'expression de $s2[n]$ en fonction de $s_2[n-1]$, $s1[n-1]$ et $e[n-1]$, puis l'expression de $s1[n]$ en fonction de $s1[n-1]$ et $s2[n]$.

16. Écrire la feuille de calcul correspond à un tel filtre sur Latis-Pros. On définira les tables `E`, `S1` et `S2`, on notera `Q`, `omega0` et `H0` les paramètres du filtre et `Te` la période d'échantillonnage.

Pour la suite, on prendra comme paramètres d'acquisition $N = 10\,000$, $T_\mathrm{e} = 20\,\mu\mathrm{s}$.

17. Le signal d'entrée est un signal rectangulaire de fréquence $f = 100$ Hz.
Les caractéristiques du filtre sont $f_0 = 100$ Hz et $Q = 20$. Observer en commenter l'effet du filtre.

18. Le signal d'entrée est un signal rectangulaire de fréquence $f = 300$ Hz.
Les caractéristiques du filtre sont $f_0 = 900$ Hz et $Q = 20$. Observer en commenter l'effet du filtre ; discuter de l'effet du facteur de qualité, en prenant $Q = 1/3$, $Q = 5$, $Q = 100$.

19. On prend comme période d'échantillonnage $T_\mathrm{e} = 20\,\mu\mathrm{s}$.
Le filtre a pour caractéristiques $f_0 = 100$ Hz et $Q = 5$.
Le signal $e(t)$ est sinusoïdal de fréquence f. Discuter du signal de sortie obtenu dans les cas suivants :

19.a) $f = 100$ Hz ;
19.b) $f = 1$ kHz ;
19.c) $f = 10$ kHz ;
19.d) $f = 49{,}9$ kHz ;

20. Le signal d'entrée $e(t)$ est un signal rectangulaire de fréquence f, le filtre est inchangé. Discuter du signal de sortie obtenu dans les cas suivants :

20.a) $f = 100$ Hz ;
20.b) $f = 400$ Hz ;
20.c) $f = 49{,}8$ kHz.