TD phénomènes de transport — Diffusion thermique — Partie 1

Conduction thermique — cas général

1 — Nombre de Fourier

On définit le nombre de Fourier par

$$\mathrm{Fo} = \frac{a\Delta t}{L^2}$$

où $a = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ est la diffusivité thermique, Δt la durée étudiée et L la longueur caractérsitique d'étude.

1. D'après l'équation de la diffusion

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

on sait que $[a] = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$.
On en déduit que $[\mathrm{Fo}] = 1$: **le nombre de Fourier est sans dimension**.

2. Le temps caractéristique de la diffusion sur une distance L est

$$\Delta t_\mathrm{c} = \frac{L^2}{a}.$$

On peut donc écrire

$$\mathrm{Fo} = \frac{\Delta t}{\Delta t_\mathrm{c}}.$$

Un processus peut être considéré comme adiabatique si les échanges thermiques diffusifs n'ont « pas le temps » de se faire sur la durée du phénomène considéré, c'est-à-dire si $\Delta t \ll \Delta t_\mathrm{c}$, ce qui revient à $\boxed{\mathrm{Fo} \ll 1}$.

3. Le nombre de Fourier vaut

$$\mathrm{Fo} = \frac{13 \times 1{,}5 \times 10^{-2}}{7800 \times 480 \times 5 \times 10^{-3}} = 2 \times 10^{-3}.$$

On a bien $\mathrm{Fo} \ll 1$: l'hypothèse d'une transformation adiabatique est donc valide.

---

2 — Métabolisme d'un mammifère

1. On considère la sphère de rayon $r > R$. Le bilan thermique s'écrit, en régime stationnaire pour une durée $\mathrm{d}t$:

$$0 = \delta Q_\text{reçu} + \mathcal{P}_\text{prod}\,\mathrm{d}t,$$

où $\mathcal{P}$ est la puissance totale créée dans l'animal par son métabolisme.

La sphère, surface fermée, est conventionnellement orientée vers l'extérieur ; en notant $\Phi(r)$ le flux thermique sortant, le bilan s'écrit

$$0 = -\Phi(r)\,\mathrm{d}t + \mathcal{P}_\text{prod}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$\boxed{\Phi(x) = \Phi_0 = \mathcal{P}_\text{prod}}.$$

Le flux thermique à travers une sphère est indépendant de son rayon, et est égal à la puissance thermique produite à l'intérieur de la sphère, qui est intégralement évacuée par transfert thermique à travers sa surface.

2. Le problème étant à symétrie sphérique, le flux thermique sortant s'écrit

$$\Phi_0 = \oiint_{M\in\Sigma} \vec{j}_Q(M)\,\mathrm{d}\vec{S}_M = 4\pi r^2 j_Q(r).$$

La puissance totale produite dans la sphère de rayon R est

$$\mathcal{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 p_\mathrm{v}.$$

Le bilan $\Phi_0 = \mathcal{P}$ conduit donc à

$$j_Q(r) = \frac{p_\mathrm{v} R^3}{3r^2} = -\lambda\frac{\mathrm{d}T(r)}{\mathrm{d}r}$$

en utilisant la loi de Fourier. On a donc, la température loin de l'animal ($r \to \infty$) valant T_0 :

$$\int_{T(r)}^{T_0} \mathrm{d}T = -\frac{p_\mathrm{v} R^3}{3\lambda}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2} = \frac{p_\mathrm{v} R^3}{3\lambda}\left[\frac{1}{r'}\right]_r^\infty = \frac{p_\mathrm{v} R^3}{3\lambda r}$$

d'où

$$\boxed{T(r) = T_0 + \frac{p_\mathrm{v} R^3}{3\lambda r}}.$$

On remarque que $T(r) > T_0$ comme attendu : le métabolisme de l'animal réchauffe son corps.

3. En considérant un contact parfait, la température est continue à la surface de l'animal ; sa température cutanée vaut donc $T_c = T(R)$, soit

$$\boxed{T_c = T_0 + \frac{p_v R^2}{3\lambda}}.$$

Quand R est fixée, T_c diminue quand λ augmente : le milieu est meilleur conducteur de la chaleur et évacue mieux la puissance thermique produite par l'animal qui est plus refroidi.

Quand λ est fixé, T_c augmente, de façon affine, quand R augmente. Une augmentation de R augmente le flux thermique évacué selon R^2 (proportionnel à la surface de l'animal), mais la puissance totale produite est proportionnelle au volume de l'animal donc à R^3. On a donc

$$\frac{\text{puissance produite}}{\text{puissance évacuée}} \propto R.$$

4. Le métabolisme volumique est donné par

$$p_v = \frac{3\lambda}{R^2}(T_c - T_0),$$

soit $\boxed{p_{v,air} = 2{,}4\ \text{kW}\cdot\text{m}^{-3}}$ et $\boxed{p_{v,eau} = 240\ \text{kW}\cdot\text{m}^{-3}}$.

Comme $\lambda_{eau} = 100\lambda_{air}$, on a $p_{v,eau} = 100 p_{v,air}$ pour une même taille R de l'animal.

De plus $p_v \propto \dfrac{1}{R^2}$: pour un animal 10 fois plus petit, le métabolisme volumique nécessaire doit être 100 fois plus important.

Dans l'eau, où la conductivité est plus importante, le métabolisme serait trop important pour un mammifère de petite dimension. Le plus petit mammifère marin est d'ailleurs le béé phoque, dont environ la moitié de la masse corporelle est constituée de graisse isolante !

3 — Modèle d'un fusible

1. On considère la tranche de fusible comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. En régime stationnaire, le bilan d'énergie interne s'écrit

$$0 = \delta^2 Q_{reçu} + \delta\mathcal{P}_{prod}\,\mathrm{d}t.$$

Le transfert thermique reçu pendant $\mathrm{d}t$ vaut

$$\delta^2 Q_{reçu} = \left[j_Q(x) - j_Q(x+\mathrm{d}x)\right] S\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}j_Q(x)}{\mathrm{d}x} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

soit avec la loi de Fourier

$$\delta^2 Q_{reçu} = \lambda \frac{\mathrm{d}^2 T(x)}{\mathrm{d}x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Le tronçon de longueur $\mathrm{d}x$ a pour résistance électrique

$$\delta R = \frac{\mathrm{d}x}{\gamma S}.$$

La puissance dissipée par effet Joule y est alors donnée par

$$\delta\mathcal{P}_{prod} = \delta R I^2 = \frac{\mathrm{d}x}{\gamma S} I^2.$$

Le bilan d'énergie s'écrit alors

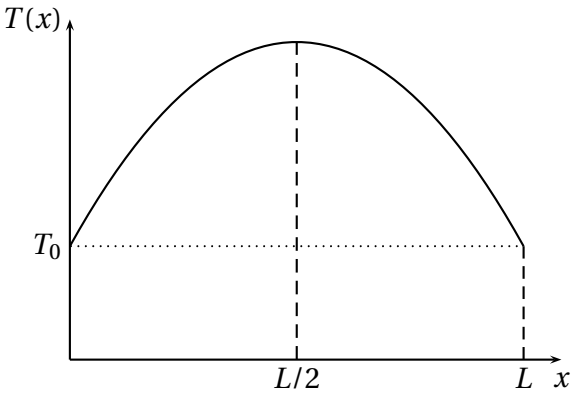
$$0 = \lambda \frac{\mathrm{d}^2 T(x)}{\mathrm{d}x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}x}{\gamma S} I^2\,\mathrm{d}t,$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} + \frac{I^2}{\lambda\gamma S^2} = 0}.$$

Avec la condition $T(0) = T(L) = T_0$, la solution s'écrit

$$\boxed{T(x) = T_0 + \frac{I^2}{2\lambda\gamma S^2} x(L-x)}.$$



2. La température est maximale au milieu du fusible, en $x = L/2$. En cas de dépassement de I_{max}, la rupture se produit donc en $x = L/2$.

On a alors

$$T_F = T_0 + \frac{I_{max}^2 L^2}{8\lambda\gamma S^2}$$

d'où

$$\boxed{S = \frac{I_{max} L}{2\sqrt{2\lambda\gamma(T_F - T_0)}}}.$$

Pour $I_{max} = 16\,\text{A}$, on calcule

$$S_{16} = \frac{16 \times 2{,}5 \times 10^{-2}}{2\sqrt{2 \times 1{,}2 \times 10^6 \times 65 \times (390-290)}} = 1{,}6 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

soit $\boxed{S_{16} = 1{,}6\ \text{mm}^2}$, ordre de grandeur tout à fait réaliste.

3. Le vecteur densité de flux thermique est donné par

$$j_Q(x) = -\lambda \frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{I^2}{2\gamma S^2}(L-2x)\,.$$

La puissance reçue par conduction en $x=0$ (donc transférée dans le sens $+\vec{e}_x$) vaut

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{th}}(0) = j_Q(0)S = -\frac{I^2 L}{2\gamma S}}\,.$$

On a $\mathcal{P}_{\text{th}}(0) < 0$: la puissance est évacuée vers l'extérieur. On calcule $\boxed{|\mathcal{P}_{\text{th}}| = 0{,}65\ \text{W}}$.

La puissance reçue par conduction en $x=L$ (donc transférée dans le sens $-\vec{e}_x$) vaut

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{th}}(L) = -j_Q(L)S = -\frac{I^2 L}{2\gamma S}}\,.$$

Le problème étant invariant par symétrie par rapport au milieu $x = L/2$ du fusible, on a comme attendu $\mathcal{P}_{\text{th}}(0) = \mathcal{P}_{\text{th}}(L)$.

La puissance électrique produite par effet Joule dans la tranche $[x, x+\mathrm{d}x]$ s'écrit

$$\delta\mathcal{P}_{\text{e}} = \delta R I^2 = \frac{I^2}{\gamma S}\mathrm{d}x\,.$$

La puissance électrique fournie à l'ensemble du fil s'écrit alors

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{e}} = \frac{I^2 L}{\gamma S}}\,.$$

Ce résultat était prévisible.

Le bilan d'énergie pour tout le fusible s'écrit

$$0 = \delta Q_{\text{reçu}} + \mathcal{P}_{\text{e}}\,\mathrm{d}t$$

avec $\delta Q_{\text{reçu}} = [\mathcal{P}_{\text{th}}(0) + \mathcal{P}_{\text{th}}(L)]\,\mathrm{d}t$, d'où

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{th}}(0) + \mathcal{P}_{\text{th}}(L) + \mathcal{P}_{\text{e}} = 0}\,.$$

4 — Température de la planète Mars

1. Le problème étant à symétrie sphérique, on a $T(M) = T(r)$ et $\vec{j}_Q(M) = j_Q(r)\,\vec{e}_r$.

Prenons comme système une coquille sphérique de rayon r et d'épaisseur $\mathrm{d}r$, avec $R_1 < r < R_2$. En régime stationnaire, le bilan enthalpique s'écrit

$$0 = +\Phi(r)\,\mathrm{d}t - \Phi(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,.$$

Le flux thermique à travers la sphère de rayon r est donc indépendant de son rayon, soit

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 j_Q(r) = -4\pi\lambda r^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,.$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda r^2}\,.$$

en séparant les variables, on peut écrire

$$\int_{T_{\text{n}}}^{T(r)} \mathrm{d}T = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda}\int_{R_1}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \qquad (1)$$

en notant T_{n} la température dans le noyau, d'où

$$T(r) = T_{\text{n}} + \frac{\Phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right).$$

On élimine le flux thermique en écrivant (1) entre les deux rayons du manteau :

$$\int_{T_{\text{n}}}^{T_{\text{s}}} \mathrm{d}T = -\frac{\Phi}{4\pi\lambda}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

où T_{s} est la température du sol, soit

$$T_{\text{s}} - T_{\text{n}} = \frac{\Phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

d'où

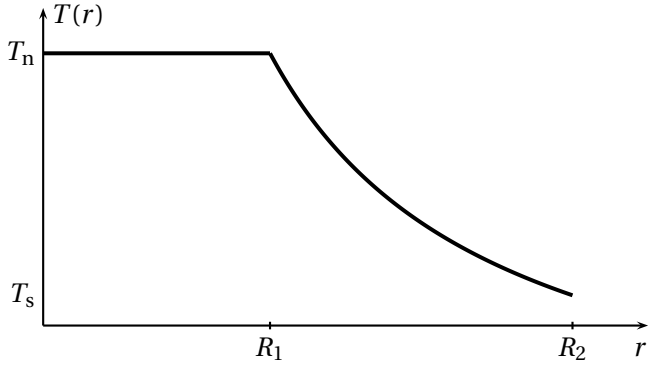
$$\frac{\Phi}{4\pi\lambda} = (T_{\text{n}} - T_{\text{s}})\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\,.$$

On a donc

$$\boxed{T(r) = T_{\text{n}} + (T_{\text{n}} - T_{\text{s}})\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)}\,.$$

➤ On vérifie que l'on retrouve bien $T(R_1) = T_{\text{n}}$ et $T(R_2) = T_{\text{s}}$.

Graphe :



2. La puissance dissipée par le noyau est donnée par le flux thermique Φ, soit

$$\Phi = 4\pi\lambda(T_{\text{n}} - T_{\text{s}})\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\,.$$

On calcule $\boxed{\Phi = 103\ \text{GW}}$.

Cette énergie trouve son origine dans des désintégrations radioactives au sein du noyau de la planète.

3. Au bout de 4 milliards d'année, on peut considérer que l'on est en régime permanent!
Considérons comme système la sphère de rayon r. En régime permanent, le bilan enthalpique s'écrit

$$0 = -\Phi(r)\,\mathrm{d}t + \frac{4}{3}\pi r^3 P_\mathrm{v}\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\Phi(r) = -4\pi r^2 \lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{4}{3}\pi r^3 P_\mathrm{v}.$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{rP_\mathrm{v}}{3\lambda}.$$

En notant $T_\mathrm{s} = T(R_2)$ la température au sol, on a

$$\boxed{T(r) = T_\mathrm{s} + \frac{P_\mathrm{v}}{6\lambda}(R_2^2 - r^2)}.$$

5 — Banc de Kofler

1. On considère comme système la tranche comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$. On effectue un bilan d'enthalpie pendant $\mathrm{d}t$ en régime stationnaire :

$$0 = \Phi(x)\,\mathrm{d}t - \Phi(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t - h(T(x) - T_\mathrm{a})a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

le transfert entre le banc et l'air se faisant à travers la surface $\mathrm{d}S = (a+2b)\,\mathrm{d}x \approx a\,\mathrm{d}x$ car $b \ll a$.
On a donc

$$0 = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - h(T(x) - T_\mathrm{a})a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

soit comme $\Phi(x) = ab j_\mathrm{th}(x)$

$$0 = -\frac{\mathrm{d}j_\mathrm{th}(x)}{\mathrm{d}x}ab - h(T(x) - T_\mathrm{a})a.$$

Avec la loi de Fourier on obtient

$$0 = \lambda \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} b - h(T(x) - T_\mathrm{a}),$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{h}{\lambda b}(T(x) - T_\mathrm{a}) = 0}.$$

En posant $\theta(x) = T(x) - T_\mathrm{a}$ et $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{\lambda b}{h}}}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\theta(x)}{\delta^2} = 0$$

dont la solution générale est de la forme

$$\theta(x) = B\,\mathrm{e}^{-x/\delta} + C\,\mathrm{e}^{x/\delta},$$

d'où le profil de température

$$\boxed{T(x) = T_\mathrm{a} + B\,\mathrm{e}^{-x/\delta} + C\,\mathrm{e}^{x/\delta}}.$$

2. La distance δ caractérise la variation de la température dans la barre. On peut considérer cette dernier infinie si $\boxed{L \gg \delta}$ (dans la pratique si $L > 5\delta$ l'approximation est valide).

La température ne pouvant diverge, on doit alors avoir $\boxed{C = 0}$, soit

$$T(x) = T_\mathrm{a} + B\,\mathrm{e}^{-x/\delta}.$$

On ne connaît pas la température en $x = 0$, mais on connaît la puissance reçue : c'est la puissance dissipée par la résistance R alimentée sous une tension efficace U, donnée par

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

Par continuité du flux thermique en $x = 0$ à travers la section ab, on peut écrire

$$P = \Phi(x=0) = -\lambda ab \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x=0) = \lambda ab \frac{B}{\delta},$$

d'où

$$\boxed{B = \frac{U^2\delta}{\lambda abR}}.$$

3. Dans le banc de longueur L, le temps caractéristique des variations de températures est $\tau^* = \frac{\rho c}{\lambda}L^2$. On peut considérer que la température dans le banc ne dépend pas de la température si, du fait de son inertie thermique, il n'a « pas le temps » de suivre les variations de températures de la résistances, qui se font avec la période $1/f$ où $f = 50$ Hz. Il faut donc

$$\frac{\lambda}{\rho c L^2} \ll f.$$

En considérant un banc en aluminium, on a $\rho = 2{,}7 \times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $c = 897\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ *et* $\lambda = 237\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$*; avec* $L = 0{,}4$ m *on obtient* $f \gg 6 \times 10^{-4}$ Hz, *ce qui est largement vérifié avec* $f = 50$ Hz.

4. La température dépend de l'abscisse x sur la banc. Les cristaux restant solides jusqu'à une abscisse x_f, on en déduit la température de fusion

$$T_{fus} = T_a + \frac{U^2\delta}{\lambda abR}\,e^{-x_f/\delta}\,.$$

Cette température dépendant de la température extérieure T_a et du coefficient d'échange h, il est nécessaire d'étalonner le banc avant chaque utilisation.

La température de fusion maximale détectable est

$$T_{fus,max} = T_a + \frac{U^2\delta}{\lambda abR}\,.$$

La valeur de R permet de choisir la valeur de la température maximale de fusion détectable.

5. On a

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{U^2}{\lambda abR}\,e^{-x/\delta}\,.$$

Une incertitude Δx sur la lecture de la position se traduit par une incertitude sur la température

$$\Delta T = \frac{U^2}{\lambda abR}\,e^{-x/\delta}\,\Delta x$$

soit

$$\Delta T = \frac{T_{fus} - T_a}{\delta}\,\Delta x\,.$$

L'incertitude augmente quand T_{fus} augmente.

6 — Conduction thermique

1. Bilan classique en régime stationnaire sur la tranche comprise entre x et $x+dx$:

$$0 = \Phi(x) - \Phi(x+dx) - h[T(x) - T_a]2\pi R\,dx\,,$$

avec $\Phi(x) = -\lambda\dfrac{dT}{dx}\pi R^2$, d'où

$$0 = \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R}[T(x) - T_a]\,.$$

On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{\lambda R}{2h}}$ à pâtir de l'équation différentielle. Le candidat pourra poser $\theta(x) = T(x) - T_a$ pour se ramener à une équation différentielle homogène.

La solution générale est

$$T(x) = T_a + A\,e^{-x/\delta} + B\,e^{x/\delta}\,.$$

2. La température est imposée à l'extrémité $x = 0$, soit $T(0) = T_0 = T_a + A + B$.

Le flux thermique est continu à l'extrémité $x = L$, soit

$$-\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_L = h[T(L) - T_a]\,,$$

qui donne

$$\frac{\lambda}{\delta}\left[A\,e^{-L/\delta} - B\,e^{L/\delta}\right] = h\left[T_a + A\,e^{-L/\delta} + B\,e^{L/\delta}\right].$$

3. Cette hypothèse revient à dire $L \gg \delta$. On obtient $T(x) = T_a + (T_0 - T_a)\,e^{-x/\delta}$.

4. La température diminuant le long de la tige, la paraffine est évidemment fondue entre $x = 0$ et x_f! L'abscisse de fusion est donnée par

$$T(x_f) = T_a + (T_0 - T_a)\,e^{-x_f/\delta} = T_f\,,$$

d'où

$$x_f = \delta\ln\left(\frac{T_0 - T_a}{T_f - T_a}\right).$$

Pour les deux tiges, on a donc $\dfrac{x_1}{\delta_1} = \dfrac{x_2}{\delta_2}$, soit $\dfrac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \dfrac{x_2}{\sqrt{\lambda_2}}$, d'où $\lambda_2 = \lambda_1\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 = 65{,}6\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

5. Le ventilateur augmente le flux conducto-convectif (sa partie convective), donc h, donc δ diminue ; les abscisses de fusions sont donc plus petites.

7 — Barre parcourue par un courant

1. Le bilan d'énergie appliqué à la tranche $[x, x+dx]$ en régime stationnaire s'écrit

$$0 = \Phi(x)\,dt - \Phi(x+dx)\,dt = -\frac{d\Phi}{dx}\,dx\,dt\,,$$

d'où $\Phi(x) = \Phi_0$ uniforme. Comme $\Phi = j_Q(x)S$, j_Q est uniforme, et d'après la loi de Fourier on a donc

$$\lambda\frac{dT}{dx} = \frac{T(L) - T(0)}{L} = \frac{T_2 - T_1}{L}\,,$$

d'où

$$\boxed{T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1}\,.$$

La puissance fournie par la source en $x = L$ est donnée par le flux thermique en $x = L$ (qui a la même valeur pour tout x d'ailleurs), soit

$$P_2 = -\lambda\frac{dT}{dx}S$$

d'où

$$\boxed{P_2 = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)}\,.$$

2. Il faut ajouter un bilan d'énergie l'énergie créée dans la tranche $[x, x+\mathrm{d}x]$ pendant $\mathrm{d}t$ par effet Joule :

$$\mathcal{P}_{\text{prod}}\,\mathrm{d}t = \frac{\rho \mathrm{d}x}{S} I^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Le bilan d'énergie s'écrit alors

$$0 = \lambda \frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{\rho \mathrm{d}x}{S} I^2\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho I^2}{\lambda S^2}\,.$$

On en déduit

$$T(x) = -\frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}x^2 + Ax + B\,.$$

On a d'une part

$$T(0) = T_1 = B$$

et d'autre part

$$T(L) = T_2 = -\frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}L^2 + AL + T_1$$

d'où

$$A = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}L.$$

On a donc

$$T(x) = -\frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}x^2 + \frac{T_2 - T_1}{L}x + \frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}Lx + T_1\,,$$

soit

$$\boxed{T(x) = \frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}x(L-x) + \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1}\,.$$

La puissance à l'abscisse x est donnée par

$$P(x) = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} S = \frac{\rho I^2}{S}x - \frac{\rho I^2}{2S}L + \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$$

soit

$$\boxed{P(x) = \frac{\rho I^2}{S}\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)}\,.$$

3. La puissance cédée à l'extrémité $x = L$ vaut alors

$$\boxed{P_2 = \frac{\rho I^2 L}{2S} + \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)}\,.$$

Le premier terme correspond à la puissance évacuée due à l'effet Joule, le second terme à la puissance due à la différence de température entre les extrémités de la barre.

4. En $x = 0$, on obtient

$$\boxed{P_1 = -\frac{\rho I^2 L}{2S} + \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)}\,.$$

Le terme dû à la différence de température est inchangé (le flux correspondant est uniforme) ; le terme dû à l'effet Joule est changé de signe : cette puissance est ici aussi *évacuée* de la barre.

5. La température va évoluer de façon irréversible vers un état d'équilibre caractérisé par une température uniforme T_f dans la barre.

Considérons une tranche $[x, x+\mathrm{d}x]$ de la barre ; un bilan d'énergie entre l'état initial où l'on isole la barre et l'état final d'équilibre s'écrit :

$$\mathrm{d}U = \rho c S\,\mathrm{d}x[T_\mathrm{f} - T(x)]\,.$$

L'énergie interne étant une grandeur extensive, la variation d'énergie interne entre ces deux états pour la totalité de la barre s'obtient en sommant le terme précédent sur la totalité de la barre, soit :

$$\Delta U = \int_0^L \rho c S[T_\mathrm{f} - T(x)]\mathrm{d}x\,.$$

La barre étant calorifugée, le premier principe conduit à $\Delta U = 0$, d'où après simplification

$$\int_0^L [T_\mathrm{f} - T(x)]\mathrm{d}x = 0 = LT_\mathrm{f} - \int_0^L T(x)\mathrm{d}x$$

La température finale est donc donnée par

$$T_\mathrm{f} = \frac{1}{L}\int_0^L T(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

➤ On remarque que c'est l'expression de la valeur moyenne de la température $T(x)$ sur la barre à l'instant initial.

On calcule

$$T_\mathrm{f} = \frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}\left(\frac{L^3}{2L} - \frac{L^3}{3L}\right) + \frac{T_2 - T_1}{L}\frac{L^2}{2L} + T_1$$

soit

$$\boxed{T_\mathrm{f} = \frac{\rho L^2 I^2}{12\lambda S^2} + \frac{T_1 + T_2}{2}}\,.$$

8 — Compost

1. Effectuons un bilan d'énergie en régime stationnaire pour une tranche de section S, comprise entre z et $z+\mathrm{d}z$:

$$0 = \Phi(z)\,\mathrm{d}t - \Phi(z+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t + Q\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t + Q\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t,$$

soit comme $\Phi(z) = j_Q(z)S = -\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}S$

$$0 = \lambda\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2}S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t + Q\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right)S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t.$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{Q}{\lambda}\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right).$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{QH}{\lambda\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) + A.$$

Nous pouvons utiliser à ce stade la condition en $z=0$: la surface au sol étant parfaitement isolé, le flux thermique est nul en $z=0$, soit

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z=0) = 0 = \frac{QH}{\lambda\pi} + A.$$

On a donc $A = -\dfrac{QH}{\lambda\pi}$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{QH}{\lambda\pi}\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) - \frac{QH}{\lambda\pi}.$$

On en déduit

$$T(z) = \frac{QH^2}{\lambda\pi^2}\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) - \frac{QH}{\lambda\pi}z + B.$$

La condition au sommet du tas de compost, en $z=H$, est donné par la continuité du flux thermique, donné d'un côté de l'interface par la loi de Fourier, et de l'autre par la loi de Newton :

$$-\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z=H) = h[T(H) - T_0]$$

soit

$$-\lambda\left[-\frac{QH}{\lambda\pi} - \frac{QH}{\lambda\pi}\right] = h\left[-\frac{QH^2}{\lambda\pi} + B - T_0\right].$$

On a donc

$$B = \frac{2QH}{h\pi} + \frac{QH^2}{\lambda\pi} + T_0,$$

d'où

$$T(z) = \frac{QH^2}{\lambda\pi^2}\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) - \frac{QH}{\lambda\pi}z + \frac{2QH}{h\pi} + \frac{QH^2}{\lambda\pi + T_0}.$$

La température dans le tas de compost est donnée par

$$\boxed{T(z) = \frac{QH^2}{\lambda\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) + 1 - \frac{z}{H} + \frac{2\lambda}{hH}\right] + T_0}.$$

La température est maximum en $z=0$ (dérivée nulle par nullité du flux) et vaut

$$T_{\max} = \frac{QH^2}{\lambda\pi}\left[1 + \frac{2\lambda}{hH}\right] + T_0.$$

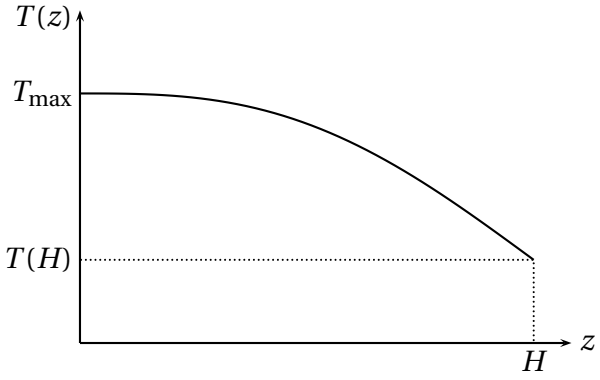
La température au sommet vaut

$$T(H) = T_{\min} = \frac{QH^2}{\lambda\pi}\frac{2\lambda}{hH} + T_0 = \frac{2QH}{\pi h} + T_0.$$

Pour $0 < z < H$, on a

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{QH}{\lambda\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) - 1\right] < 0.$$

La température diminue vers le haut du tas (le flux thermique est partout dirigé vers le haut).



2. La puissance dégagée par le compost pourrait se calculer directement à partir de la puissance volumique donnée (en intégrant sur tout le volume du tas). Il est cependant plus simple d'effectuer un bilan d'énergie en prenant comme système le tas de compost entier.

En régime stationnaire, pendant $\mathrm{d}t$, on a

$$0 = \delta Q_{\text{reçu}}\,\mathrm{d}t + \mathcal{P}\,\mathrm{d}t,$$

avec

$$\delta Q_{\text{reçu}} = -\Phi(x=H)\,\mathrm{d}t = \lambda S\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z=H)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit

$$\mathcal{P} = -\lambda S\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z=H) = -\frac{QHS}{\pi}[\cos(\pi) - 1]$$

soit

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{2QHS}{\pi}}.$$

➤ On obtient le même résultat bien sûr par le calcul de

$$\mathcal{P} = \int_0^H Q \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) S \,\mathrm{d}z.$$

➤ Le volume du tas étant SH, la puissance volumique moyenne créée vaut $\dfrac{2Q}{\pi}$.

9 — Diffusion thermique instationnaire

1. On vérifie que

$$\boxed{T(0,0) = T_0} \quad \text{et} \quad \boxed{T(L,0) = T_0}.$$

2. Le problème unidimensionnel sans source est régi par l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

Écrivons que $T(x,t) = T_0 + f(x)g(t)$ vérifie cette équation :

$$f(x)g'(t) = af''(x)g(t)$$

soit

$$a\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)}.$$

Le premier membre de cette égalité est indépendant de t, tandis que le second membre est indépendant de x (par construction) ; chacun de ses membres ne dépend donc ni de t ni de x : ils sont donc égaux à une constante.
On a donc d'une part

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = A,$$

d'où

$$g(t) = g(0)\,\mathrm{e}^{At}.$$

Physiquement, $g(t)$ ne peut diverger ; on doit donc avoir $A < 0$. Comme A est homogène à l'inverse d'un temps, on pose $A = -1/\tau$, et

$$g(t) = g(0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

On a alors

$$a\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{1}{\tau},$$

soit

$$f''(x) + \frac{1}{a\tau}f(x) = 0.$$

On en déduit

$$f(x) = \alpha \sin\left(\frac{x}{\sqrt{a\tau}}\right) + \beta\cos\left(\frac{x}{\sqrt{a\tau}}\right).$$

La condition initiale s'écrit, en posant [1] $g(0) = 1$

$$T(x,0) = T_0 + \theta\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = T_0 + f(x)$$

d'où

$$f(x) = \alpha \sin\left(\frac{x}{\sqrt{a\tau}}\right) + \beta\cos\left(\frac{x}{\sqrt{a\tau}}\right) = \theta\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

On en déduit $\beta = 0$, $\alpha = \theta$ et $\dfrac{1}{\sqrt{a\tau}} = \dfrac{\pi}{L}$, d'où $\tau = \dfrac{L^2}{a\pi^2}$.
On a donc

$$\boxed{g(t) = \exp\left(-\frac{a\pi^2}{L^2}t\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{f(x) = \theta\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}.$$

La température dans la barre s'écrit donc

$$\boxed{T(x,t) = T_0 + \theta\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\exp\left(-\frac{a\pi^2}{L^2}t\right)}.$$

3. Le vecteur densité de courant thermique est donné par la loi de Fourier

$$j_Q(x,t) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda\theta\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\exp\left(-\frac{a\pi^2}{L^2}t\right).$$

En notant S la section des plaques, le flux thermique en x est donné par

$$\boxed{\Phi(x,t) = -\lambda S\theta\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\exp\left(-\frac{a\pi^2}{L^2}t\right)}$$

10 — Solidification d'une goutte

1. Prenons comme système la goutte de rayon R. Le premier principe pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\delta U = \delta Q_{\text{reçu}}.$$

On a d'une part

$$\mathrm{d}U = \frac{4}{3}\pi R^3\rho c\,\mathrm{d}T = \frac{4}{3}\pi R^3\rho c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

et d'autre part

$$\delta Q_{\text{reçu}} = -h4\pi R^2[T(t) - T_\mathrm{a}]\,\mathrm{d}t.$$

Après simplification, on obtient

$$\boxed{\rho c R\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -3h[T(t) - T_\mathrm{a}]}.$$

1. L'éventuelle constante multiplicative sera dans la fonction f.

2. L'équation différentielle précédente s'écrit

$$\tau\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+T(t)=T_\mathrm{a}\quad\text{avec}\quad\tau=\frac{\rho cR}{3h}.$$

On en déduit

$$T(t)=A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+T_\mathrm{a}.$$

Avec la condition initiale $T(0)=T_\mathrm{e}$ on obtient

$$\boxed{T(t)=(T_\mathrm{e}-T_\mathrm{a}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+T_\mathrm{a}}.$$

3. De la condition

$$(T_\mathrm{e}-T_\mathrm{a}\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau}+T_\mathrm{a}=T_\mathrm{f}$$

on déduit

$$\boxed{t_1=\tau\ln\left(\frac{T_\mathrm{e}-T_\mathrm{a}}{T_\mathrm{f}-T_\mathrm{a}}\right)}.$$

On calcule $\boxed{t_1=50\text{ s}}$.

4. Décrivons l'évolution :

état initial masse m d'eau liquide à $T_\mathrm{f}=-5$ °C;

état final masse xm d'eau liquide et $(1-x)m$ d'eau solide à $T_0=0$ °C.

L'ensemble est isolé; l'énergie nécessaire à augmenter la température de la goutte provient de la solidification, exothermique.

On considère l'état intermédiaire fictif où l'eau est liquide à 0 °C. La variation d'enthalpie de la goutte entre l'état initial et cet état est

$$\Delta H_1=mc(T_0-T_\mathrm{f}).$$

La variation d'enthalpie entre cet état et l'état final correspond à la solidification d'une masse $(1-x)m$ d'eau :

$$\Delta H_2=-(1-x)m\Delta_\mathrm{fus}h$$

L'enthalpie étant une fonction d'état, le bilan pour toute l'évolution s'écrit

$$\Delta H=0=\Delta H_1+\Delta H_2$$

soit

$$mc(T_0-T_\mathrm{f})-(1-x)m\Delta_\mathrm{fus}h=0.$$

On en déduit

$$\boxed{x=1-\frac{c(T_0-T_\mathrm{f})}{\Delta_\mathrm{fus}h}}.$$

On calcule $\boxed{x=0{,}94}$: il reste 94 % de la masse de la goutte sous forme liquide.

La goutte d'eau est dans un état de surfusion : elle est liquide à une température $T_\mathrm{f}=-5$ °C où elle devrait être solide. Cet état est métastable : une petite perturbation (choc, impureté) déclenche le changement d'état. C'est le principe des pluies verglaçantes.

5. La dernière phase est une solidification de la goutte isobare, donc isotherme (propriété du changement d'état). La température de la goutte étant constante, son enthalpie ne varie pas ($\mathrm{d}H=mc\,\mathrm{d}T=0$). Le premier principe appliqué à cette dernière phase de durée Δt s'écrit alors

$$0=Q_\text{reçu}+Q_\text{prod}$$

soit

$$0=-h4\pi R^2(T_0-T_\mathrm{a})\Delta t+x\frac{4}{3}\pi R^3\rho\Delta_\mathrm{fus}h.$$

On en déduit

$$\boxed{\Delta t=x\frac{\rho R\Delta_\mathrm{fus}h}{3h(T_0-T_\mathrm{a})}}.$$

On calcule $\boxed{\Delta t=1{,}4\times10^2\text{ s}}$ soit un peu plus de 2 minutes.

11 — Neige artificielle

1. On fait un bilan d'énergie à la goutte entre t et $t+\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}U=\delta Q_\text{reçu}$$

soit

$$\frac{4}{3}\pi R^3\rho c_\ell\,\mathrm{d}T=-\Phi\,\mathrm{d}t=-h[T(t)-T_\mathrm{e}]4\pi R^2\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-\frac{3h}{\rho c_\ell R}[T(t)-T_\mathrm{e}].$$

La température suit donc l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\frac{T(t)}{\tau}=\frac{T_\mathrm{e}}{\tau}}\quad\text{avec}\quad\boxed{\tau=\frac{\rho c_\ell R}{3h}}.$$

2. La solution de cette équation différentielle est

$$T(t)=[T_\mathrm{i}-T_\mathrm{e}]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+T_\mathrm{e}.$$

On a

$$T(t_0)=[T_\mathrm{i}-T_\mathrm{e}]\,\mathrm{e}^{-t_0/\tau}+T_\mathrm{e},$$

d'où

$$\boxed{t_0=\tau\ln\left(\frac{T_\mathrm{i}-T_\mathrm{e}}{T(t_0)-T_\mathrm{e}}\right)}.$$

On calcule

$$\tau=\frac{10^3\times4{,}2\times10^3\times0{,}2\times10^{-3}}{3\times65}=4{,}3\text{ s}$$

puis

$$\boxed{t_0=3{,}9\text{ s}}.$$

3. La goutte se retrouve liquide à la température de −5 °C, température à laquelle son état stable est solide. C'est ce qu'on appelle le phénomène de surfusion. L'eau va rapidement évoluer vers son état stable en se solidifiant partiellement.

L'évolution étant rapide, on peut la supposer adiabatique (les transferts thermiques n'ont pas le temps de se faire), et le premier principe appliqué à la goutte s'écrit

$$\Delta H = 0\,.$$

L'enthalpie étant une fonction d'état, nous pouvons décomposer l'évolution en deux étapes fictives pour calculer sa variation :

étape 1 : variation de température de $T(t_0)$ à $T_{\text{fus}} = 0\,°\text{C}$, avec une variation d'enthalpie ΔH_1 ;

étape 2 : solidification d'une masse $(1-x)m$ d'eau, avec une variation d'enthalpie ΔH_2.

On a donc

$$\Delta H_1 = mc_\ell[T_{\text{fus}} - T(t_0)]$$

et pour la solidification

$$\Delta H_2 = (1-x)m(-\Delta_{\text{fus}}H)\,.$$

De $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$ on tire

$$mc_\ell[T_{\text{fus}} - T(t_0)] - (1-x)m\Delta_{\text{fus}}H = 0$$

d'où

$$\boxed{x = 1 - \frac{c_\ell[T_{\text{fus}} - T(t_0)]}{\Delta_{\text{fus}}H}}\,.$$

On calcule $\boxed{x = 0{,}94}$.

4. La solidification du reste de l'eau liquide se fait à la température T_0.

Appliquons le premier principe à la goutte pendant la durée t_1 de la solidification de la masse $\mathrm{d}m$:

$$\Delta H = -\mathrm{d}m\Delta_{\text{fus}}H = -4\pi R^2 h(T_0 - T_{\text{e}})\,t_1$$

avec

$$\mathrm{d}m = xm = x\frac{4}{3}\pi\rho R^3\,,$$

d'où

$$\boxed{t_1 = \frac{\rho x R\Delta_{\text{fus}}H}{3h[T_0 - T_{\text{e}}]}}\,.$$

On calcule $\boxed{t_1 = 21{,}3\text{ s}}$.

12 — Transfert thermique dans une poutre

1. Effectuons un bilan enthalpique pendant $\mathrm{d}t$ à la tranche de poutre comprise entre z et $z+\mathrm{d}z$:

$$0 = \Phi(z)\,\mathrm{d}t - \Phi(z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}t - 2\pi ah[T(z) - T_{\text{a}}]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$

soit

$$0 = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} - 2\pi ah[T(z) - T_{\text{a}}]\,.$$

La loi de Fourier conduit à

$$\lambda\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2}\pi a^2 - 2\pi ah[T(z) - T_{\text{a}}] = 0\,.$$

En posant $\theta(z) = T(z) - T_{\text{a}}$, cette équation est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\theta(z)}{\delta^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}}$$

où δ est une longueur caractéristique.

Compte tenu de la parité des conditions aux limites, on a intérêt à écrire la solution sous la forme

$$\theta(z) = A\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right) + B\sinh\left(\frac{z}{\delta}\right)\,.$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$T_{\text{m}} - T_{\text{a}} = A\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right) + B\sinh\left(\frac{L}{2\delta}\right)$$
$$T_{\text{m}} - T_{\text{a}} = A\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right) - B\sinh\left(\frac{L}{2\delta}\right)$$

La différence conduit à

$$0 = 2B\sinh\left(\frac{L}{2\delta}\right)$$

d'où $B = 0$ (ce qui était prévisible, la solution devant être paire), et la somme donne

$$2(T_{\text{m}} - T_{\text{a}}) = 2A\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)$$

d'où

$$A = \frac{T_{\text{m}} - T_{\text{a}}}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}\,.$$

On a donc

$$\boxed{T(z) = T_{\text{a}} + (T_{\text{m}} - T_{\text{a}})\frac{\cosh\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}}\,.$$

➤ On peut aussi écrire la solution générale sous la forme

$$\theta(z) = A\mathrm{e}^{z/\delta} + B\mathrm{e}^{-z/\delta}.$$

Les conditions aux limites s'écrivent alors

$$T_\mathrm{m} - T_\mathrm{a} = A\mathrm{e}^{L/2\delta} + B\mathrm{e}^{-L/2\delta}$$
$$T_\mathrm{m} - T_\mathrm{a} = A\mathrm{e}^{-L/2\delta} + B\mathrm{e}^{L/2\delta}$$

Il est plus calculatoire de déterminer les constantes A et B (qui sont différentes des constantes précédentes).

2. Soit Φ_s le transfert thermique sortant de la poutre vers l'air.

Appliquons le premier principe à l'ensemble de la poutre :

$$0 = \Phi(-L/2)\,\mathrm{d}t - \Phi(L/2)\,\mathrm{d}t - \Phi_\mathrm{s}\,\mathrm{d}t$$

où $\Phi(-L/2)$ est le flux entrant en $z = -L/2$ et $\Phi(L/2)$ est le flux sortant en $z = L/2$.

On a

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{T_\mathrm{m} - T_\mathrm{a}}{\delta}\frac{\sinh\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}$$

d'où

$$\Phi(z) = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\pi a^2 = -\frac{\lambda\pi a^2}{\delta}(T_\mathrm{m} - T_\mathrm{a})\frac{\sinh\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\delta}\right)}.$$

On a donc

$$\Phi(L/2) = -\frac{\lambda\pi a^2}{\delta}(T_\mathrm{m} - T_\mathrm{a})\tanh\left(\frac{L}{2\delta}\right) = -\Phi(-L/2)$$

d'où le flux sortant total

$$\boxed{\Phi_\mathrm{s} = \frac{2\lambda\pi a^2}{\delta}(T_\mathrm{m} - T_\mathrm{a})\tanh\left(\frac{L}{2\delta}\right).}$$

➤ On peut mener un calcul direct de ce flux en intégrant le flux sortant, donné par la loi de Newton, à travers la section de la tranche $[x, x+\mathrm{d}x]$:

$$\Phi_\mathrm{s} = \int_{-L/2}^{L/2}(T(z) - T_\mathrm{a})2\pi a\,\mathrm{d}z.$$

---

13 — La fine ou l'épaisse ?

1. Bilan d'énergie sur une tranche $[x, x+\mathrm{d}x]$ en régime stationnaire :

$$\Phi(x) - \Phi(x+\mathrm{d}x) - h[T(x) - T_\mathrm{a}]2(a+b)\,\mathrm{d}x = 0$$

d'où en linéarisant et en utilisant la loi de Fourier

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{T(x) - T_\mathrm{a}}{\delta^2} = 0}$$

avec

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{\lambda ab}{2h(a+b)}}}$$

homogène à une longueur d'après l'équation différentielle.

2. Solution générale

$$T(x) = A\mathrm{e}^{-x/\delta} + B\mathrm{e}^{x/\delta} + T_\mathrm{a}.$$

Ailette « infinie » si $L \gg \delta$. On a donc $B = 0$, et avec $T(0) = T_0$ on obtient

$$\boxed{T(x) = (T_0 - T_\mathrm{a})\mathrm{e}^{-x/\delta} + T_\mathrm{a}}.$$

3. On a

$$j_Q(x) = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \lambda\frac{T_0 - T_\mathrm{a}}{\delta}\mathrm{e}^{-x/\delta}.$$

Le flux total évacué est donné par le flux entrant en $x = 0$ (on peut le justifier par un bilan d'énergie en prenant comme système la totalité de l'ailette), soit

$$\Phi_\mathrm{tot} = j_Q(0)ab.$$

On obtient

$$\Phi_\mathrm{tot} = \frac{\lambda}{\delta}(T_0 - T_\mathrm{a})ab = \lambda(T_0 - T_\mathrm{a})ab\sqrt{\frac{2h(a+b)}{\lambda ab}}$$
$$= (T_0 - T_\mathrm{a})\sqrt{2h\lambda ab(a+b)}.$$

Le flux total est proportionnel à $\sqrt{ab(a+b)}$. Le rapport des flux est donné par

$$\frac{\Phi_\mathrm{fine}}{\Phi_\mathrm{épaisse}} = \frac{\sqrt{ab(a+b)}}{\sqrt{a'b'(a'+b')}} = \frac{2{,}28}{1{,}4} = 2{,}2.$$

L'ailette fine permet d'évacuer plus de deux fois plus d'énergie que l'ailette à section carrée.

4. Quand L est « grand » devant δ, on a $T(x) \approx T_\mathrm{a}$ et l'ailette ne sert plus à rien. Compte tenu du terme $\mathrm{e}^{-x/\delta}$, on peut se limiter à $L = 5\delta$ par exemple (ou $L = 3\delta$).

Il vaut mieux donc plusieurs ailettes courtes en parallèle qu'une ailette longue, et prendre des ailettes les plus fines possibles. La photographie confirme ces choix.

---

14 — Ailette de refroidissement

1. Nous allons chercher la puissance évacuée par une ailette. On effectue un bilan d'énergie pendant $\mathrm{d}t$ sur la tranche comprise entre x et $s+\mathrm{d}x$ en régime stationnaire :

$$\begin{aligned}0 &= \Phi(x)\,\mathrm{d}t - \Phi(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t - \delta\Phi_{\text{lat}}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - h[T(x)-\theta_\text{e}]2\pi R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}\pi R^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - h[T(x)-\theta_\text{e}]2\pi R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2h}{\lambda R}[T(x)-\theta_\text{e}] = 0\,.$$

En posant la distance caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}},$$

la solution générale de l'équation différentielle est

$$T(x) = \theta_\text{e} + A\,\mathrm{e}^{-x/\delta} + B\,\mathrm{e}^{x/\delta}\,.$$

Nous allons faire l'hypothèse que le modèle de l'ailette infinie peut s'appliquer (on discutera de cette hypothèse *a posteriori*). On doit alors avoir $B=0$, et la condition à la limite $T(0)=\theta_0$ permet d'écrire

$$T(x) = \theta_\text{e} + (\theta_0-\theta_\text{e})\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\,.$$

La puissance totale évacuée par l'ailette est donnée par le flux thermique à travers sa section en contact avec le moteur :

$$\Phi_1 = \Phi(0) = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x=0)\pi R^2\,.$$

➤ *Pour s'en convaincre, effectuons un bilan d'énergie en considérant comme système la totalité de l'ailette. En régime stationnaire, on peut écrire en notant* $\Phi_{\text{tot}}>0$ *le flux total sortant de l'ailette (à travers sa face latérale et son extrémité)*

$$0 = +\Phi(x=0)\,\mathrm{d}t - \Phi_{\text{tot}}\,\mathrm{d}t$$

d'où $\Phi_{\text{tot}} = \Phi(x=0)$.

On calcule

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{\theta_0-\theta_\text{e}}{\delta}\,\mathrm{e}^{-x/\delta},$$

d'où

$$\Phi_1 = \frac{\lambda(\theta_0-\theta_\text{e})}{\delta}\pi R^2 = \lambda(\theta_0-\theta_\text{e})\sqrt{\frac{2h}{\lambda R}}\pi R^2\,.$$

La puissance totale dissipée par une ailette vaut donc

$$\Phi_1 = \sqrt{\frac{2h\lambda}{R}}(\theta_0-\theta_\text{e})\pi R^2\,.$$

On calcule $\Phi_1 = 4{,}8$ W.

Il faut donc 9 ailettes pour évacuer la puissance $\boldsymbol{\Phi_\text{T}} = \mathbf{40}$ W.

Discussion : l'hypothèse de l'ailette infinie est-elle valide ? Elle revient à considérer que la longueur de la tige est grande devant la distance caractéristique de l'évolution de la température dans celle-ci : $L \gg \delta$.

On calcule $\delta = 6{,}3$ cm. *L'approximation* $\delta \ll L$ *semble osée, mais des deux grandeurs apparaissent dans le terme* $\mathrm{e}^{-L/\delta} = 0{,}09$ *qui est « assez petit » devant 1. L'hypothèse, sans être largement vérifiée, est acceptable.*

2. On pourrait améliorer le système :

— en utilisant un ventilateur pour se mettre en situation de ventilation forcée ; h est alors plus élevé, ainsi que la puissance évacuée par une ailette ;

— en prenant des ailettes de profil différent, qui augmente la surface d'échange pour une section donnée.

---

15 — Production d'entropie

1. En régime stationnaire, l'entropie de l'élément de longueur $\mathrm{d}x$ ne varie pas dans le temps. Sa variation pendant $\mathrm{d}t$ est donc nulle et le bilan d'entropie s'écrit

$$0 = \delta^2 S_{\text{reçu}} + \delta^2 S_{\text{créé}}\,.$$

L'élément reçoit en x le transfert thermique

$$\delta Q(x) = j_Q(x) A\,\mathrm{d}t$$

à travers sa frontière à la température $T(x)$; l'entropie reçue en x vaut donc

$$\delta S_{\text{reçu},x} = \frac{\delta Q(x)}{T(x)} = \frac{j_Q(x)}{T(x)}A\,\mathrm{d}t\,.$$

L'élément *reçoit* en $x+\mathrm{d}x$ le transfert thermique

$$\delta Q(x+\mathrm{d}x) = -\,j_Q(x+\mathrm{d}x)A\,\mathrm{d}t$$

à travers sa frontière à la température $T(x+\mathrm{d}x)$; l'entropie reçue en $x+\mathrm{d}x$ vaut donc

$$\delta S_{\text{reçu},x+\mathrm{d}x} = \frac{\delta Q(x+\mathrm{d}x)}{T(x+\mathrm{d}x)} = -\frac{j_Q(x+\mathrm{d}x)}{T(x+\mathrm{d}x)} A\,\mathrm{d}t\,.$$

L'entropie totale reçue s'écrit alors

$$\begin{aligned}\delta^2 S_{\text{reçu}} &= \delta S_{\text{reçu},x+\mathrm{d}x} + \delta S_{\text{reçu},x} \\ &= -\left[\frac{j_Q(x+\mathrm{d}x)}{T(x+\mathrm{d}x)} - \frac{j_Q(x)}{T(x)}\right] A\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{j_Q(x)}{T(x)}\right] A\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

En régime stationnaire, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}j_Q(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

Le flux thermique est alors indépendant de x, soit $j_Q(x) = j_Q$. On a alors

$$\begin{aligned}\delta^2 S_{\text{reçu}} &= -A j_Q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{T(x)}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= j_Q \frac{1}{T^2(x)} \frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} A\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Avec la loi de Fourier, $j_Q = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}$ et

$$\boxed{\delta^2 S_{\text{reçu}} = -\frac{\lambda}{T^2(x)}\left(\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 A\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}\,.$$

2. Le terme de production d'entropie s'écrivant $\delta^2 S_{\text{créé}} = \sigma_S A\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$, le bilan d'entropie conduit à

$$\boxed{\sigma_S(x) = \frac{\lambda}{T^2(x)}\left(\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,.$$

On a bien $\boxed{\sigma_S(x) > 0}$, ce qui traduit le caractère irréversible du transfert thermique.

Nous en en présence d'un **état stationnaire hors d'équilibre** : les grandeurs intensives ne dépendent pas du temps, mais ce n'est pas un état d'équilibre car elle ne sont pas uniforme : il y a un gradient de température, donc un flux thermique dont le sens s'inverserait si on « passait le film à l'envers ».

Le gradient de température est uniforme en régime stationnaire :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{T_2 - T_1}{L}\,.$$

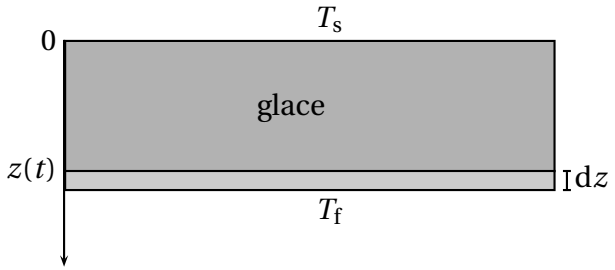
Le taux de production d'entropie est donc maximal à l'extrémité où la température est la plus basse, c'est-à-dire en $x = 0$; on a

$$\boxed{\sigma_{S,\max} = \frac{\lambda(T_2 - T_1)^2}{L^2 T_1^2}}\,.$$

On calcule $\boxed{\sigma_{S,\max} = 1{,}78\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot m^{-3}\cdot s^{-1}}}$.

16 — Gel d'un lac

1. Représentons la situation :



Un bilan d'énergie dans la glace conduit à l'équation de la chaleur (problème unidimensionnel sans source) :

$$\rho_g c_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,.$$

Les conditions aux limites sont

$$\boxed{T_g(0,t) = T_s} \quad \text{et} \quad \boxed{T_g(z(t),t) = T_f}\,.$$

2. Entre t et $t+\mathrm{d}t$ il se forme une épaisseur $\mathrm{d}z$ de glace. Nous allons effectuer un bilan d'enthalpie pendant $\mathrm{d}t$ sur une section S de cette tranche d'eau qui se solidifie.

Sa masse étant $\rho_g S\,\mathrm{d}z$, sa variation d'enthalpie lors de sa solidification est [2]

$$\mathrm{d}H = -\rho_g S\,\mathrm{d}z\,\Delta_{\text{fus}} h\,.$$

Le bilan d'énergie s'écrit

$$\mathrm{d}H = \delta Q_{\text{reçu}}$$

avec

$$\delta Q_{\text{reçu}} = j_Q(z(t)) S\,\mathrm{d}t = -\lambda \frac{\partial T_g}{\partial z} S\,\mathrm{d}t\,.$$

On a donc

$$-\rho_g S \Delta_{\text{fus}} h\,\mathrm{d}z = -\lambda \frac{\partial T_g}{\partial z} S\,\mathrm{d}t$$

soit

$$\boxed{\lambda \frac{\partial T_g}{\partial z} = \rho_g \Delta_{\text{fus}} h \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}\,.$$

2. Attention au signe : l'enthalpie de solidification est l'opposé de l'enthalpie de fusion.

3. Supposer z constant pendant $\mathrm{d}t$ revient à se placer dans l'**approximation des régimes quasi-stationnaires**.

4. La première équation différentielle devient alors

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_\mathrm{g}}{\mathrm{d}z^2} = 0\,.$$

Le gradient[3] de température vaut alors

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{g}}{\mathrm{d}z} = \frac{T_\mathrm{f} - T_\mathrm{s}}{z(t)}}\,.$$

5. L'équation différentielle établie à la question 2 s'écrit alors

$$\lambda \frac{T_\mathrm{f} - T_\mathrm{s}}{z(t)} = \rho_\mathrm{g} \Delta_\mathrm{fus} h \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

soit en séparant les variables :

$$z\,\mathrm{d}z = \lambda \frac{T_\mathrm{f} - T_\mathrm{s}}{\rho_\mathrm{g} \Delta_\mathrm{fus} h}\,\mathrm{d}t\,.$$

En prenant $z(0) = 0$ (la couche de glace commence à se former à l'instant $t = 0$), on obtient

$$z^2(t) = \lambda \frac{T_\mathrm{f} - T_\mathrm{s}}{\rho_\mathrm{g} \Delta_\mathrm{fus} h} t\,,$$

soit

$$\boxed{z(t) = \sqrt{\frac{\lambda (T_\mathrm{f} - T_\mathrm{s})}{\rho_\mathrm{g} \Delta_\mathrm{fus} h}}\sqrt{t}}\,.$$

On remarque que $z(t) \propto \sqrt{t}$: l'épaisseur de la couche de glace augmente « de moins en moins vite » : l'écart de température entre les faces de la couche reste constant, mais l'épaisseur augmentant, le gradient de température diminue au cours du temps ; il en est donc de même du flux thermique évacuant l'énergie libérée par la solidification qui se trouve alors ralentie.

Les facteurs augmentant l'évacuation de l'énergie produite lors de la solidification ont pour effet d'augmenter l'épaisseur de la couche de classe pour une date t donnée :

— si la conductivité λ augmente, $z(t)$ augmente donc ;

— si $\rho_\mathrm{g} \Delta_\mathrm{fus} h$ augmente, $z(t)$ diminue (il faut évacuer plus d'énergie) ;

— si $T_\mathrm{f} - T_\mathrm{s}$ augmente, $z(t)$ augmente (le flux thermique augmente).

6. On calcule $z(t) = \sqrt{\dfrac{2{,}1 \times 30}{940 \times 335 \times 10^3}}\sqrt{t}$ pour différentes valeurs de t.

Durée	1 minutes	1 jour	1 mois
Épaisseur	3,5 mm	13 cm	72 cm

Les ordres de grandeur sont cohérents.

3. On donne sa composante selon $\vec{e}_z$; on a bien sûr $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T_\mathrm{g} = \dfrac{\mathrm{d}T_\mathrm{g}}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z$.