# Colle de physique — semaine n° 8 — Sujet 1 — solution

## Exercice 1 : sphère radioactive

Une sphère de rayon $a$ et de conductivité thermique $\lambda_1$ est siège de réactions radioactives créant une puissance volumique $p$. Elle est plongée dans un milieu infiniment grand, de conductivité thermique $\lambda_2$. Le coefficient de transfert conducto-convectif entre la sphère et le liquide est noté $h$ (le flux surfacique est donné par la loi de Newton : $h(T-T_e)$ où $T_e$ est la température extérieure à la sphère). La température du liquide loin de la sphère est supposée constante et égale à $T_0$.
Déterminer la température en tout point de la sphère en régime stationnaire, en particulier la température $T_c$ en son centre.
*Indications : on déterminera d'abord $T(r)$ à l'extérieur de la sphère, puis à l'intérieur en utilisant les conditions de passage à la surface de la sphère.*

Pour déterminer la température à l'extérieur de la sphère, comme nous sommes en régime stationnaire, on choisir comme système une sphère de rayon $r > a$.
Le bilan d'énergie s'écrit

$$0 = \delta Q_{\text{reçu}} + P_{\text{prod}}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\delta Q_{\text{reçu}} = -\Phi(r)\,\mathrm{d}t = -4\pi r^2 j_Q(r)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$j_Q(r) = -\lambda_2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r},$$

soit

$$\delta Q_{\text{reçu}} = 4\pi\lambda_2 r^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, la sphère de rayon $a$ produit la puissance

$$P_{\text{prod}} = \frac{4}{3}\pi a^3 p.$$

On a donc

$$4\pi\lambda_2 r^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}t + \frac{4}{3}\pi a^3 p\,\mathrm{d}t = 0$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{pa^3}{3\lambda_2}\frac{1}{r^2}.$$

L'intégration donne

$$T(r) = \frac{pa^3}{3\lambda_2}\frac{1}{r} + A.$$

Loin de la sphère, on a $\lim\limits_{r\to\infty} T(r) = T_0 = A$, d'où

$$\boxed{T(r) = T_0 + \frac{pa^3}{3\lambda_2 r} \quad \text{pour } r > a}.$$

➤ On vérifie que la température augmente quand on se rapproche de la sphère, utile pour traquer les erreurs de signe!

Prenons maintenant comme système une sphère de rayon $r < a$.
On a de même $0 = \delta Q_{\text{reçu}}\,\mathrm{d}t + P_{\text{prox}}\,\mathrm{d}t$, avec (le milieu est maintenant de conductivité $\lambda_1$)

$$\delta Q_{\text{reçu}} = 4\pi\lambda_1 r^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}t$$

et

$$P_{\text{prod}} = \frac{4}{3}\pi r^3 p$$

➤ Attention, seule la partie de rayon $r$ de la source est interne au système.

On a donc

$$0 = 4\pi\lambda_1 r^2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} + \frac{4}{3}\pi r^3 p$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{p}{3\lambda_1} r$$

dont l'intégration donne

$$T(r) = -\frac{p}{6\lambda_1} r^2 + B.$$

L'énoncé note $T_c = T(0)$ la température au centre ; on voit que $T_c = B$, d'où

$$\boxed{T(r) = -\frac{p}{6\lambda_1} r^2 + T_c \quad \text{pour } 0 \leqslant r < a}.$$

Il rester à déterminer $T_c$ en utilisant la continuité du flux, donc du vecteur densité de courant thermique, en $r = a$.
On a [1]

$$j_Q(r = a-) = j_Q(r = a^+).$$

Pour $r = a^-$ on est à l'intérieur de la sphère de conductivité $\lambda_1$, et la densité de courant thermique est donnée par la loi de Fourier :

$$j_Q(r = a^-) = -\lambda_1 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}(r = a) = \frac{pa}{3\lambda_1}.$$

1. La surface étant la même pour les deux flux, l'égalité des flux se traduit par l'égalité des densités de courant thermique $j_Q$.

Pour $r = a^+$ on est dans le fluide, et la densité de courant thermique est donnée par la loi de Newton

$$j_Q(r = a^+) = h\big[T(r = a^+) - T - (r = a^-)\big],$$

où

$$T(r = a^+) = T_0 + \frac{pa^2}{3\lambda_2}$$

en prenant l'expression de $T(r)$ pour $r > a$ en $r = a$, et où

$$T(r = a^-) = T_c - \frac{pa^2}{6\lambda_1}$$

en prenant l'expression de $T(r)$ pour $r < a$ en $r = a$.
On a donc

$$\frac{pa}{3\lambda_1} = h\left[T_0 + \frac{pa^2}{3\lambda_2} - T_c + \frac{pa^2}{6\lambda_1}\right]$$

d'où

$$\boxed{T_c = T_0 + \frac{pa^2}{6\lambda_1} + \frac{pa^2}{3\lambda_2} - \frac{pa}{3h\lambda_1}}.$$

➤ La lecture de l'énoncé peut vous troubler : quand il est écrit $h(T - T_e)$, le terme $T_e$ est à prendre au sens générique *température dans le fluide juste à l'extérieur du solide*; il n'y a pas de terme $T_e$ ici, il faut le traduire par $T(r = a^+)$.

➤ Attention au terme de transfert conducto-convectif : il n'apparaît pas dans les bilans, car la surface de la sphère de rayon $a$ n'est jamais une frontière des systèmes étudiées (contrairement au problème de l'ailette par exemple). La loi de Newton est ici utilisée pour écrire la continuité du flux thermique et déterminer une constante d'intégration issue des bilans.