TD phénomènes de transport — Diffusion thermique — Partie 2

ARQS et résistance thermique - solution

1 — Chauffage d'un igloo [*]

1. Négliger la courbure des parois revient à les considérer comme planes. On se ramène donc à un phénomène unidimensionnel en coordonnées cartésiennes.
Se reporter au cours pour établir l'expression de la résistance thermique :

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}}.$$

2. La puissance dégagée par l'inuit est

$$P = \frac{0{,}5 \times 10^6}{3600} = 1{,}4 \times 10^2 \text{ W} = 0{,}14 \text{ kW}.$$

3. Le flux thermique sortant est donné par

$$\Phi = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{th}}} = \frac{\lambda S}{e}(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}).$$

La température de l'igloo reste constante si $\Phi = P$, soit pour une épaisseur

$$e = \frac{\lambda S}{P}(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}).$$

On calcule $\boxed{e = 43 \text{ cm}}$.

4. On se place en coordonnées sphériques, en considérant $T(r)$ et $\vec{j}_{\text{th}} = j_{\text{th}}(r)\vec{e}_r$.
En régime stationnaire, le flux est indépendant de r, soit [1]

$$\Phi(r) = \Phi_0 = j_{\text{th}}(r) 2\pi r^2 = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} 2\pi r^2.$$

On a donc

$$\mathrm{d}T = -\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}.$$

On en déduit en intégrant de R_{int} à R_{ext} :

$$T(R_{\text{ext}}) - T(R_{\text{int}}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_{\text{ext}}} - \frac{1}{R_{\text{int}}}\right) = \Phi_0 \frac{R_{\text{int}} - R_{\text{ext}}}{2\pi\lambda R_{\text{int}} R_{\text{ext}}}.$$

La résistance donnée par $T(R_{\text{int}}) - T(R_{\text{ext}}) = R_{\text{th}}\Phi_0$ s'écrit alors

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{R_{\text{ext}} - R_{\text{int}}}{2\pi\lambda R_{\text{int}} R_{\text{ext}}}}.$$

Dans le cas où $R_{\text{ext}} = R_{\text{int}} + e$ avec $e \ll R_{\text{int}}$, on a

$$R_{\text{th}} \approx \frac{e}{2\pi R_{\text{int}}^2 \lambda} = \frac{e}{\lambda S}$$

où $S = 2\pi R_{\text{int}}^2$ est la surface de l'igloo. On retrouve l'expression d'un mur plan, ce qui revient à négliger la courbure de la paroi.

1. L'igloo étant hémisphérique, on prend la moitié de la surface d'une sphère.

2 — Diffusion thermique dans une barre [**]

1. Cas de sources idéales

1.a) On a donc $\boxed{C_1 \to \infty}$ et $\boxed{C_2 \to \infty}$. En effet, la variation de température d'une source dont l'énergie varie de ΔU est $\Delta T = \frac{\Delta U}{C}$; une source idéale est caractérisée par $\Delta T = 0$.

1.b) En régime permanent, un bilan d'énergie sur une tranche $[x, x + \mathrm{d}x]$ s'écrit

$$0 = \left[j(x) - j(x + \mathrm{d}x)\right] S \mathrm{d}t$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x} = 0 = -\lambda \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}.$$

On a donc $\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}$ et $\boxed{T(x) = T_1 + \frac{x}{L}(T_2 - T_1)}$.

2. Cas de sources non idéales

2.a) Le régime quasi-stationnaire suppose que les températures des sources varient suffisamment lentement pour que l'on puisse considérer que le régime stationnaire de diffusion thermique est réalisé à chaque instant dans la barre ; on peut alors écrire

$$T(x,t) = T_1 + \frac{x}{L}\left[T_2(t) - T_1(t)\right].$$

On a bien un profil affine, caractéristique du régime stationnaire… mais dont la pente varie lentement au cours du temps.

2.b) Effectuons un bilan d'énergie pour la source 1 pendant $\mathrm{d}t$. Sa température varie de $\mathrm{d}T_1$ avec

$$C_1 \mathrm{d}T_1 = -\Phi(0)\,\mathrm{d}t = -j(0) S \mathrm{d}t.$$

Le courant thermique est donné par

$$j(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{L}\left[T_1(t) - T_2(t)\right].$$

On a donc

$$C_1 \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda S}{L}\left[T_1(t) - T_2(t)\right].$$

Le bilan d'énergie pour la source 2 s'écrit de même

$$C_2 \mathrm{d}T_2 = +\phi(L)\,\mathrm{d}t.$$

Comme le flux est uniforme dans la barre, on a

$$C_2\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\lambda S}{L}\left[T_1(t)-T_2(t)\right].$$

On peut poser deux temps caractéristiques

$$\tau_1=\frac{C_1L}{\lambda S}\quad\text{et}\quad\tau_2=\frac{C_2L}{\lambda S}.$$

Les températures des sources vérifient le système

$$\begin{cases}\tau_1\dfrac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}=-T_1(t)\quad+T_2(t)\\ \tau_2\dfrac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}=\quad T_1(t)\quad-T_2(t)\end{cases}$$

➤ Vérifions la pertinence :

— si $T_1(t)=T_2(t)$, les températures restent constantes comme attendu ;

— si $T_1(t)>T_2(t)$, $T_1(t)$ diminue et $T_2(t)$ augmente comme attendu.

On a

$$\frac{\mathrm{d}\tau_1T_1(t)+\tau_2T_2(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

d'où compte tenu des conditions initiales

$$\tau_1T_1(t)+\tau_2T_2(t)=\tau_1T_1^\circ+\tau_2T_2^\circ,$$

en notant T_1° et T_1° les températures initiales des deux sources.

On a donc

$$T_2(t)=\frac{\tau_1T_1^\circ+\tau_2T_2^\circ}{\tau_2}-\frac{\tau_1}{\tau_2}T_1(t)$$

qui donne avec la première équation

$$\tau_1\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_2}T_1(t)+\frac{\tau_1T_1^\circ+\tau_2T_2^\circ}{\tau_2}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}+\frac{T_1(t)}{\tau}=\frac{\tau_1T_1^\circ+\tau_2T_2^\circ}{\tau_1\tau_2}$$

en posant

$$\tau=\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}.$$

La solution générale s'écrit

$$T_1(t)=A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+\frac{\tau_1T_1^\circ+\tau_2T_2^\circ}{\tau_1+\tau_2}.$$

La condition initiale donne

$$T_1^\circ=A+\frac{\tau_1T_1^\circ+\tau_2T_2^\circ}{\tau_1+\tau_2}$$

d'où

$$A=\frac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}(T_1^\circ-T_2^\circ).$$

On a donc

$$T_1(t)=\frac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}(T_1^\circ-T_2^\circ)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+\frac{\tau_1T_1^\circ+\tau_2T_2^\circ}{\tau_1+\tau_2}.$$

La solution pour $T_2(t)$ s'obtient directement par permutation des indices 1 et 2.

On montrerait que $T_2(t)$ vérifie la même équation différentielle que $T_1(t)$, dont la solution générale est de la forme

$$T_2(t)=B\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+\frac{\tau_1T_1^\circ+\tau_2T_2^\circ}{\tau_1+\tau_2}.$$

La condition $T_2(t)=T_2^\circ$ permet de déterminer B, et on trouve

$$T_2(t)=\frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}(T_2^\circ-T_1^\circ)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+\frac{\tau_1T_1^\circ+\tau_2T_2^\circ}{\tau_1+\tau_2}.$$

Compte tenu des expressions de τ_1 et τ_2, on a

$$\boxed{T_1(t)=\frac{C_2}{C_1+C_2}(T_1^\circ-T_2^\circ)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+\frac{C_1T_1^\circ+C_2T_2^\circ}{C_1+C_2}}.$$

et

$$\boxed{T_2(t)=\frac{C_1}{C_1+C_2}(T_2^\circ-T_1^\circ)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+\frac{C_1T_1^\circ+C_2T_2^\circ}{C_1+C_2}},$$

avec

$$\boxed{C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}.$$

➤ Les deux sources tendent vers la même température finale

$$T_\mathrm{f}=\frac{C_1T_1^\circ+C_2T_2^\circ}{C_1+C_2},$$

qui ne dépend de des capacités thermiques des sources et des températures initiales.

➤ Cette évolution se fait avec un temps caractéristique τ ; elle est d'autant plus rapide que λ est grand (barre bonne conductrice thermique), que S est grand ou que L est petit, c'est-à-dire en fait que la résistance thermique de la barre est faible.

➤ Le temps caractéristique de la diffusion thermique dans la barre est

$$T^*\approx\frac{\rho c}{\lambda}L^2$$

où c est la capacité thermique massique de la barre.

L'hypothèse du régime quasi-stationnaire est valide si $T^*\ll\tau$. Plaçons-nous dans le cas où $C_1=C_2$; on a alors $C=\frac{C_1}{2}$ et l'hypothèse s'écrit [2]

$$\frac{\rho c}{\lambda}L^2\ll\frac{CL}{\lambda S},$$

soit

$$C\gg\rho cSL.$$

La capacité thermique des sources doit être très grande devant celle de la barre (le volume de cette dernière étant SL, le terme ρcSL représente sa capacité calorifique).

2. On ne reporte pas le coefficient 1/2 en ordre de grandeur.

3 — Le parpaing a un petit creux [**]

1. Se reporter au cours.
L'hypothèse nécessaire est que le régime soit stationnaire.
On établit

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}}.$$

Le résistance thermique s'exprime en $\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$.

2. On utilise les lois d'association en série et en parallèle.
On décompose le parpaing :
(1) plaque de section $S = ac$, d'épaisseur e
en série avec
(2) association en parallèle de deux plaques de section ae, d'épaisseur $b-2e$ et d'une « plaque d'air » de section $a(c-2e)$
en série avec
(3) plaque de section $S = ac$, d'épaisseur e.
La résistance thermique des éléments (1) et (3) est

$$R_{\text{th},1} = R_{\text{th},3} = \frac{e}{\lambda_{\text{b}} ac}.$$

En regroupant les éléments de (2), on se ramène à une plaque de béton de section $2ae$, d'épaisseur $b-2e$, de résistance thermique

$$R'_{\text{th},2} = \frac{b-2e}{2\lambda_{\text{b}} ae}$$

en parallèle avec une plaque d'air de résistance thermique

$$R''_{\text{th},2} = \frac{b-2e}{\lambda_{\text{a}} a(c-2e)}.$$

La résistance totale de cet élément est telle que

$$\frac{1}{R_{\text{th},2}} = \frac{1}{R'_{\text{th},2}} + \frac{1}{R''_{\text{th},2}} = \frac{2\lambda_{\text{b}} ae}{b-2e} + \frac{\lambda_{\text{a}} a(c-2e)}{b-2e} = \frac{2\lambda_{\text{b}} ae + \lambda_{\text{a}} a(c-2e)}{b-2e}$$

d'où

$$R_{\text{th},2} = \frac{b-2e}{2\lambda_{\text{b}} e + \lambda_{\text{a}} a(c-2e)}$$

La résistance totale est $R_{\text{th}} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2} + R_{\text{th},3}$ soit

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{2e}{\lambda_{\text{a}} ac} + \frac{b-2e}{\lambda_{\text{a}} a(c-2e) + 2\lambda_{\text{b}} ae}}.$$

On calcule $\boxed{R_{\text{th}} = 12{,}5\ \text{K}\cdot\text{W}^{-1}}$.

3. L'épaisseur b' d'un parpaing plein de même résistance thermique est donnée par

$$R_{\text{th}} = \frac{b'}{\lambda_{\text{b}} ac}$$

d'où $b' = \lambda_{\text{b}} ac R_{\text{th}}$.
On calcule $\boxed{b' = 92\ \text{cm}}$: l'air intérieur au parpaing est essentiel pour l'isolation thermique !

4 — Isolation d'une canalisation [**]

1. Définition générale $\boxed{T_1 - T_2 = R_{\text{th}} \Phi_{1\to 2}}$.

2. On a $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \dfrac{\text{d}T}{\text{d}r} \vec{e}_r$ et $\Phi(r) = 2\pi r L j_{\text{th}}$, soit

$$\boxed{\Phi(r) = -2\pi\lambda L r \frac{\text{d}T}{\text{d}r}}.$$

L'équation de la chaleur en régime stationnaire s'écrit $\boxed{\Delta T = 0}$, soit $\dfrac{\text{d}}{\text{d}r}\left(r\dfrac{\text{d}T}{\text{d}r}\right) = 0$. Compte tenu de l'expression du flux, on en déduit $\dfrac{\text{d}\Phi}{\text{d}r} = 0$: il est indépendant de r, soit $\Phi(r) = \Phi$.
D'après l'expression de Φ établie à la question précédente, on a

$$\int_{T_1}^{T_2} \text{d}T = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda L}\int_a^b \frac{\text{d}r}{r}$$

soit

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{2\pi\lambda L}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

On a donc $\boxed{R_{\text{th}} = \dfrac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$.

3. La résistance thermique étant définie par $\Phi = R_{\text{conv}}(T_{\text{s}} - T_{\text{e}})$; on obtient

$$\boxed{R_{\text{conv}} = \frac{1}{hS}}.$$

4. Les résistances thermiques étant associées en série, on a

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi h_1 aL} + \frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2\pi h_2 bL}}.$$

5. On ajoute la résistance thermique de l'isolant. Comme le transfert convectif se fait à la surface de l'isolant, on obtient

$$R'_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi h_1 aL} + \frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2\pi\lambda_{\text{iso}} L}\ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{1}{2\pi h_2 rL}$$

On calcule

$$\frac{\text{d}R'_{\text{th}}}{\text{d}r} = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda_{\text{iso}} r} - \frac{1}{h_2 r^2}\right) = \frac{1}{2\pi L\lambda_{\text{iso}} r}\left(1 - \frac{r_{\text{c}}}{r}\right)$$

avec $\boxed{r_{\text{c}} = \dfrac{\lambda_{\text{iso}}}{h_2}}$.
Comme $\dfrac{\text{d}R'_{\text{th}}}{\text{d}r} < 0$ pour $r < r_{\text{c}}$ et $\dfrac{\text{d}R'_{\text{th}}}{\text{d}r} > 0$ pour $r > r_{\text{c}}$, la résistance thermique est **minimale** pour $r = r_{\text{c}}$. C'est possible si $\boxed{r_{\text{c}} > R_2}$.

6. On a

$$2\pi L(R'_{\text{th}} - R_{\text{th}}) = \frac{1}{\lambda_{\text{iso}}}\ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{1}{h_2 r} - \frac{1}{h_2 b} = f(r)\,,$$

d'où

$$f'(r) = \frac{1}{\lambda_{\text{iso}} r} - \frac{1}{h_2 r^2} = \frac{1}{\lambda_{\text{iso}} r}\left[1 - \frac{r_{\text{c}}}{r}\right].$$

On a bien sûr $f(r = b) = 0$: on retrouve la situation sans isolant. Comme $f'(r) < 0$ pour $r < r_{\text{c}}$, $f(r) < 0$ (la fonction décroît à partir de 0) : la résistance thermique de l'ensemble est plus faible que sans l'isolant. L'ajout de l'isolant se traduit, tant que son épaisseur est « faible », par une augmentation du flux thermique ! On voit le paradoxe, qui s'explique par une augmentation du flux convectif du fait de l'augmentation de la surface d'échange.

5 — Isolation d'une conduite [***]

Au transfert conducto-convectif est associé la résistance thermique

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{hS}.$$

Le même flux traverse :

— l'interface air/conduite ;

— la conduite ;

— l'isolant ;

— l'interface isolant/air.

Les 4 résistances thermiques correspondantes sont donc associées en série.
Pour l'interface air/conduite :

$$R_{\text{th},1} = \frac{1}{h_1 2\pi R_1 L}.$$

Pour la traversée de la conduite :

$$R_{\text{th},2} = \frac{1}{2\pi\lambda_{\text{c}} L}\ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right).$$

Pour la traversée de l'isolant :

$$R_{\text{th},3} = \frac{1}{2\pi\lambda_{\text{i}} L}\ln\left(\frac{R_1 + e + x}{R_1 + e}\right).$$

Pour l'interface isolant/air :

$$R_{\text{th},4} = \frac{1}{h_2 2\pi(R_1 + E + X)L}.$$

La résistance thermique totale est

$$R_{\text{th}} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2} + R_{\text{th},3} + R_{\text{th},4}\,.$$

On peut simplifier l'étude en notant

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi L} f(x)$$

avec

$$f(x) = \frac{1}{h_1 R_1} + \frac{1}{\lambda_{\text{c}}}\ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right) + \frac{1}{\lambda_{\text{i}}}\ln\left(\frac{R_1 + e + x}{R_1 + e}\right) + \frac{1}{h_2(R_1 + e + x)}.$$

Pour étudier ses variations avec x, on calcule

$$f'(x) = \frac{1}{\lambda_{\text{i}}(R_1 + e + x)} - \frac{1}{h_2(R_1 + e + x)^2} = \frac{h_2(R_1 + e + x) - \lambda_{\text{i}}}{\lambda_{\text{i}} h_2 (R_1 + e + x)^2}.$$

L'extremum est pour x_{m} tel que $f'(x_{\text{m}} = 0$, soit

$$x_{\text{m}} = \frac{\lambda_{\text{i}}}{h_2} - R_1 - e\,.$$

On remarque que $f'(x) < 0$ pour $x < x_{\text{m}}$ et $f'(x) > 0$ pour $x > x_{\text{m}}$: il s'agit donc d'un maximum.

1er cas : $x_{\text{m}} < 0$. Dans ce cas, comme on a physiquement $x > 0$, on a toujours $f'(x) > 0$, R_{th} est une fonction croissante de x. **Plus il y a d'isolant, meilleure est l'isolation.**

2e cas : $x_{\text{m}} > 0$.
Tableau de variation :

x	0		x_{m}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f(x_{\text{m}})$	↗	$+\infty$

Quand on commence par ajouter de l'isolant, la résistance thermique globale diminue : c'est le « paradoxe de l'isolant ». Certes, la résistance thermique de l'isolant augmente, mais la résistance thermique conducto-convective à l'interface isolant/air diminue du fait de l'augmentation de la surface extérieure de l'isolant. Au début, c'est cette diminution qui l'emporte.
Au-delà de x_{m}, l'ajout d'isolant augmente la résistance thermique. Compte-tenu des variations de $f(x)$, il existe une épaisseur x_1 telle que $f(x_1) = f(0)$. Pour $x > x_1$, l'isolant est meilleure avec isolant que sans isolant, et l'ajout d'isolant améliore l'isolation.

6 — Expérience de regel [***]

1. Le diagramme (P, T) relie la pression et la température dans la glace. On peut donc déterminer la différence de température entre le dessous et le dessus du fil en estimant la différence de pression entre les deux faces du fil.
La force due aux deux masses s'exerçant sur le fil est mg. Elle s'applique sur la surface ab ; la surpression correspondante est donc

$$\Delta P = \frac{mg}{ab}.$$

On calcule

$$\Delta P = \frac{5 \times 9{,}8}{0{,}2 \times 0{,}5 \times 10^{-3}} = 4{,}90 \times 10^5 \text{ Pa} = 4{,}90 \text{ bar}.$$

D'après le tableau donnant $P(T)$, on obtient une loi affine, avec une pente

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = -114{,}16 \text{ bar} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On peut donc écrire

$$T_\text{i} - T_\text{s} = \frac{P_\text{i} - P_\text{s}}{\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}} = \frac{4{,}90}{-114{,}16},$$

soit

$$\boxed{T_\text{i} - T_\text{s} = -4{,}3 \times 10^{-2} \text{ K}}.$$

La température est plus faible en dessous du fil qu'au dessus.

2. *Explication préliminaire : la température étant plus faible sous le fil, il existe un flux thermique dans le fil, dirigé du haut vers le bas. La glace située sous le fil reçoit donc une énergie thermique de la part du fil, ce qui permet la fonte de la glace située sous le fil.*
Le vecteur densité de courant thermique dans le fil est donné par la loi de Fourier

$$\vec{j_Q} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} \vec{e}_z = -\lambda \frac{T_\text{i} - T_\text{s}}{c} \vec{e}_z.$$

Le flux thermique traversant le fil vers le bas est donc

$$\Phi = j_Q ab = -\frac{ab}{c} \lambda (T_\text{i} - T_\text{s}).$$

Soit $\mathrm{d}z$ la couche de glace sous le fil, qui fond pendant la durée $\mathrm{d}t$. Le premier principe s'écrit

$$\mathrm{d}H = \Phi \, \mathrm{d}t.$$

Le volume $\mathrm{d}\tau = ab\,\mathrm{d}z$ changeant d'état a une masse

$$\mathrm{d}m = \mu, \mathrm{d}\tau = \mu ab \, \mathrm{d}z,$$

d'où une variation d'enthalpie

$$\mathrm{d}H = \Delta_\text{fus} H \, \mathrm{d}m = \mu ab \Delta_\text{fus} H \, \mathrm{d}z.$$

On a donc

$$\mu ab \Delta_\text{fus} H \, \mathrm{d}z = -\frac{ab}{c} \lambda (T_\text{i} - T_\text{s}) \mathrm{d}t.$$

La vitesse du fil, qui descend au fur et à mesure que la glace fond, vaut donc

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda (T_\text{i} - T_\text{s})}{\mu c \Delta_\text{fus} H}.$$

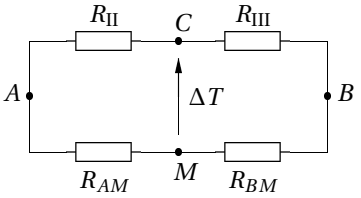
On calcule

$$v = \frac{80 \times 4{,}3 \times 10^{-2}}{10^3 \times 5 \times 10^{-3} \times 330 \times 10^3}$$

soit $\boxed{v = 2{,}1 \text{ µm} \cdot \text{s}^{-1}}$.
Le phénomène est très lent.

7 — Trois barres en contact [***]

En régime stationnaire, nous pouvons décrire chaque barre par sa résistance thermique, et donner un équivalent électrique du dispositif, en notant M le point de prise de température à l'abscisse x de la barre 0.
Les barres I et II étant traversées par un même flux, elles sont en série.



On cherche la condition pour annuler la différence de température $\Delta T = T_C - T_x$.
On peut appliquer deux fois la relation du « pont diviseur de différence de températures » :

$$T_C - T_B = \frac{R_\text{I}}{R_\text{I} + R_\text{II}} (T_A - T_B)$$

et

$$T_x - T_B = \frac{R_{BM}}{R_{AM} + R_{BM}} (T_A - T_B).$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta T &= \left(\frac{R_\text{I}}{R_\text{I} + R_\text{II}} - \frac{R_{BM}}{R_{AM} + R_{BM}} \right) (T_A - T_B) \\ &= \frac{R_\text{I} R_{AM} - R_\text{II} R_{BM}}{(R_\text{I} + R_\text{II})(R_{AM} + R_{BM})} (T_A - T_B). \end{aligned}$$

La condition $\Delta T = 0$ est donc réalisée pour

$$R_\text{I} R_{AM} = R_\text{II} R_{BM}. \quad (1)$$

Les résistances thermiques sont données par

$$R_\text{I} = \frac{L_0}{\lambda_\text{I} S_\text{I}} ; \; R_\text{II} = \frac{L_0}{\lambda_\text{II} S_\text{II}} ; \; R_{AM} = \frac{x}{\lambda_0 S_0} ; \; R_{BM} = \frac{L_0 - x}{\lambda_0 S_0}.$$

La condition (1) s'écrit alors

$$\frac{L_0}{\lambda_\text{I} S_\text{I}} \frac{x}{\lambda_0 S_0} = \frac{L_0}{\lambda_\text{II} S_\text{II}} \frac{(L_0 - x)}{\lambda_0 S_0},$$

soit

$$\frac{x}{\lambda_\text{I} S_\text{I}} = \frac{L_0 - x}{\lambda_\text{II} S_\text{II}}.$$

Les sections des barres étant identiques, on en déduit

$$\boxed{\lambda_\text{II} = \frac{L_0 - x}{x} \lambda_\text{I}}.$$

On calcule $\boxed{\lambda_\text{II} = 200 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$.

➤ Vous aurez bien sûr reconnu le montage équivalent au pont de Wheatstone…

8 — Détermination d'une conductivité thermique [**]

1. Résultat de cours : $R_{\text{th}} = \dfrac{L}{\lambda S}$.
On en déduit $\Phi = \dfrac{T_1 - T_2(t)}{R_{\text{th}}}$.

2. Bilan thermique pendant $\mathrm{d}t$:

$$C_2\,\mathrm{d}T_2 = \Phi\,\mathrm{d}t = \frac{T_1 - T_2(t)}{R_{\text{th}}}\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R_{\text{th}}C_2}[T_1 - T_2(t)]}.$$

Système du 1er ordre, avec $\boxed{\tau = R_{\text{th}}C_2}$.
Résolution : $\boxed{T_2(t) = T_1 + [T_2(0) - T_1]\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$.

3. De le loi précédente on déduit

$$t = \tau \ln\left(\frac{T_2(0) - T_1}{T_2(t) - T_1}\right).$$

Le graphe est une droite de pente

$$\tau = R_{\text{th}}C_2 = R_{\text{th}}\,(C + mc_{\text{eau}})\,.$$

On mesure sur le graphe $\tau = \dfrac{3250 - 500}{0{,}08 - 0{,}02}$.
La conductivité est donnée par $\lambda = \dfrac{4C_2L}{\tau\pi D^2}$.
Avec les valeurs proposées $\boxed{\lambda = 243\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}}$: la tige est en **aluminium**.

4. Temps caractéristique : $T^* \simeq \dfrac{\rho c}{\lambda}L^2$. Le régime est quasi-stationnaire si $T^* \ll \tau$, soit si

$$\frac{\rho c L^2}{\lambda} \ll \frac{L}{\lambda S}C_2,$$

d'où $\rho cLS \ll C_2$: la capacité thermique de la tige doit être bien inférieure à celle du calorimètre et de l'eau.
On a $C_2 \approx 2\times 10^3\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$.
On calcule $\rho cLS \approx 2\times 10^2\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$.
On a donc $C_2 \approx 10c$: l'approximation est correcte, mais *a priori* sans plus.

5. Si l'évolution n'est pas quasi-stationnaire, la température $T_2(t)$ augmente « trop vite » : le profil de température dans la tige n'a donc pas le temps d'atteindre la profil affine stationnaire à chaque instant.
Compte tenu du sens de l'évolution de $T_2(t)$, ce profil présente donc une concavité vers la haut. À tout instant, la tangente au profil $T(x)$ est donc plus petite que pour le profil affine.
D'après la loi de Fourier, le flux thermique réel est donc plus faible que le flux théorique (quasi-stationnaire) : $\Phi_{\text{réel}} < \Phi_{\text{théo}}$. Comme $\Phi = \dfrac{\Delta T}{R_{\text{th}}}$, on a $R_{\text{th,réel}} > R_{\text{th,théo}}$.
De l'expression $R_{\text{th}} = \dfrac{L}{\lambda S}$, on en déduit $\lambda_{\text{réel}} < \lambda_{\text{théo}}$: l'hypothèse a donc tendance à **surestimer la valeur de la conductivité de la tige**.

9 — Conductivité du givre [***]

1. On considère un flux thermique « vertical » sur la figure.
Dans un premier temps, le cube d'air de côté b est en série avec le parallélépipède de glace de section b^2 et de longueur b.
La résistance thermique du cube d'air est

$$R_{\text{th},1} = \frac{b}{\lambda_{\text{a}}b^2} = \frac{1}{\lambda_{\text{a}}b}.$$

Celle du parallélépipède de glace est

$$R_{\text{th},2} = \frac{a-b}{\lambda_{\text{g}}b^2}.$$

La résistance thermique de l'ensemble en série est

$$R_{\text{th},1,2} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2} = \frac{1}{\lambda_{\text{a}}b} + \frac{a-b}{\lambda_{\text{g}}b^2} = \frac{\lambda_{\text{g}}b + \lambda_{\text{a}}(a-b)}{\lambda_{\text{a}}\lambda g b^2}.$$

Ce parallélépipède « vertical » de section b^2 et de longueur a est en parallèle avec le restant du motif, de section $a^2 - b^2$, de longueur a, constitué de glace, de résistance thermique

$$R_{\text{th},3} = \frac{a}{\lambda_{\text{g}}(a^2 - b^2)}.$$

La résistance thermique du motif est donc donnée par

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{th}}} = \frac{1}{R_{\text{th},1,2}} + \frac{1}{R_{\text{th},3}} = \frac{\lambda_{\text{g}}(a^2-b^2)}{a} + \frac{\lambda_{\text{a}}\lambda_{\text{g}}b^2}{\lambda_{\text{g}}b + \lambda_{\text{a}}(a-b)}}.$$

2. En notant λ la conductivité thermique du givre, la résistance thermique du motif de longueur a et de section a^2 s'écrit

$$R_{\text{th}} = \frac{a}{\lambda a^2} = \frac{1}{\lambda a}.$$

La conductivité $\lambda = \dfrac{1}{R_{\text{th}}a}$ est alors donnée par

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda_{\text{g}}(a^2-b^2)}{a^2} + \frac{\lambda_{\text{a}}\lambda_{\text{g}}b^2}{\lambda_{\text{g}}ab + \lambda_{\text{a}}a(a-b)}}.$$

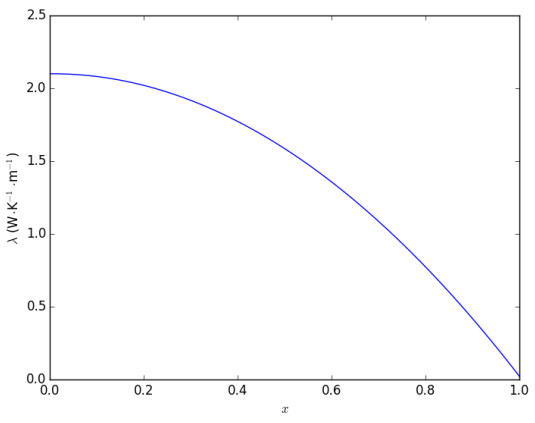
3. On peut écrire

$$\lambda = \lambda_{\text{g}}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{\lambda_{\text{a}}\lambda_{\text{g}}\frac{b^2}{a^2}}{\lambda_{\text{g}}\frac{b}{a} + \lambda_{\text{a}}\left(1 - \frac{b}{a}\right)}.$$

On posant $x = b/a$, on a donc

$$\boxed{\lambda = f(x) = \lambda_{\text{g}}(1-x^2) + \frac{\lambda_{\text{a}}\lambda_{\text{g}}x^2}{(\lambda_{\text{g}} - \lambda_{\text{a}})x + \lambda_{\text{a}}}}.$$

4. On représente $\lambda(x)$, où x varie de 0 (que de la glace) à $x = 1$ (que de l'air).



5. Pour $x = 0{,}4$, on calcule $\lambda = 1{,}8\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Le givre est thermiquement plutôt isolant, s'opposant aux transferts thermiques entre la source froide (l'intérieur du congélateur) et le fluide compris dans le serpentin.

10 — Igloo de survie [**]

Un alpiniste, surpris par le mauvais temps, dévide de construire un igloo de survie.
Il utilise des blocs de neige d'épaisseur $e = 10$ cm et de conductivité thermique $\lambda = 0{,}2\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.
Il hésite entre trois formes : un igloo cubique de côté a, un igloo cylindrique dont la hauteur est égale à son rayon R_c et un igloo hémisphérique de rayon R_h.

1. Igloo cubique

Son volume vaut $V = a^3 = 1\,\mathrm{m^3}$, d'où $a = 1$ m.

La résistance thermique d'une paroi vaut

$$R_{th,1} = \frac{e}{\lambda a^2}.$$

Pour les 5 parois en parallèles, on a

$$R_{th,cube} = \frac{e}{5\lambda a^2}.$$

On calcule $R_{th,cube} = 0{,}10\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

Igloo cylindrique

Le volume est donné par $V = \pi R_c^2 \times R_c = \pi R_c^3 = 1\,\mathrm{m^3}$.

La résistance thermique du « toit » plan est

$$R_{th,toit} = \frac{e}{\lambda \pi R_c^2} = \frac{2}{\lambda\pi}\left(\frac{\pi}{V}\right)^{2/3} = 0{,}34\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}.$$

En considérant un cylindre de rayon r et de hauteur R_c :

$$\Phi = 2\pi r R_c j_{th} = -2\pi\lambda R_c r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r},$$

soit

$$\mathrm{d}T = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda R_c}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

Le flux est indépendant de r en régime stationnaire sans source, ce qui permet d'intégrer :

$$T_{int} - T_{ext} = \frac{\Phi}{2\pi\lambda R_c}\ln\left(\frac{R_c + e}{R_c}\right).$$

La résistance thermique du « mur » est donc

$$\begin{aligned} R_{th,mur} &= \frac{1}{2\pi\lambda R_c}\ln\left(\frac{R_c+e}{R_c}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\lambda}\left(\frac{\pi}{V}\right)^{1/3}\ln\left(1 + e\left(\frac{\pi}{V}\right)^{1/3}\right) 0{,}16\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}. \end{aligned}$$

Le toit et le mur étant en parallèle, le résistance thermique de l'igloo est donnée par

$$\frac{1}{R_{th,cyl}} = \frac{1}{R_{th,toit}} + \frac{1}{R_{th,mur}}.$$

On calcule $R_{th,cyl} = 0{,}11\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

Igloo hémisphérique Le volume est donné par

$$V = \frac{2}{3}\pi R_h^3.$$

En considérant une demi-sphère de rayon r :

$$\Phi = 2\pi r^2 j_{th} = -2\pi\lambda r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r},$$

soit

$$\mathrm{d}T = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}.$$

Le flux est indépendant de r en régime stationnaire sans source, ce qui permet d'intégrer :

$$T_{int} - T_{ext} = \frac{\Phi}{2\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_{int}} - \frac{1}{R_{int}+e}\right) = \frac{\Phi}{2\pi\lambda}\frac{e}{R_{int}(R_{int}+e)}.$$

La résistance thermique vaut donc

$$R_{th,h} = \frac{e}{2\pi\lambda R_{int}(R_{int}+e)} \quad \text{avec} \quad R_{int} = \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{1/3}.$$

On calcule $R_{th,h} = 0{,}12\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

C'est igloo hémisphérique qui présente la résistance thermique la plus élevée.

2. En considérant comme système l'igloo (avec l'alpiniste à l'intérieur), le bilan d'énergie en régime stationnaire s'écrit

$$\begin{aligned} 0 = \delta_\delta Q_{reçu} + \delta Q_{créé} &= -\Phi\,\mathrm{d}t + P\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th,h}}\mathrm{d}t + P\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{T_{int} - T_{ext} = R_{th,h}P}.$$

On en déduit l'écart de température $\boxed{T_{int} - T_{ext} = 12\,°\mathrm{C}}$