TD phénomènes de transport — Diffusion thermique — Partie 3

Ondes de température

1 — Mise en équation

On considère un milieu semi-infini $x > 0$, de capacité thermique massique à volume constante c, de masse volumique ρ et de conductivité thermique λ.
On impose à sa surface $x = 0$ la température

$$T(x) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)\,.$$

1. Rappeler l'équation de la chaleur régnant dans le milieu.

On se place en régime établi et on utilise la solution en notation complexe.

On pose $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$ et on cherche la solution sous la forme

$$\underline{\theta}(x,t) = \underline{F}(x)\underline{G}(t)\,.$$

2. Montrer que $\underline{F}(x)$ et $\underline{G}(t$ vérifient chacun une équation différentielle.

3. Discuter de la résolution de l'équation vérifiée par $\underline{G}(t)$.

4. En déduire $\underline{F}(x)$.

5. Donner l'expression de $T(x,t)$.

---

2 — Oscillations thermiques

Le plan $x = 0$ sépare l'air ($x < 0$) d'un milieu ($x > 0$) de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. La température en $x = 0$ est

$$T(0,t) = T_a + \theta_0 \cos(\omega t)\,.$$

1. Établir l'équation aux dérivées partielles régissant $T(x,t)$ dans le milieu.

2. La solution est recherchée en complexe sous la forme

$$\underline{T}(x,t) = \underline{\theta}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + Cx + D\,.$$

Trouver $\underline{\theta}(x)$ en introduisant une longueur caractéristique δ. Déterminer complètement $T(x,t)$. Commenter.

3. On donne $a = \dfrac{\lambda}{\rho c} = 7 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. Calculer δ pour la variation jour-nuit. Commenter.

4. Quelle doit être l'épaisseur d'un mur pour atténuer les variations de température d'un facteur 10 ?

---

3 — Diffusion thermique dans un câble

On considère un câble cylindrique de section S, de rayon a, de longueur L, de masse volumique μ, de conductivité thermique λ et de capacité thermique massique c. On le suppose parfaitement calorifugé ; son état de dépend que l'abscisse x et du temps t.

1. Une perturbation thermique a lieu à l'extrémité $x = 0$. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(x,t)$.

2. L'extrémité en $x = 0$ est maintenue à la température T_1 alors que l'autre est maintenue à la température $T_2 < T_1$. Calculer λ sachant que le flux thermique à travers une section S est de $2400\ \mathrm{J \cdot min^{-1}}$. On donne $S = 100\ \mathrm{cm^2}$, $T_1 = 300$ K, $T_2 = 280$ K et $L = 1$ m. Commenter la valeur obtenue.

3. On impose des variations sinusoïdales de température autour d'une température moyenne T_0 :

$$T(x=0,t) = T_0 + A\cos(\omega t)\,.$$

L'expression de la température en un point d'abscisse x est de la forme

$$T(x,t) = T_0 + A\,\mathrm{e}^{-mx}\cos(\omega t - \alpha x + \varphi)\,.$$

3.a) Commenter, et déterminer φ, m et α en fonction de ω, μ, λ et c.

3.b) On a relevé expérimentalement les amplitudes d'oscillation suivantes pour un câble de longueur $L = 10$ m :

x (m)	0	1	2	3
amplitude (K)	19,5	11,5	6,8	4

Quel paramètre caractérisant l'évolution de la température peut-on en déduire ?

3.c) On appelle profondeur d'inversion l'abscisse minimale pour laquelle les oscillations thermiques sont en opposition de phase avec celles de l'origine. Calculer cette profondeur.

4 — Effet de cave

Une cave a été creusée en sous-sol d'une vieille propriété du XIX^{e} siècle, dans la vallée de la Loire. Une couche de tuffeau la sépare de la surface terrestre. Cette cave permettait historiquement de conserver les aliments et boissons à l'abri du gel.
Le tuffeau est une pierre tendre dont la masse volumique vaut 1,31 $\mathrm{kg\cdot L^{-1}}$, la conductivité thermique 0,41 $\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et la capacité thermique massique 1,0 $\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.
On suppose que la température en surface varie entre −15 °C au premier janvier ($t = 0$) et 40 °C au premier juillet, sinusoïdalement.

1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles, dite équation de la chaleur, pour le champ de température $T(x,t)$, $x > 0$ repérant un point dans le sol pris sur un axe descendant. On fera apparaître la diffusivité du tuffeau et on effectuera une application numérique.

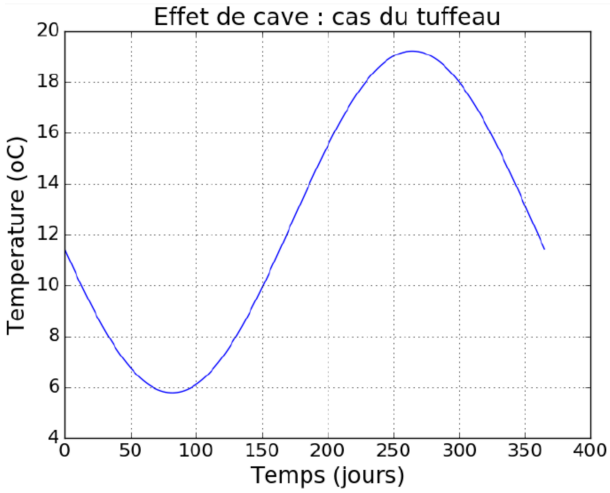
2. Proposer une expression pour $T(x = 0, t)$.

3. En régime forcé, on pose

$$T(x,t) = T_0 + u(x,t) \quad \text{avec} \quad \underline{u}(x,t) = \underline{f}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,.$$

Déterminer l'expression de $u(x,t)$ et par suite de $T(x,t)$, compte tenu des conditions aux limites. On fera apparaître le paramètre $\delta = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho c \omega}}$ dont on calculera la valeur.

4. On fournit ci-après un relevé de la température dans la cave. Déterminer l'épaisseur du sol en tuffeau.



5. Expliquer pourquoi certaines caves à Champagne sont enterrées à plusieurs dizaines de mètres.