DS n° 3 — Sujet « facile »

Le sujet comporte 4 parties indépendantes. **La calculatrice est autorisée.**

Merci de suivre les conseils suivants :
- laisser un espace en début de copie pour la note et les commentaires ;
- laisser une marge à chaque page pour les commentaires et décompte des points ;
- respecter et indiquer la numérotation des questions ;
- souligner ou encadrez les résultats.

Partie I — Dopage des semi-conducteurs (CCINP)

Dans l'industrie des semi-conducteurs, les phénomènes de diffusion sont souvent utilisés pour la fabrication des composants afin de modifier les propriétés électriques d'un substrat.
On s'intéresse ici à la diffusion d'atomes de phosphore dans un substrat de silicium (I-1).



FIGURE I-1 – Substrat de silicium

On suppose que la diffusion a uniquement lieu suivant la direction (Ox). On note $C(x,t)$ la concentration atomique en phosphore au point M d'abscisse x, à l'instant t.
À l'instant initial, les atomes de phosphore, supposés ponctuels, se situent tous sur le plan $x = 0$.
Ainsi :

— à l'instant $t = 0$, la concentration en atomes de phosphore est nulle en tout point M d'abscisse $x \neq 0$;

— à l'instant $t = 0$, on définit dans le plan $x = 0$ la densité surfacique σ d'atomes de phosphore.

Il n'y a ni apparition, ni disparition des atomes de phosphore au sein du substrat de silicium.

Q1. En notant D le coefficient de diffusivité, rappeler simplement la loi de Fick qui lie le vecteur courant de diffusion de particules $\vec{j}(x,t) = j(x,t)\,\vec{e}_x$ et la concentration $C(x,t)$. Préciser les grandeurs qui interviennent.

Q2. Établir par une loi de conservation, sur un système que vous préciserez, une relation aux dérivées partielles entre $j(x,t)$ et $C(x,t)$.

Q3. En déduire l'équation de diffusion vérifiée par la concentration $C(x,t)$.

Q4. Par une analyse dimensionnelle, relier de façon qualitative la longueur caractéristique L_c du phénomème de diffusion à sa durée τ_c. On admettra que les coefficients adimensionnés sont de l'ordre de l'unité.

On admet que $C(x,t) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)$.

Q5. En remarquant que pour $t > 0$, les atomes de phosphore qui se trouvaient à l'instant $t = 0$ en $x = 0$ ont tous diffusés dans le substrat, déterminer l'expression de α en fonction de σ et de D.

On définit la profondeur de diffusion p à l'instant t par

$$C(p,t) = \frac{1}{\mathrm{e}} C(0,t)\,.$$

Q6. Exprimer p en fonction de D et de t. Ce résultat est-il cohérent avec la relation qualitative trouvée à la question **Q4** ?

La figure I-2 représente l'évolution de $C(x,t)$ en fonction de x pour trois instants précis : $t = 1$ h, $t = 2$ h et $t = 5$ h.

Q7. Identifier sur la figure I-2 chacune des courbes correspondant à $C(x,t) = 1$ h, $C(x,t) = 2$ h et $C(x,t) = 5$ h.

Q8. Évaluer numériquement le coefficient de diffusivité D à l'aide de la figure I-2, en utilisant la courbe **c** dont l'origine est à $C(x = 0, t \text{ fixé}) \approx 270\ \mu\text{m}^{-3}$.

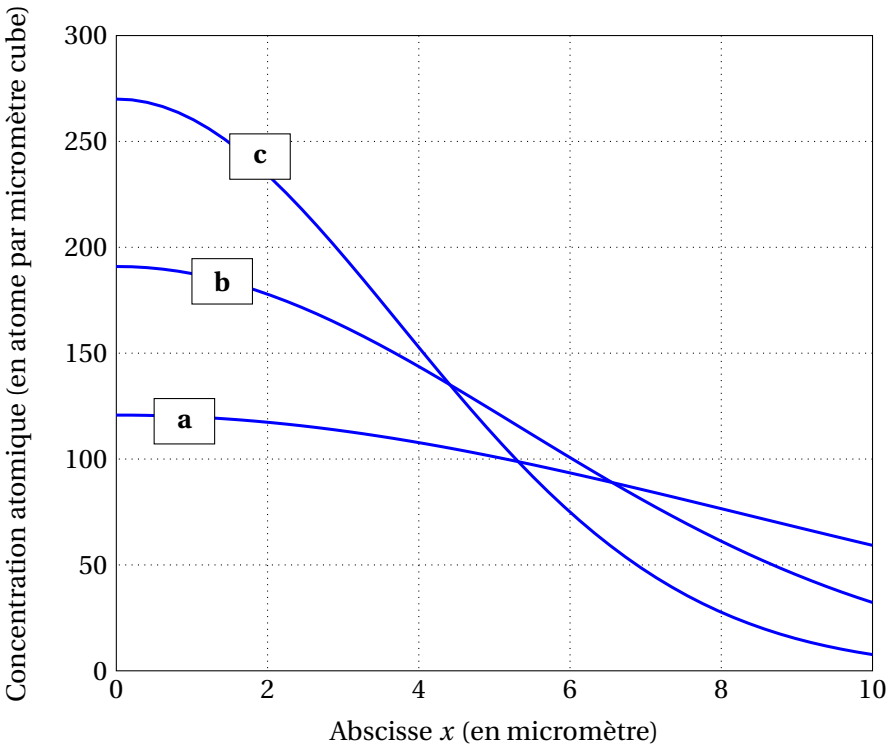


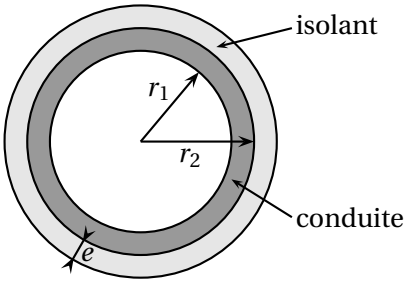
FIGURE I-2 – Concentration en atome de phosphore en fonction de x.

Données

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Partie II — Isolation d'une conduite (banque PT)

On étudie une conduite destinée à acheminer de l'oxygène liquide stocké −185 °C.
Afin de ne pas avoir de déperdition de chaleur dans la conduit lors du transport de l'oxygène liquide, li faut que la conduite soit très bien isolée.
On considère une conduite cylindrique en matériau spécifique de rayon interne r_1, de rayon externe r_2 et de longueur L. On note λ_a la conductivité thermique du matériau.
La conduite canalise le dioxygène à la température $\theta_i = -185$ °C. L'air extérieur est à la température $\theta_e = 20$ °C.



On isole cette canalisation à l'aide d'un isolant d'épaisseur e, de forme cylindrique et de conductivité thermique λ_i.
On suppose que la conduction thermique ne s'effectue que suivant la direction radiale et on négligera les effets de bord. On négligera de plus les transferts thermiques par convection à l'intérieur de la conduite et on se placera en régime stationnaire.
On note Φ le flux thermique qui traverse le cylindre.

Q1. On donne l'expression de la résistance thermique de la conduite en matériau spécifique :

$$R_{th,1} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_a L}.$$

Vérifier l'homogénéité de cette expression, et vérifier sa pertinence en étudiant l'influence des paramètres λ_a, L et r_2/r_1.
En déduire l'expression de la résistance thermique $R_{th,2}$ de l'isolant.

Q2. On note h_{ext} le coefficient de convection entre l'isolant et l'air extérieur. En utilisant la loi de Newton fournie dans les données, déterminer la résistance thermique de convection.
En déduire l'expression de la résistance thermique totale équivalente, notée $R_{th,éq}$, de la conduite ainsi isolée.

Q3. Étudier les variations de $R_{\text{th,éq}}$ en fonction de e. On distinguera les deux cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$, où

$$\alpha = \frac{h_{\text{ext}} r_2}{\lambda_{\text{i}}}.$$

Q4. Discuter de l'utilité de l'isolant suivant les valeurs de α.

Données

Loi de Newton : $P = h_{\text{ext}} S(T_{\text{ext}} - T_{\text{s}})$ où P est la puissance thermique traversant la surface S, surface en contact avec l'air extérieur, T_{ext} est la température de l'air extérieur et T_{s} la température de la paroi.

Partie III — « S'il vous plait… dessine-moi un mouton ! » (CCINP MP)



Cette partie s'intéresse à un mammifère particulier, le mouton, un des tous premiers domestiqués par l'homme, entre le 11e et le 9e siècle avant J.-C. en Mésopotamie. C'est un animal clé dans l'histoire de l'agriculture.
On appelle bélier le mâle adulte, brebis la femelle adulte, agneau le jeune mâle et agnelle la jeune femelle.
Comme tous les ruminants, leur système digestif complexe leur permet de transformer la cellulose de leur alimentation en acides gras volatils et en glucides simples. À la belle saison, ils se nourrissent dans les pâturages d'herbe broutée au ras du sol et on leur donne du foin en hiver.
Jusqu'à nos jours, le mouton est utilisé pour ses produits laitiers, sa viande, sa laine et son cuir, de façon artisanale ou semi-industrielle. Sa viande et son lait ont été les premières sources de protéines consommées par l'homme dans le passage de la chasse-cueillette à l'agriculture.

Données

— L'opérateur gradient d'une fonction $G(M,t)$ en situation unidimensionnelle vaut $\overrightarrow{\text{grad}}\, G(z,t) = \dfrac{\partial G(z,t)}{\partial z}\vec{e}_z$, et en coordonnées sphériques $\overrightarrow{\text{grad}}\, G(r,t) = \dfrac{\partial G(r,t)}{\partial r}\vec{e}_r$.

— En coordonnées cartésiennes, l'opérateur divergence en situation unidimensionnelle vaut $\text{div}\,\vec{A}(z) = \dfrac{\text{d}A(z)}{\text{d}z}$.

Document — *vigiferme.org*, pour le bien-être de l'animal et de l'éleveur, consulté en 2018

Exposition à de basses températures

Les moutons sont naturellement adaptés pour supporter de très basses températures mais leur résistance au froid dépend de plusieurs facteurs : la race, l'âge, l'état du pelage…

Un mouton qui a une épaisse toison et qui est protégé due l'humidité pourra supporter des températures qui descendent en dessous de −15 °C, un mouton tondu doit être protégé du froid. […] Lorsque le temps est humide, que les températures sont basses et qu'il y a du vent, la situation est critique pour les moutons. Le plus important est qu'ils ne soient pas mouillés jusqu'à la peau. La laine de certaines races, lorsqu'elle épaisse , peut repousser l'humidité plusieurs jours. C'est le cas des races de montagnes mais pour d'autres, à la laine très fine, le pelage est moins protecteur.

Les moutons qui ont froid se serrent les uns contre les autres.

Les agneaux nouveau-nés sont très sensibles aux basses températures, au vent et à l'humidité. Leur fine couche de laine et de graisse ne les protège que très peu. Les brebis prêtes à mettre bas doivent être isolées en bergerie et y rester au moins deux semaines après la naissance. Le taux de mortalité des agneaux qui viennent de naitre atteint plus de 25 % dans certains élevages. Ils succombent le plus souvent dans les heures qui suivent leur naissance par hypothermie plutôt que par maladie.

Exposition à de hautes températures

Les moutons supportent mieux le froid que les températures élevées. Ils peuvent mourir d'un coup de chaleur. Ce risque est beaucoup plus élevé chez les moutons qui ne sont pas tondus, car la laine empêche la sueur de s'évaporer. C'est une des raisons pour laquelle il faut tondre les moutons au printemps.

Cas de la brebis non tondue	Confort sans adaptation ou adaptation facile	Adaptation difficile	Adaptation très difficile	Inadaptation pouvant entraîner la mort
Température extérieure	de −8 °C à 25 °C	de −15 °C à −8 °C et de 25 °C à 35 °C	de −30 °C à −15 °C et de 35 °C à 40 °C	en dessous de −30 °C et au-dessus de 40 °C

La température d'un mouton en bonne santé se situe entre 38,5 °C et 39,5 °C.
Sa longueur moyenne va de 1 m à 1,50 m.
La tonte a lieu 1 à 2 fois par an, produisant 2 à 8 kg de laine par an.

Nous allons essayer de construire un modèle thermodynamique pour expliquer comment la brebis maintenaient sa température de consigne $\theta_{\text{éq}} = 39$ °C et mieux comprendre les éléments du document précédent.

1 Propriétés de la toison de la laine

La laine, matière première renouvelable, est une fibre aux propriétés uniques : flexible, légère, élastique, solide protégeant du chaud comme du froid, difficilement inflammable (s'enflamme à 600 °C), isolant phonique, absorbeur d'humidité, facile à teindre et 100 % biodégradable. La fibre de laine est à croissance continue avec de grandes écailles qui en font le tour. Les écailles se recouvrent peu et sont très saillantes. La section est circulaire. Sa substance est de la kératine, matière complexe association d'une vingtaine d'acides aminés. La laine a des affinités différentes avec l'eau qui font que la fibre s'enroule en frisures. Ces dernières enferment une grande quantité d'air, ce qui limite la conduction thermique. De plus, la kératine est hydrophile pour la vapeur eau mais hydrophobe pour l'eau liquide. L'adsorption d'eau (désorption d'eau) s'accompagne d'une production (dégagement) de chaleur par la fibre. Les fils de laine ont un diamètre qui varie de 20 µm pour les moutons Mérinos à 40 µm pour les races écossaises.
Une toison de laine va être caractérisée par une valeur de conductivité thermique λ_{laine} supposée homogène et une valeur de capacité thermique massique c_{laine}. On considèrera par la suite une laine « moyenne » caractérisée par une conductivité $\lambda_{\text{laine}} = 0{,}040\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Q1. La loi de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit le lien entre la densité volumique de transfert thermique et le gradient de température : $\vec{j_Q} = -\lambda\overrightarrow{\text{grad}}\,T$.
Quelle est la dimension de la conductivité λ ?

On considère un parallélépipède, de longueur L, de hauteur H et d'épaisseur e petite ($e \ll \min(L, H)$), constitué d'un matériau homogène de conductivité λ, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. Le problème est supposé unidimensionnel, la température ne dépendant que de la variation z et du temps t.

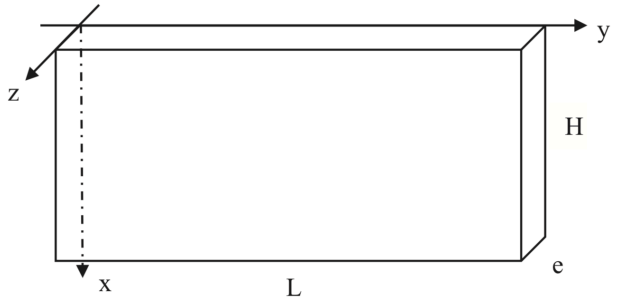


FIGURE III-1 – Géométrie du conducteur thermique

Q2. Sur quelle direction est le vecteur densité $\vec{j_Q}$ de courant thermique? De quelles variables dépend-il?

Les températures, sauf avis contraire, sont en °C.

Q3. Faire un bilan énergétique sur la tranche de matériau comprise entre z et $z + \text{d}z$ et en déduire l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit la température $T(z, t)$.

Q4. Que devient-elle en régime stationnaire? Le vecteur $\vec{j_Q}$ dépend-il alors de z?

Q5. On suppose que le matériau est en présence de thermostats qui imposent à tout moment une température $T_{\text{entrée}}$ en $z = 0$ et T_{sortie} en $z = e$. Que vaut la puissance thermique φ qui traverse le matériau en fonction de e, λ, H, L, $T_{\text{entrée}}$ et T_{sortie} ?

Q6. Définir puis exprimer la résistance thermique du matériau en fonction de ses caractéristiques géométriques et de sa conductivité. Que signifie, du point de vue thermique, mettre des résistances en parallèle et mettre des résistances en série ?

On peut mesurer expérimentalement la conductivité thermique de la laine à partir d'un échantillon de celle-ci par la méthode de la plaque chaude gardée (figure III-2). L'échantillon est formé de deux « plaques » de laine identiques d'épaisseur e et de surface S séparées par une plaque chaude. Un même flux thermique φ, engendré par effet Joule dans un conducteur électrique inséré dans la plaque chaude, traverse les échantillons. Les plaques d'échantillon sont encadrées chacune par une plaque froide. Les températures T_c et T_f des plaques chaude et froides sont mesurées en régime permanent par des thermocouples.

Q7. Exprimer l'expression de la conductivité λ_{laine} de l'échantillon en fonction de φ, e, S, T_c et T_f.

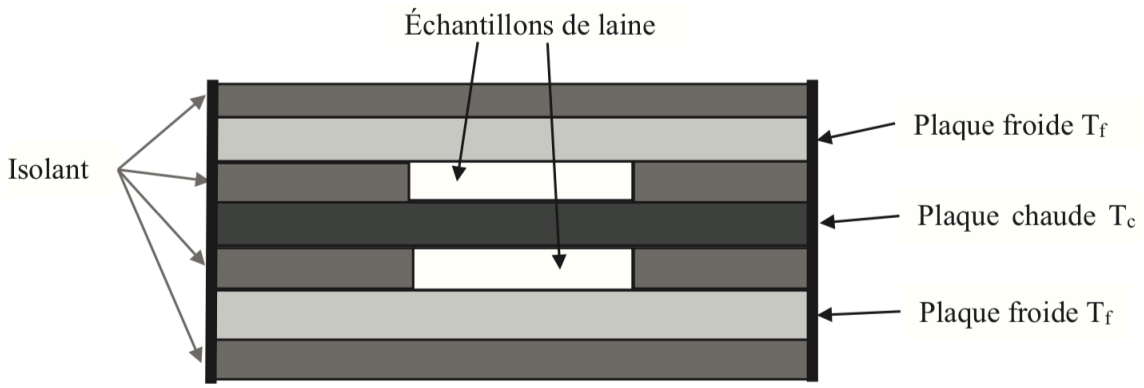


FIGURE III-2 – Principe de la plaque chaude gardée

2 Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

On modélise la brebis debout par un parallélépipède plain, de température uniforme $\theta_{éq} = 39\,°C$, de longueur $L = 100$ cm et de section carrée de côté $H = 30$ cm. Le corps de la brebis est entouré d'une épaisseur qui peut varier de $e = e_m = 10$ cm avant la tonte à $e = e_m = 0{,}5$ cm après la tonte. La situation est représentée en figure III-3 et en figure III-4.

Q8. Exprimer la résistance thermique R_{diff} de cette carapace de laine en négligeant les effets de bords, en fonction de L, H, e et λ_{laine}. Évaluer son ordre de grandeur pour les deux épaisseurs limites.

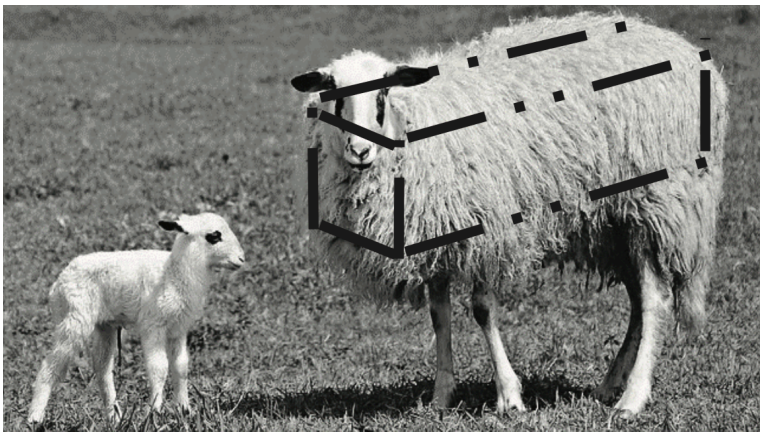


FIGURE III-3 – Modélisation de la brebis

On doit tenir compte de deux autres phénomènes d'échanges thermiques : la conducto-convection (d'autant plus importante que le vent est fort) et le rayonnement thermique toujours présent.

Q9. La loi de Newton, relative au phénomène de conducto-convection, correspond à un vecteur de densité thermique reçu par la brebis égal à

$$\vec{J}_Q = -h(T_{ext} - T_{air})\vec{n}\,,$$

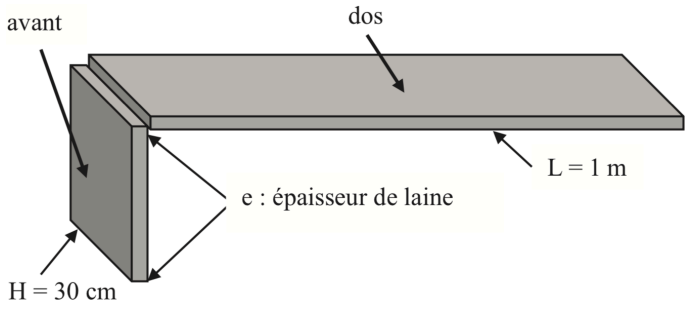


FIGURE III-4 – Modélisation de la toison (seules les parties lainières du dos et de l'avant ont été schématisées)

où T_{ext} est la température de la surface extérieure de la brebis en contact avec l'air de température T_{air} et $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normale orienté de la brebis vers l'extérieur.
On prendra un coefficient de Newton laine/air égal à $h = 4{,}0\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.
En déduire en fonction de h, L et H la résistance thermique de conducto-convection R_{cc} à introduire dans notre modèle de brebis. Évaluer son ordre de grandeur.

Le phénomène de rayonnement introduit une résistance supplémentaire R_r. Comme la température de l'air est assez proche de celle de l'animal, la puissance P_r due au rayonnement thermique sortant de la surface extérieure de la brebis s'exprime sous la forme

$$P_r = KA(T_{ext} - T_{air}),$$

où A est l'aire de la surface extérieure de la brebis, et T_{ext} est la température de cette surface en contact avec l'air de température T_{air}. La constante K a pour valeur $K = 5{,}0\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.

Q10. Exprimer la résistance thermique de rayonnement R_r en fonction de K, L et H.

Q11. Faire un schéma du montage de ces trois résistances placées entre la température interne de la brebis $T_{int} = \theta_{éq} = 39$ °C et la température de l'air T_{air}. Évaluer numériquement les deux valeurs R_1 et R_2 des résistances équivalentes de la brebis non tondue et de la brebis tondue.

La brebis non tondue est dans un confort climatique pour la température de l'air égale à $T_0 = 5$ °C. En plus des phénomènes de diffusion, conducto-convection et rayonnement, il y a évaporation d'eau par sudation.
La brebis émet de la vapeur d'eau par les voies respiratoires **en toute situation** :

$$\dot{m} = 5{,}8 \times 10^{-6}\ \mathrm{g\cdot s^{-1}}.$$

Elle en émet deux fois plus par sa surface cutanée quand elle vient d'être tondue :

$$\dot{m}' = 2\dot{m}$$

et que la température extérieure est supérieure à 5,1 °C.
L'enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau vaut $\Delta H^\circ_{vap} = 2500\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ et est supposée indépendante de la température.

Q12. En déduire la puissance p_{m0} apportée à la brebis par son métabolisme dans une situation de confort juste avant la tonte. On l'exprimera en fonction de $\dot{m}$, ΔH°_{vap}, R_1, T_{int} et T_{air}, puis on fera l'évaluation numérique pour $T_{air} = T_0 = 5$ °C.

Q13. Répondre à la même question pour la brebis juste après la tonte pour la température de confort $T_0 = 5$ °C.

3 Déséquilibre thermique d'une brebis (situation de stress et de danger)

La thermorégulation est due à des productions internes de chaleur (thermogenèse liée au métabolisme et à l'activité physique) et à des déperditions de chaleur au niveau de la respiration et de la peau (thermolyse).
Dans une situation où l'air environnemental est en dehors de la zone de confort, la brebis va se réchauffer ou se refroidir et éventuellement transpirer. On négligera la capacité thermique de la toison devant celle du corps de la brebis. On assimile la brebis à un volume d'eau de masse volumique $\mu = 1000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et de capacité thermique massique $c = 4200\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$. On admet que les variations de température sont suffisamment lentes pour utiliser les notions de résistances. On note p_m la puissance apportée par le métabolisme.

Q14. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à la **brebis non tondue** dans une situation (1) où la température T_{air} de l'environnement est différentes de $T_0 = 5$ °C, montrer que l'équation différentielle relative à la température $T(t)$ de la brebis s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_1}(T(t) - T_{air}) = \frac{(T_1 - T_{air})}{\tau_1}.$$

On exprimera τ_1 en fonction de μ, c, L, H, R_1 et $(T_1 - T_{air})$ en fonction de $\theta_{éq}$, T_0, R_1 et $(p_m - p_{m0})$.

Q15. Exprimer la température $T(t)$ en fonction de t, T_1, τ_1 et $\theta_{éq}$ en supposant que la température initiale de la brebis est $T(t = 0) = \theta_{éq}$.

Q16. Calculer τ_1. Calculer T_1 en °C pour $p_m = p_{m0}$ avec une température d'environnement égale à $T_{air} = 17$ °C.

Q17. D'après les donnés du document, la **brebis non tondue** reste dans sa zone d'adaptation pour une température extérieure variant de −8 °C à 15 °C. En déduire entre quelles limites peut varier la puissance apportée par le métabolisme de l'animal dans cette situation (1) sans qu'il y ait danger pour lui. On suppose donc que la brebis reste à sa température d'équilibre $\theta_{éq} = 39$ °C.

Q18. En appliquant le premier principe à la **brebis tondue** dans une situation (2) où la température T_{air} de l'environnement est supérieure à $T_0 = 278$ K = 5 °C, montrer que l'équation différentielle relative à la température $T(t)$ de la brebis peut se mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_2}(T(t) - T_{air}) = \frac{(T_2 - T_{air})}{\tau_2},$$

dans laquelle les notations T_2 et τ_2 sont des constantes à déterminer.

Exprimer τ_2/τ_1. Commenter.

En supposant que la possibilité de variation de la puissance métabolique soit celle obtenue à la question 17, jusqu'à quelle température extérieure la brebis tondue peut-elle s'adapter à la chaleur ?

Q19. Faire un schéma de montage électrique équivalent aux situations (1) et (2) en indiquant les valeurs des éléments du montage en fonction de T_1, T_2, τ_1 et τ_2, R_1 et R_2.

Tracer l'allure de $T(t)$ dans une situation de type (1) (brebis non tondue) pour une température initiale $T(t = 0) = \theta_{éq} = 39$ °C avec $p_m = p_{m0}$ et une température de l'air égale à 17 °C.

Tracer l'allure de $T(t)$ dans une situation de type (2) (brebis tondue) à partir d'une température initiale $T(t = 0) = \theta_{éq} = 39$ °C et une température de l'air égale à 25 °C sachant que $T_2 - T_{air} = 2{,}6$ °C.

4 Réponse d'un groupe de brebis

Les brebis se serrent les unes contre les autres en situation de stress thermique dû au froid extérieur. Supposons que le berger ait un troupeau de 6 brebis non tondues. Plusieurs regroupements sont possibles, comme indiqué en figure III-5.

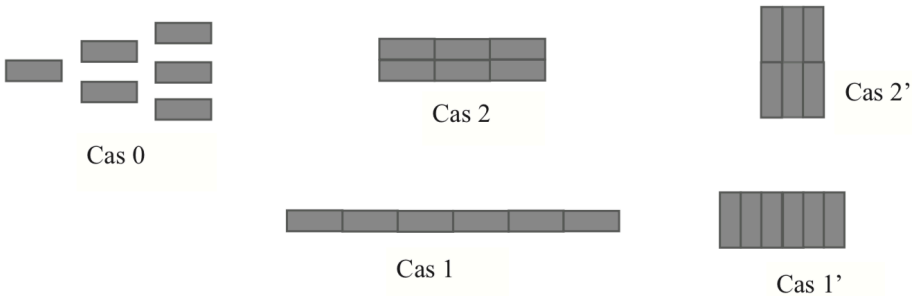


FIGURE III-5 – Regroupements possibles de 6 brebis

Q20. Évaluer la diminution de surface en contact avec l'air par rapport aux brebis isolées dans les cas 1, 1′, 2 et 2′ en fonction de H et $X = L/H = 3{,}3$ (longueur L et section carrées de côté H telles que définies dans la figure III-4). Quel sera le cas de plus faible conductance thermique ? Dans quelle configuration est brebis ont-elles intérêt à se regrouper ? Quelle sera la diminution relative moyenne de métabolisme nécessite au maintien de la température interne par le regroupement ? Certaines ont-elles intérêt à changer de place de temps en temps ?

Partie IV — Enthalpie de dissolution du chlorure de sodium dans l'eau (E3A PSI)

Expérience 1

On place dans un calorimètre une masse $m_1 = 300$ g d'eau ainsi qu'un thermomètre et un barreau aimanté. L'ensemble est à la température ambiante $T_1 = 20$ °C. On ajoute rapidement une quantité $m_2 = 200$ g d'eau à $T_2 = 60$ °C. À l'équilibre, on relève une température $T_3 = 35$ °C.

Expérience 2

On introduit dans le même calorimètre, toujours équipé d'un thermomètre et d'un barreau aimanté, une masse $m_3 = 500$ g d'eau. Le tout est à température ambiante $T_1 = 20$ °C.
On introduit ensuite rapidement une masse $m_4 = 50$ g de chlorure de sodium initialement à la température ambiante $T_1 = 20$ °C.
On mesure alors une baisse brutale de température $\Delta T = -1{,}5$ °C.
On note c_e la capacité calorifique massique de l'eau à pression constante, supposée indépendante de la température. De plus, la capacité calorifique d'une solution sera assimilée à celle de l'eau pure qu'elle contient.
On donne $c_e = 4{,}18\ \text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Q1. Exprimer la capacité thermique C du calorimètre équipé de ses accessoires (thermomètre + barreau aimanté) en fonction de c_e, m_1, m_2, T_1, T_2 et T_3.

Q2. Exprimer l'enthalpie massique de dissolution de NaCl dans l'eau, notée $\Delta_{diss}h$, en fonction de c_e, C, m_3, m_4 et ΔT.

Données

Masses molaires
$M(\text{Na}) = 23\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
$M(\text{Cl}) = 35{,}5\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$