DS n° 3 — Sujet « difficile »

Le sujet comporte 4 parties indépendantes. **La calculatrice est autorisée.**

➤ Le 4e problème (étude du contact thermique) est assez long et sans doute plus difficile que le reste. Je vous conseille de commencer par les 3 premières parties (dans l'ordre de votre choix) et de réserver le dernière problème pour la fin. Je n'attends pas à ce que vous le traitiez complètement !

Merci de suivre les conseils suivants :
- laisser un espace en début de copie pour la note et les commentaires ;
- laisser une marge à chaque page pour les commentaires et décompte des points ;
- respecter et indiquer la numérotation des questions ;
- souligner ou encadrez les résultats.

Partie I — Les explosions nucléaires (Centrale)

Les recherches sur le noyau d'uranium ont mis en évidence le phénomène de fission nucléaire en 1939 ; ces travaux ont trouvé leur première application lors de l'explosion de la bombe d'Hiroshima, le 6 août 1945. Il va de soi que l'invention de la « bombe atomique » n'est peut-être pas le plus grand progrès de l'Humanité. Mais en l'état actuel des choses, cette arme existe, et il est souhaitable d'en aborder l'aspect physique pour mieux en saisir les tenants et les aboutissants scientifiques.
On rappelle en coordonnées sphériques :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) ; \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r .$$

On rappelle de plus la relation $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, N) = \Delta N$.
On donne le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$.

La désintégration de l'uranium 235

L'élément uranium se présente essentiellement sous la forme de deux isotopes ; le plus répandu à l'état naturel, U^{238}, possède 92 protons et 146 neutrons ; l'autre isotope est U^{235} dit isotope « fissible ». Lorsqu'un noyau U^{235} est heurté par un neutron (noté n), il peut « fissionner », suivant la réaction suivante :

$$\mathrm{U}^{235}_{92} + \mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \text{plusieurs neutrons} + \text{énergie},$$

où X et Y sont deux noyaux le plus souvent radioactifs.
Le nombre moyen de neutrons émis dans la désintégration d'un noyau U^{235} est $\nu \approx 2{,}5$. On voit ainsi la possibilité d'une réaction en chaîne, utilisable de manière contrôlée dans une centrale nucléaire, ou de manière explosive dans une bombe.
L'énergie libérée par la désintégration d'un noyau U^{235} est en moyenne de 170×10^6 eV ($1\ \mathrm{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J). Lorsque la masse du bloc d'uranium devient supérieure à une valeur critique, la réaction en chaîne s'emballe et devient explosive.

1 — Diffusion de neutrons

Q1. Quelle serait l'énergie libérée par la désintégration totale d'un kilogramme de U^{235} ?

Q2. L'énergie libérée par l'explosion d'une tonne de trinitrotoluène, un explosif chimique classique encore dénommé TNT, est de $4{,}2 \times 10^9$ J. En déduire l'énergie libérée par la désintégration supposée totale d'un kilogramme de U^{235}, exprimée en équivalent tonnes de TNT. Commenter le résultat.

Soit $N(x, y, z, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume, et $\vec{J}$ le vecteur densité de flux de neutrons.
On donne l'équation fondamentale de la neutronique :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\,\vec{J} + \left(\frac{\nu - 1}{\tau}\right) N(x, y, z, t). \tag{1}$$

Q3. Donner l'interprétation des deux termes situés à droite de l'égalité.

Q4. Quelle interprétation proposez-vous pour la constante τ ?

Q5. Expliquer pour $\nu - 1$ intervient dans le terme de droite, et pas ν.

2 — Masse critique

On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium (ou masse critique) pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive.
On suppose que le problème est à géométrique sphérique : $N = N(r,t)$ et $\vec{J} = J(r,t)\vec{e}_r$.

Q6. On cherche une solution de la forme $N(r,t) = N_1(r)\,\mathrm{e}^{\nu' t/\tau}$.
Montrer que l'équation (1) conduit alors à une équation différentielle du second ordre en $N_1(r)$ que l'on explicitera.

Q7. On pose $g(r) = r N_1(r)$.
Montrer que $g(r)$ est solution d'une équation différentielle très classique.

Q8. On cherche une fonction $r \to N_1(r)$ telle que $N_1(r = R) = 0$, que $N_1(r)$ ne s'annule pas pour $r \in]0, R[$ et telle que $N_1(r)$ tende vers une limite finie quand r tend vers zéro.
On pourra poser $\alpha^2 = \pm\dfrac{\nu' - \nu + 1}{D\tau}$ selon le signe de $\nu' - \nu + 1$ pour mener la discussion.
Montrer que c'est possible si

$$\nu' = (\nu - 1) - \frac{\pi^2 D\tau}{R^2}\,.$$

Q9. Interpréter le fait que ν' augmente si R croît.

Q10. Quelle est la différence fondamentale entre les cas $\nu' > 0$ et $\nu' < 0$?

Q11. Exprimer le rayon minimal R_c tel qu'il puisse y avoir réaction en chaîne, en fonction de D, τ et ν.

Q12. On donne pour U_{92}^{235} de masse volumique $\rho = 19 \times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$:

$$\pi^2 D\tau = 2{,}2 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^2 \quad \text{et} \quad \nu = 2{,}5\,.$$

Calculer la valeur du rayon critique R_c, ainsi que la masse critique M_c (masse de la boule d'uranium de rayon R_c).

Q13. Pour des raisons évidentes, on ne peut pas stocker sans précaution une masse d'uranium supérieure à la masse critique. Quelle disposition raisonnable pouvez-vous suggérer pour le conditionnement d'une arme nucléaire, embarquée dans un missile ? Comment pourrait-on déclencher l'explosion ?

Partie II — Contrôle de température au sein d'un synthétiseur analogique (d'après Centrale)

Les variations de température influent sur la stabilité des composants d'un synthétiseur analogique. L'utilisation d'ailettes de refroidissement sur les transistors permet de limiter ces effets. Ce sont de petits dissipateurs thermiques, généralement en aluminium, posés directement sur le transistor et qui augmente la surface d'échange avec l'air. Cela permet d'évacuer plus efficacement l'énergie et de stabiliser la température des composants. Ces ailettes sont souvent couplées à des ventilateurs pour renouveler l'air en contact avec elles. Ce contrôle thermique est essentiel pour garantir la stabilité des fréquences associées aux notes du synthétiseur. Le dimensionnement correct de ces ailettes est important pour des raisons thermiques mais aussi économiques.
On modélise une de ces ailettes par un pavé droit de longueur ℓ, de largeur L et d'épaisseur e, avec $e \ll \ell$ et $e \ll L$. On note ρ la masse volumique de l'ailette, c sa capacité thermique massique, λ sa conductivité thermique et $T(x,t)$ le champ de température. La base de l'ailette en $x = 0$ est reliée au transistor de température T_1 supposée constante et on suppose que le contact thermique y est parfait. Partout ailleurs, l'ailette est en contact avec l'air à température T_a uniforme, avec $T_\mathrm{a} < T_1$. On suppose que le gradient transverse de température est suffisamment faible pour que, sur la section droite d'abscisse x, la température $T(x,t)$ puisse être considérée uniforme.
En régime permanent, la surface de l'ailette échange un transfert conducto-convectif avec l'air ambiant. Ce transfert est modélisé par la loi de Newton : la puissance thermique traversant une surface $\mathrm{d}S$ de l'interface s'écrit $h\,\mathrm{d}S(T_{S_1} - T_{S_2})$, où h désigne le coefficient de transfert conducto-convectif et T_{S_1} et T_{S_2} les températures de part et d'autre de l'interface.
On considère comme système la tranche de l'ailette entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, comme représenté sur la figure II-1.

Q1. Déterminer précisément la puissance δP_cc fournie par le système à l'air au travers des échanges conducto-convectifs en fonction de h, T_a, $T(x,t)$ et de paramètres géométriques.

Q2. En effectuant un bilan énergétique en régime stationnaire, prouver que le champ de température vérifie

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}(x) - m^2 T(x) = -m^2 T_\mathrm{a}\,.$$

Exprimer m en fonction [1] de h, λ et e, en considérant $m > 0$.

1. On rappelle que $e \ll L$.

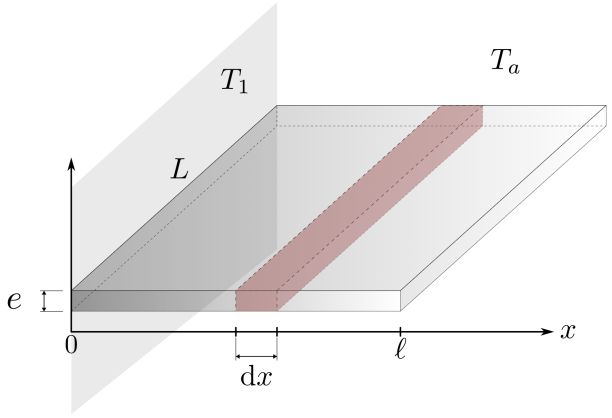


FIGURE II-1 – Modélisation d'une ailette en contact avec un transistor

Q3. Quelle condition limite le champ de température vérifie-t-il en $x = 0$?

En ce qui concerne la condition limite en $x = \ell$, plusieurs possibilités peuvent être envisagées :

Hypothèse 1 : l'ailette est supposée suffisamment longue selon l'axe $\vec{u}_x$ pour pouvoir considérer $m\ell \gg 1$.

Hypothèse 2 : le transfert thermique par diffusion est considéré nul en $x = \ell$.

Hypothèse 3 : le transfert thermique en $x = \ell$ se fait par conducto-convection.

Q4. Écrire, pour chaque hypothèse, la condition limite associée à T en $x = \ell$. Laquelle de ces hypothèses vous semble la plus réaliste pour l'ailette étudiée telle que $\ell = 15$ mm et $e = 2$ mm ? Justifier.

Q5. Sous l'hypothèse 1, déterminer le champ de température $T(x)$. Exprimer ensuite $\widetilde{T}(x) = \dfrac{T(x) - T_\text{a}}{T_1 - T_\text{a}}$ en fonction de m et x, puis tracer $\widetilde{T}(x)$.

On se place dans la suite sous l'hypothèse 2.

Q6. Déterminer $\widetilde{T}(x)$.

Q7. Déterminer le flux thermique total Φ évacué par l'ailette.

Q8. On pose Φ_u le flux thermique qui serait évacué par l'ailette si sa température étant en tout point égale à la température de la base T_1. Sans calcul, déterminer lequel de Φ ou de Φ_u est le plus élevé.

Q9. On définit le rendement thermique de l'ailette par $\eta = \Phi/\Phi_\text{u}$. Pourquoi peut-on assimiler cette grandeur à un rendement ?

Q10. Montrer alors que

$$\eta = \frac{\tanh(m\ell)}{m\ell},$$

où tanh est la fonction tangente hyperbolique définie en fin d'énoncé.

Les calculs sous l'hypothèse 3 sont plus complexes, mais la forme précédente reste applicable en remplaçant ℓ par $\ell_\text{c} = \ell + e/2$. Il est également possible de réaliser les mêmes calculs pour d'autres configurations d'ailettes. La figure II-2 illustre ces différentes configurations géométriques ainsi que leur rendement thermique. Des contraintes techniques imposent que les ailettes intégrées aux synthétiseurs analogiques compacts aient des dimensions maximales de $L = 20$ mm, $\ell = 15$ mm et $e = 2$ mm.

Q11. En vous aidant du formulaire en fin d'énoncé, déterminer la forme d'ailette permettant d'obtenir la dissipation thermique la plus efficace.

Q12. En complément des ailettes, des systèmes de ventilation peuvent être utilisés.
Quelle grandeur est alors modifiée ? Discuter de l'intérêt du ventilateur.

Données

Coefficient de transfert conducto-convectif $h = 50\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.
Propriétés de l'aluminium :

Capacité thermique massique	$c = 900\ \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Conductivité thermique	$\lambda = 215\ \text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$
Masse volumique	$\rho = 2{,}70 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

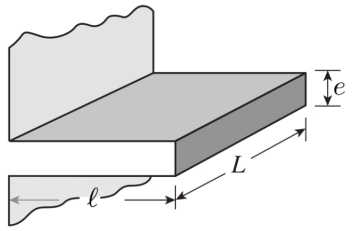
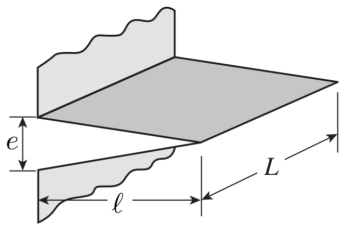
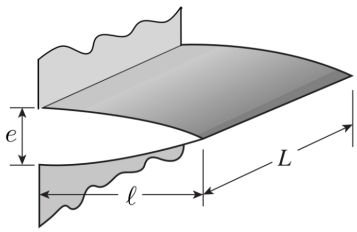
Ailette rectangulaire	Ailette triangulaire	Ailette parabolique
		
$\eta = \dfrac{\tanh(m\ell_c)}{m\ell_c}$	$\eta = \dfrac{I_1(2m\ell)}{m\ell\, I_0(2m\ell)}$	$\eta = \dfrac{2}{1+\sqrt{(2m\ell)^2+1}}$

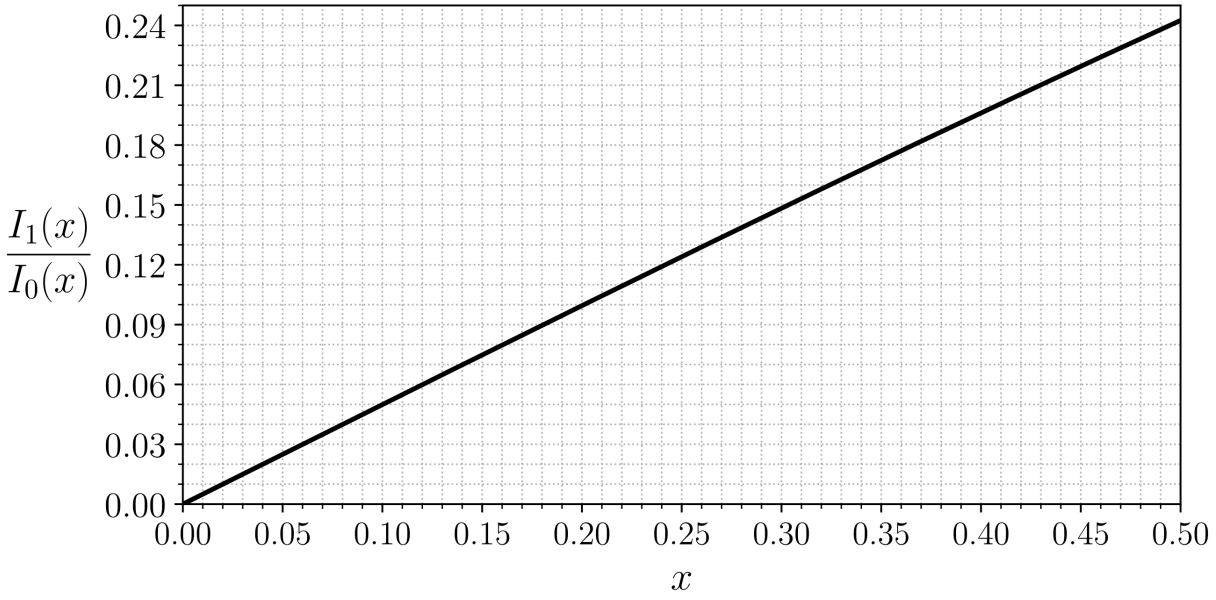
FIGURE II-2 – Différentes géométries d'ailettes (rectangulaire, triangulaire, parabolique) et expression de leur rendement thermique. Les fonction I_0 et I_1 correspond aux fonction de Besse modifiées de première espèce

Formulaire

Fonction tangente hyperbolique $\tanh = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Formule : $\cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b) = \cosh(a-b)$.

Rapport des fonctions de Bessel modifiées de première espèce $I_1(x)/I_0(x)$:



Partie III — Enthalpie de dissolution du chlorure de sodium dans l'eau (E3A PSI)

Expérience 1

On place dans un calorimètre une masse $m_1 = 300$ g d'eau ainsi qu'un thermomètre et un barreau aimanté. L'ensemble est à la température ambiante $T_1 = 20$ °C. On ajoute rapidement une quantité $m_2 = 200$ g d'eau à $T_2 = 60$ °C. À l'équilibre, on relève une température $T_3 = 35$ °C.

Expérience 2

On introduit dans le même calorimètre, toujours équipé d'un thermomètre et d'un barreau aimanté, une masse $m_3 = 500$ g d'eau. Le tout est à température ambiante $T_1 = 20$ °C.
On introduit ensuite rapidement une masse $m_4 = 50$ g de chlorure de sodium initialement à la température ambiante $T_1 = 20$ °C.
On mesure alors une baisse brutale de température $\Delta T = -1{,}5$ °C.
On note c_e la capacité calorifique massique de l'eau à pression constante, supposée indépendante de la température. De plus, la capacité calorifique d'une solution sera assimilée à celle de l'eau pure qu'elle contient.
On donne $c_e = 4{,}18\ \text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Q1. Exprimer la capacité thermique C du calorimètre équipé de ses accessoires (thermomètre + barreau aimanté) en fonction de c_e, m_1, m_2, T_1, T_2 et T_3.

Q2. Exprimer l'enthalpie massique de dissolution de NaCl dans l'eau, notée $\Delta_{diss}h$, en fonction de c_e, C, m_3, m_4 et ΔT.

Données

Masses molaires
$M(\text{Na}) = 23\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
$M(\text{Cl}) = 35{,}5\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Partie IV — Étude du contact thermique (type Mines)

1 Réponse d'un milieu semi-infini à un choc thermique

On considère un milieu semi-infini ($x > 0$), de masse volumique ρ, de capacité thermique massique à volume constant c et de conductivité thermique λ.
Initialement (à $t < 0$), le milieu est à la température uniforme T_0.
Pour $t \geqslant 0$, on impose à sa face $x = 0$ la température $T_e > T_0$. On a donc $T(x = 0, t) = T_e$ pour $t \geqslant 0$.
La diffusion thermique dans le milieu se fait de façon unidimensionnelle selon Ox ; la température y est donc de la forme $T(x, t)$.
On ne s'intéresse à l'évolution de la température dans le milieu qu'aussitôt après la mise en contact, c'est-à-dire *après un intervalle de temps court* (cette condition est discutée à la question 10).
La partie du milieu très loin de la frontière n'étant pas affecté après un temps court, on a la condition limite

$$T(\infty, t) = T_0 \quad \text{pour } t \geqslant 0\,.$$

Q1. Établir l'équation de la diffusion thermique en effectuant un bilan d'énergie sur un système que l'on précisera.

On introduira la diffusivité thermique $a = \lambda/(\rho c)$ du matériau.

On cherche une solution de l'équation de la chaleur sous la forme $T(x, t) = T(u)$, où l'on a posé

$$u = \frac{x}{2\sqrt{at}}\,.$$

Q2. Quelle est la dimension de u (justifier la réponse) ?

Q3. On pose

$$\widetilde{T}(u) = \frac{T(u) - T_e}{T_0 - T_e}\,.$$

Quelle est la dimension de cette grandeur ?
Avec la fonction $\widetilde{T}(u)$, comment s'écrivent :

— la condition initiale $T(x, 0) = T_0$?
— la condition à la frontière $T(0, t) = T_e$?
— la condition à la limite $T(\infty, t) = T_0$?

Q4. Montrer[2] que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{T}}{\mathrm{d}u^2} + 2u\frac{\mathrm{d}\widetilde{T}}{\mathrm{d}u} = 0\,.$$

Q5. En déduire[3] l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{T}}{\mathrm{d}u}$ à une constante multiplicative près que l'on notera A.

Q6. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
On définit la fonction erreur :

$$\mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v\,,$$

avec $\mathrm{erf}(\infty) = 1$ et $\mathrm{erf}(0) = 0$.
Déterminer complètement $\widetilde{T}(u)$ en fonction de $\mathrm{erf}(u)$.

Q7. En déduire l'expression de $T(x, t)$ sous la forme d'une intégrale.

Q8. Montrer que le vecteur densité de courant thermique s'écrit

$$j_{\mathrm{th}}(x, t) = -(T_0 - T_e)\frac{b}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right),$$

où b est un coefficient appelé *effusivité* du matériau, que l'on exprimera en fonction de λ, ρ et c.

2. Se reporter à l'annexe.
3. On pourra poser $F(u) = \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{T}}{\mathrm{d}u}$ pour résoudre l'équation différentielle.

Q9. On définit la profondeur de pénétration p pour le flux thermique par

$$j_{\text{th}}(p,t) = \frac{j_{\text{th}}(0,t)}{\text{e}}.$$

Exprimer p en fonction de a et t.

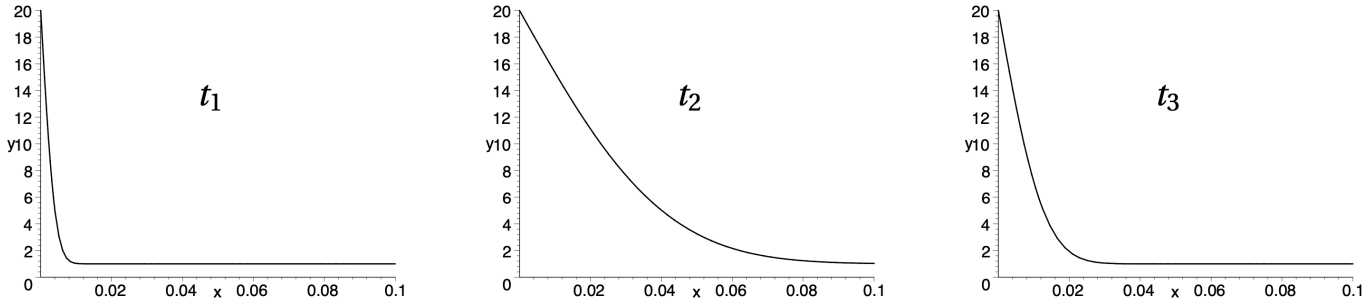
Q10. Le milieu n'est pas semi-infini, mais de profondeur L (soit $0 \leqslant x \leqslant L$).

À quelle condition sur p peut-on assimiler le milieu de profondeur L à un milieu semi-infini?

L'étude précédente ayant été menée pour un milieu semi-infini, en déduire une condition sur t pour qu'elle reste valable avec un milieu de profondeur L. Pourquoi parle-t-on alors de « réponse à temps court »?

Quelle condition limite n'est plus valable après un temps plus long?

On considère un mur de brique de 10 cm d'épaisseur.
Pour la brique à température ambiante, les données sont
$\lambda = 0{,}69\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;
$\rho = 1600\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$;
$c = 840\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.
Le mur est initialement à la température $T_0 = 1$ °C, et on applique en $t = 0$ à la face $x = 0$ la température $T_e = 20$ °C.
On représente $T(x,t)$ en fonction de x à différents instants.



Q11. Classer les dates t_1, t_2 et t_3 par ordre croissant (justifier la réponse).

Q12. La durée la plus grande parmi les graphes précédents est de 1000 s. La condition établie à la question 9 sur t pour se placer dans l'hypothèse du milieu semi-infini est-elle vérifiée?

2 Mise en contact thermique de deux corps

On considère deux corps semi-infinis notés 1 et 2. Pour $t < 0$, le milieu 1 est à la température T_{01} et le milieu 2 à la température T_{02}.
On met brusquement les deux milieux en contact à l'instant $t = 0$:

— le milieu 1 correspond à $x < 0$;

— le milieu 2 correspond à $x > 0$;

— la surface de contact entre les deux milieux est le plan $x = 0$.

On considère le contact thermique parfait entre les deux corps.
On ne s'intéresse à l'évolution du système qu'aussitôt après la mise en contact; on est alors en droit de considérer les milieux comme semi-infinis, comme on l'a montré dans la première partie.
Le milieu 1 est caractérisé par sa conductivité thermique λ_1, sa masse volumique ρ_1, sa capacité thermique massique à volume constant c_1, sa diffusivité thermique $a_1 = \lambda_1/(\rho_1 c_1)$ et son effusivité b_1.
Le milieu 2 est caractérisé de même par λ_2, ρ_2, c_2, a_2 et b_2.

Q13. Par analogie avec la première partie, écrire sans les établir les deux équations aux dérivées partielles vérifiées par $T_1(x,t)$ et $T_2(x,t)$.

Q14. Quelle relation a-t-on entre $T_1(0,t)$ et $T_2(0,t)$ pour $t \geqslant 0$?

Q15. Que peut-on dire du flux thermique en $x = 0$? Justifiez votre réponse brièvement.

En déduire une relation entre $\dfrac{\partial T_1}{\partial x}(0,t)$ et $\dfrac{\partial T_2}{\partial x}(0,t)$ pour $t \geqslant 0$.

Q16. D'après les conditions initiales, déterminer $T_1(-\infty,t)$, $T_1(x,0)$ pour $x < 0$, $T_2(+\infty,t)$ et $T_2(x,0)$ pour $x > 0$.

Comme lors de l'étude précédente, on pose

$$u_1 = \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}},$$

et[4]

$$\widetilde{T}_1(u_1) = \frac{T_1(u_1) - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \quad \text{et} \quad \widetilde{T}_2(u_2) = \frac{T_2(u_2) - T_{02}}{T_{01} - T_{02}}.$$

Q17. Montrer que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{T}_1}{\mathrm{d}u_1^2} + 2u_1\frac{\mathrm{d}\widetilde{T}_1}{\mathrm{d}u_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2\widetilde{T}_2}{\mathrm{d}u_2^2} + 2u_2\frac{\mathrm{d}\widetilde{T}_2}{\mathrm{d}u_2} = 0.$$

Q18. Comment s'écrivent les conditions initiales (à $t = 0$) et aux limites (pour $x \to \pm\infty$) avec les fonctions $\widetilde{T}_1(u_1)$ et $\widetilde{T}_2(u_2)$?

Q19. En utilisant une relation de continuité en $x = 0$, montrer que l'on a

$$b_1\frac{\mathrm{d}\widetilde{T}_1}{\mathrm{d}u_1}(0) + b_2\frac{\mathrm{d}\widetilde{T}_2}{\mathrm{d}u_2}(0) = 0.$$

Q20. En utilisant une autre relation de continuité en $x = 0$, montrer que l'on a

$$\widetilde{T}_1(0) + \widetilde{T}_2(0) = 1.$$

Q21. L'intégration des équations établies à la question **17** conduit à

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{T}_1}{\mathrm{d}u_1} = A_1\,\mathrm{e}^{-u_1^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\widetilde{T}_2}{\mathrm{d}u_2} = A_2\,\mathrm{e}^{-u_2^2},$$

où A_1 et A_2 sont deux constantes.
En déduire une relation entre b_1, b_2, A_1 et A_2.

Q22. On définit la fonction erreur complémentaire :

$$\mathrm{erfc}(u) = 1 - \mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v,$$

les propriétés de la fonction erf étant données à la question **6**.
Exprimer $\widetilde{T}_1(u_1)$ et $\widetilde{T}_2(u_2)$ respectivement en fonction de $\mathrm{erfc}(u_1)$ et $\mathrm{erfc}(u_2)$.

Q23. Montrer que $A_1 - A_2 = 2/\sqrt{\pi}$.

Q24. Montrer finalement que

$$\frac{T_1(x,t) - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} = \frac{b_2}{b_1 + b_2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}}\right)$$

et

$$\frac{T_2(x,t) - T_{02}}{T_{01} - T_{02}} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right).$$

Q25. En déduire la température du point de contact, notée $T_c(t)$ en $x = 0$ en fonction des températures initiales des deux corps T_{01} et T_{02}, et des effusivités b_1 et b_2.
Commenter le résultat obtenu.

Q26. Que peut-on dire de la température du point de contact si $b_1 \gg b_2$?
L'effusivité de la peau est $b_p \approx 1600$ SI, celle du bois $b_b \approx 11$ SI et celle de l'acier $b_a \approx 13\,000$ SI.
En calculant la température de contact, expliquer la différence de sensation si on touche ($T_{peau} = 37$ °C) un morceau de bois ou un morceau d'acier à la même température de 60 °C, peu après le contact.
Que se passe-t-il si l'on garde le contact plus longtemps ?

Annexe

Soit $g(x,t) = f(u)$, avec $u(x,t)$ fonction de deux variable, et f une fonction d'une variable (fonction composée).
On a

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

4. Ces variables sont choisies de façon à garder la symétrie du problème.