TD phénomènes de transport **Diffusion thermique — Partie 3 - solution**

1 — Mise en équation

1. L'équation de la chaleur est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

2. L'équation de la chaleur est aussi vérifiée par $\theta(x,t) = T(x,t) - T_0$. En notation complexe on obtient

$$\underline{F}(x)\underline{G}'(t) = a\underline{F}''(x)\underline{G}(t)$$

soit

$$\frac{\underline{G}'(t)}{\underline{G}(t)} = a\frac{\underline{F}''(x)}{\underline{F}(x)}.$$

Le premier membre étant indépendant de x et le second de t, ces deux termes sont égaux à une constante a priori complexe :

$$\frac{\underline{G}'(t)}{\underline{G}(t)} = a\frac{\underline{F}''(x)}{\underline{F}(x)} = \underline{K}.$$

On se ramène alors à deux équations différentielle :

$$\underline{G}'(t) = \underline{K}\,\underline{G}(t) \tag{1}$$

et

$$\underline{F}''(x) = \underline{K}\,\underline{F}(x). \tag{2}$$

3. La solution générale de l'équation (1) s'écrit

$$\underline{G}(t) = \underline{G}(0)\,\mathrm{e}^{\underline{K}t}.$$

La condition en $x = 0$ s'écrit

$$\theta(x,t) = T_1\cos(\omega t)$$

soit

$$\underline{\theta}(x,t) = T_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \underline{F}(0)\underline{G}(0)\,\mathrm{e}^{\underline{K}t}.$$

On en déduit $\boxed{\underline{K} = \mathrm{i}\omega}$.

4. L'équation (2) s'écrit alors

$$\underline{F}''(x) = \mathrm{i}\frac{\omega}{a}\underline{F}(x).$$

L'équation caractéristique associée est

$$\underline{r}^2 - \mathrm{i}\frac{\omega}{a} = 0.$$

Les racines sont

$$\underline{r} = \pm\sqrt{\mathrm{i}\frac{\omega}{a}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}\right)^{1/2} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$$

soit

$$\underline{r} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+\mathrm{i}).$$

➤ Se reporter au cours pour la suite. On pose la distance caractéristique $\delta = \sqrt{\dfrac{2a}{\omega}}$. La suite a été vue. L'intérêt de cet exercice est d'établir explicitement la dépendance temporelle harmonique de la température dans le milieu.

2 — Oscillations thermiques

1. Question de cours :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{a = \frac{\lambda}{\rho c}}.$$

2. On remplace l'expression $\underline{T}(x,t)$ proposée dans l'équation aux dérivées partielles précédente :

$$\mathrm{i}\omega\underline{\theta} = a\frac{\mathrm{d}^2\underline{\theta}(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{\theta}(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{i}\omega}{a}\underline{\theta}(x) = \frac{\omega}{a}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}\,\underline{\theta}(x) = \underline{k}^2\underline{\theta}(x)$$

avec

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega}{a}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+\mathrm{i}).$$

La solution générale est de la forme

$$\underline{\theta}(x) = \underline{A}\,\mathrm{e}^{\underline{k}x} + \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\underline{k}x}.$$

On peut introduire une longueur caractéristique

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}},$$

d'où

$$\boxed{\underline{\theta}(x) = \underline{A}\,\mathrm{e}^{\frac{(1+\mathrm{i})x}{\delta}} + \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\frac{(1+\mathrm{i})x}{\delta}}}.$$

On en déduit

$$\underline{T}(x,t) = \underline{A}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{\delta}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}x}{\delta}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}x}{\delta}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + Cx + D.$$

La température ne pouvant diverger quand $x \to +\infty$, on a nécessairement $\underline{A} = 0$ et $C = 0$, d'où

$$\underline{T}(x,t) = \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \frac{x}{\delta})} + D.$$

En $x = 0$, on impose

$$\underline{T}(0,t) = T_\mathrm{a} + \theta_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \underline{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + D,$$

d'où $\underline{B} = \theta_0$ et $D = T_\mathrm{a}$. Finalement

$$\underline{T}(x,t) = \theta_0\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \frac{x}{\delta})} + T_\mathrm{a}.$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$\boxed{T(x,t) = T_\mathrm{a} + \theta_0\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}.$$

On observe une onde de température :

— son amplitude décroît exponentiellement sur une distance caractéristique δ d'autant plus courte que la pulsation est élevée ;
— les variations à une distance x de la surface présentent un déphasage x/δ avec la variation à la surface, qui augmente avec x.

3. On a $\omega = 2\pi/T$ où $T = 24\,\text{h} = 86400\,\text{s}$ pour la période jour-nuit. L'épaisseur caractéristique est donnée par

$$\delta = \sqrt{\frac{aT}{\pi}} = 14\,\text{cm}.$$

Cette épaisseur est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur d'un mur. Les fluctuations journalières de température sont atténuées mais pas négligeables de l'ordre côté d'un mur de faible épaisseur.

4. On cherche l'épaisseur L telle que

$$\mathrm{e}^{-\frac{L}{\delta}} = \frac{1}{10}$$

soit $L = \delta \ln(10)$. On calcule $\boxed{L = 32\,\text{cm}}$.

3 — Diffusion thermique dans un câble

1. Cours :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{\mu c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}.$$

2. On se place ici en régime stationnaire. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$: le profil de température est affine, et le flux ne dépend pas de x.

On a donc

$$\Phi = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}S$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{T(L)-T(0)}{L-0} = \frac{T_2-T_1}{L}$$

d'où

$$\Phi = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2).$$

➤ On retrouve la résistance thermique du câble. On aurait pu utiliser ce résultat directement.

On a

$$\Phi = \frac{2400}{60} = 40\,\text{W}.$$

On calcule

$$\lambda = \frac{\Phi L}{S(T_1-T_2)} = \frac{40}{100\times10^{-4}\times(300-280)}$$

soit $\boxed{\lambda = 200\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}}$.

Le câble est un assez bon conducteur thermique (cette valeur est assez proche de la conductivité thermique de l'aluminium).

3. On donne

$$T(x,t) = T_0 + A\mathrm{e}^{-mx}\cos(\omega t - \alpha x + \varphi).$$

3.a) Le terme $\cos(\omega t - \alpha x + \varphi)$ correspond à une onde progressive harmonique, qui se propage dans le câble dans le sens des x croissants.

Le terme e^{-mx} correspond à une atténuation sur une distance caractéristique $1/m$.

On observe donc une onde de température atténuée dans le câble.

Pour $x = 0$, on a

$$T(0,t) = T_0 + A\cos(\omega t + \varphi) = T_0 + A\cos(\omega t)$$

d'où $\boxed{\varphi = 0}$.

Pour déterminer m et α, il faut écrire que $T(x,t)$ vérifie l'équation de la chaleur. Il est plus simple de se placer en notation complexe :

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-(m+\mathrm{i}\alpha)x}.$$

On a

$$\frac{\partial\underline{T}}{\partial t} = \mathrm{i}\omega\underline{T}(x,t)$$

et

$$\frac{\partial^2\underline{T}}{\partial x^2} = (m+\mathrm{i}\alpha)^2\underline{T}(x,t).$$

L'équation de la chaleur conduit, après simplification par $\underline{T}(x,t)$, à

$$\mu c\mathrm{i}\omega = \lambda(m+\mathrm{i}\alpha)^2.$$

On a donc

$$m+\mathrm{i}\alpha = \sqrt{\frac{\mu c\omega}{\lambda}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \sqrt{\frac{\mu c\omega}{2\lambda}}(1+\mathrm{i}).$$

On en déduit

$$\boxed{m = \alpha = \sqrt{\frac{\mu c\omega}{2\lambda}}}.$$

3.b) L'amplitude à la profondeur x est $A\mathrm{e}^{-mx}$. En $x = 0$, on lit directement $A = 19{,}5$ °C.

Complétons le tableau de façon à avoir une relation affine :

x (m)	0	1	2	3
$A\mathrm{e}^{-mx}$	19,5	11,5	6,8	4
$Y = \ln A - mx$	2,970	2,442	1,917	1,386

Une régression linéaire sur les points (x, Y) conduit à une pente $-m = -0{,}528\,\text{m}^{-1}$. On a donc

$$\boxed{m = 0{,}528\,\text{m}^{-1}}.$$

➤ C'est aussi la valeur de α.

3.c) La profondeur d'inversion x_i est telle que $\alpha x_\text{i} = \pi$.

On calcule $\boxed{x_\text{i} = 5{,}95\,\text{m}}$.

4 — Effet de cave

1. Se reporter au cours. On obtient

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}$$

soit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

On calcule la diffusivité $a = 3{,}1 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

2. La température varie sinusoïdalement autour de la valeur moyenne T_1, avec une amplitude T_1 et une période T.

Sa valeur minimum étant en $t = 0$ (1er janvier), on peut écrire

$$T(x=0,t) = T_0 - T_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

On a

$$T_{\max} = T_0 + T_1 = 40\ °\mathrm{C} \quad \text{et} \quad T_{\min} = T_0 - T_1 = -15\ °\mathrm{C}.$$

On en déduit

$$T_0 = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} = 12{,}5\ °\mathrm{C}$$

et

$$T_1 = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} = 27{,}5\ °\mathrm{C}.$$

La période est $T = 365$ jours.

3. En écrivant que $T(x,t)$ vérifie l'équation de la chaleur, on obtient

$$\underline{f}''(x) - \frac{\mathrm{i}\omega}{a} \underline{f}(x) = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$\underline{r}^2 - \frac{\mathrm{i}\omega}{a} = 0.$$

Les racines sont

$$\underline{r} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{i}\omega}{a}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{D}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

soit

$$\underline{r} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+\mathrm{i}) = \pm\frac{1+\mathrm{i}}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}.$$

On calcule

$$\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c \omega}} = \sqrt{\frac{2\lambda T}{\pi \rho c}}.$$

soit $\boxed{\delta = 2{,}5\ \mathrm{m}}$.

On a donc

$$\underline{f}(x) = \underline{A}_1\, \mathrm{e}^{\frac{1+\mathrm{i}}{\delta}x} + \underline{A}_2\, \mathrm{e}^{-\frac{1+\mathrm{i}}{\delta}x}$$

et

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + \left[\underline{A}_1\, \mathrm{e}^{\frac{1+\mathrm{i}}{\delta}x} + \underline{A}_2\, \mathrm{e}^{-\frac{1+\mathrm{i}}{\delta}x}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

On doit avoir $\underline{A}_1 = 0$ pour que l'expression ne diverge pas pour $x \to +\infty$, d'où

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{A}_2\, \mathrm{e}^{-x/\delta}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}.$$

On doit avoir

$$\underline{T}(x=0,t) = T_0 - T_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

d'où $\underline{A}_2 = -T_1$ et en prenant la partie réelle

$$\boxed{T(x,t) = T_0 - T_1\, \mathrm{e}^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}.$$

4. En notant h l'épaisseur de la couche de tuffeau au-dessus de la cave, la température dans la cave est

$$T_{\mathrm{c}} = T_0 - T_1\, \mathrm{e}^{-h/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{h}{\delta}\right).$$

La valeur crête-à-crête des variations de la température vaut

$$\Delta T = 2T_1\, \mathrm{e}^{-h/\delta} = T_{\max} - T_{\min} = 19{,}2 - 5{,}8 = 13{,}4\ °\mathrm{C}.$$

On en déduit

$$h = \delta \ln\left(\frac{2T_1}{\Delta T}\right)$$

soit $\boxed{h = 3{,}5\ \mathrm{m}}$.

5. À une profondeur de plusieurs dizaines de mètre, on a $\mathrm{e}^{-h/\delta} \ll 1$ et $T_{\mathrm{c}} \approx T_0$ tout au long de l'année.

La température dans la cave garde une valeur constante tout au long de l'année, ce qui est souhaité pour conserver au mieux les bouteilles de ~~neurotoxique cancérigène addictif~~ de Champagne.