# TD phénomènes de transport — Fluide en écoulement — Partie 1

## Dérivée particulaire — débit

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, G = \frac{\partial G}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial G}{\partial z}\vec{e}_z.$$

## 1 — Dérivée particulaire scalaire [*]

Pour chacun des cas suivants, on donne le champ des vitesses $\vec{v}(M,t)$ et le champ de masse volumique $\mu(M,t)$.
On demande de calculer la dérivée particulaire $\dfrac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t}$. Quelle est son interprétation physique ?
On se place en coordonnées cartésiennes.

**1.** Champ des vitesses : $\vec{v}(M,t) = ax\vec{e}_x - ay\vec{e}_y$.
Masse volumique : $\mu(x,y) = \mu_0\left(1+\dfrac{x}{L}\right)$.

**2.** Champ des vitesses : $\vec{v}(M,t) = v_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$.
Masse volumique : $\mu(x,t) = \mu_0\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin(\omega t)$.

On se place en coordonnées cylindriques.

**3.** Champ des vitesses : $\vec{v}(M,t) = \omega t\vec{u}_\theta$.
Masse volumique : $\mu(r,\theta) = \mu_0(1+\beta r\cos\theta)$.

**4.** Champ des vitesses : $\vec{v}(t) = \dfrac{k}{r}\vec{e}_r$.
Masse volumique : $\mu(r,t) = \mu_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\dfrac{r}{R}\right)^2$.

## 2 — Dérivée particulaire du champ des vitesses [*]

Calculer l'accélération d'une particule de fluide pour les écoulements correspondants aux champs des vitesses suivants :

**1.** $\vec{v}(x) = v_0\dfrac{x}{a}\vec{e}_x$.

**2.** $\vec{v}(y) = v_0\dfrac{y}{a}\vec{e}_x$.

**3.** $\vec{v}(x,y) = \dfrac{v_0}{\ell}(x\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$.

**4.** $\vec{v}(x,t,z) = v_0\frac{y}{h}\cos(\omega t)\vec{e}_x + u_0\vec{e}_y$.

**5.** $\vec{v}(r) = v(r)\vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques.
Dans ce dernier cas, quelles sont les lignes de courant ?
Peut-on dire que les trajectoires des particules de fluides s'identifient aux lignes de courant ?
En déduire par un calcul cinématique de l'accélération d'une particule de fluide à partir de l'analyse de son mouvement. Conclure.

## 3 — Débit volumique [*]

On considère un écoulement laminaire dont le champ des vitesses a pour expression en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}(M) = v_0\frac{z}{a}\vec{e}_x \quad \text{pour } 0\leqslant z\leqslant a.$$

**1.** Déterminer le débit volumique à travers un section normale à $Ox$, de largeur $b$ selon $Oy$.
En déduire la vitesse moyenne $V_{\text{moy}}$, vitesse uniforme donnant le même débit volumique.

On considère un écoulement laminaire dont le champ des vitesses a pour expression en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(M) = v_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\vec{e}_z \quad \text{pour } 0\leqslant r\leqslant a.$$

Ce champ des vitesses décrit l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique de rayon $a$.

**2.** Déterminer le débit volumique à travers une section normale à $Oz$.
En déduire la vitesse moyenne $V_{\text{moy}}$, vitesse uniforme donnant le même débit volumique.

## 4 — Écoulement radial [*]

Un brumisateur émet, en régime stationnaire, des particules de fluide de façon sphérique et isotrope à partir d'un point $O$, avec un débit de masse $D_{\text{m}}$.
Le champ des vitesses en coordonnées sphériques est donné par

$$\vec{v} = V_0\vec{e}_r.$$

Déterminer la masse volumique $\mu(r)$.

## 5 — Écoulement incompressible [**]

**1.** Qu'est-ce qu'un écoulement incompressible ?

**2.** Que peut-on dire de $\dfrac{\mathrm{D}\mu}{\mathrm{D}t}$ pour un tel écoulement ?

**3.** On donne la formule d'analyse vectorielle

$$\mathrm{div}(a\vec{A}) = a\,\mathrm{div}\,\vec{A} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,a)\cdot\vec{A}\,.$$

En déduire une relation vérifiée par le champ des vitesses pour un écoulement incompressible.

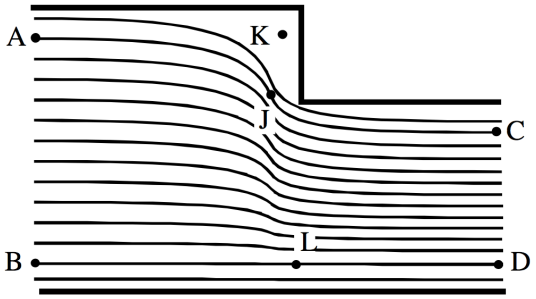
Application aux écoulements des exercices 2 et 3.

## 6 — Écoulement dans un tube [**]

De l'eau circule dans un tube dans lequel la section se réduit brusquement.

**1.** On a dessiné les lignes de courants. En quel(s) point(s) la vitesse est-elle maximale ? Minimale ? Pourquoi ?

**2.** On donne $v_A = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Quelles sont les vitesses aux points $B$, $C$ et $D$ sachant que la section de sortie est égale au 2/3 de celle d'entrée ?




## 7 — Canalisation à section lentement variable [**]

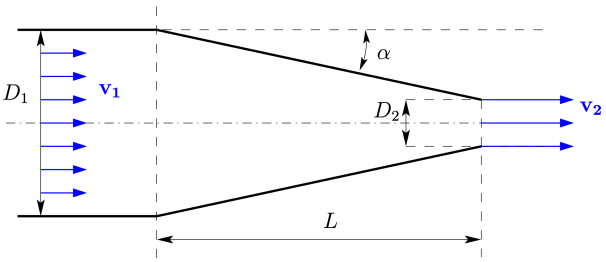
On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide compressible dans un tuyau de section lentement variable $S(x)$. Les différents champs ne dépendent que de la coordonnées d'espace $x$ : on note $\mu(x)$ la masse volumique. Le champ des vitesse sera considéré [1] comme colinéaire à $Ox$ : il est de la forme $\vec{v} = v(x)\,\vec{e}_x$.

En faisant un bilan de masse pour le volume délimité par les sections comprises entre $x$ et $x+\mathrm{d}x$, montrer que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}[\mu(x)\,v(x)]}{\mathrm{d}x} + \frac{\mu(x)\,v(x)}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

## 8 — Convergent [**]

On veut accélérer de l'eau dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par un facteur $K$.
Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle $\alpha$.




**1.** Quelle doit être la longueur $L$ de ce convergent ?

**2.** Application numérique.
On donne $K = 1{,}5$, $D_1 = 200$ mm et $\alpha = 10°$..

## 9 — Bilan de masse [**]

On considère un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface fermée $\Sigma$.
On donne le champ de masse volumique $\mu(M,t)$.
Un écoulement est décrit par le champ des vitesses $\vec{v}(M,t)$.

**1.** Écrire la masse $M(t)$ contenue dans le volume $\mathcal{V}$ à l'aide d'une intégrale triple.

**2.** Écrire la masse $\delta M_{\text{reçu}}$ reçue par le système entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$ à l'aide d'un intégrale double.

**3.** Effectuer un bilan de matière entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$ à l'aide des expressions précédentes.

**4.** Montrer que l'on en déduit l'écriture locale du bilan de masse à l'aide du théorème d'Ostrogradski.

1. Bien que ceci soit en toute rigueur contradictoire avec le fait que la section $S(x)$ soit variable.