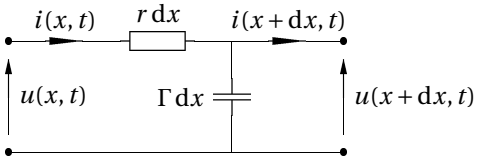
Complément TP de physique n° 7 — Étude théorique d'une ligne *RC*

L'étude expérimentale de la ligne *RC* a montré des résultats rappelant l'effet de peau, caractéristique de l'équation de la diffusion en régime harmonique.
On se propose deux modélisations de la ligne *RC* pour justifier ce comportement.

1 — Modèle de la ligne à constantes réparties

Ce modèle, *a priori* assez éloigné de la ligne réelle, permet de faire apparaître les phénomènes en jeu avec des équations simples.
On considère une ligne électrique de longueur L possédant une résistance linéique r et une capacité linéique Γ ; on parle alors de « ligne à constantes réparties ».
Une longueur dx de cette ligne a donc pour modèle électrique équivalent :



❑ **1** Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la tension $u(x,t)$ le long de la ligne.
Comment s'appelle cette équation ?

❑ **2** Dans le cas d'une ligne semi-infinie ($x > 0$), on cherche une solution en régime harmonique sous la forme complexe

$$\underline{u}(x,t) = \underline{F}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,.$$

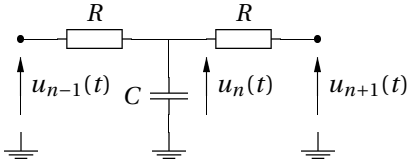
Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe $\underline{F}(x)$.
La résoudre dans le cas de la ligne semi-infinie, avec la condition à l'origine $u(0,t) = U_0\cos\omega t$.

❑ **3** En notant $\underline{u}(x,t) = \underline{U}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = U(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\varphi(x))}$, montrer que $U(x) = U_0\,\mathrm{e}^{-x/\delta}$ et préciser l'expression de δ en fonction de la fréquence f et des paramètres de la ligne.
Donner l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des paramètres de la ligne.
Donner l'expression de la tension réelle $u(x,t)$.

❑ **4** Faire apparaître une distance caractéristique δ décrivant la décroissance de $U(x)$ avec x.
Comment varie δ avec la fréquence f ? Est-ce compatible avec les résultats expérimentaux ?
Que peut-on dire de δ quand la fréquence devient élevée ? Comment s'appelle ce phénomène ?

2 — Modèle de la ligne à constantes localisées

Il s'agit de la ligne réelle, constituée de la succession des cellules *RC*. On s'intéresse à la tension $u_n(t)$:



2.1 Mise en équation

❑ **5** Établir la relation entre $\dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}$ et les tensions $u_{n-1}(t)$, $u_n(t)$ et $u_{n+1}(t)$.

2.2 Passage à la limite de la ligne continue

On interpole les tensions discrètes $u_n(t)$ par une fonction continue $u(x,t)$ telle que

$$u_n(t) = u(x_n = na, t)\,.$$

La ligne discrète est ainsi vue comme une ligne continue où les tensions sont mesurées aux points $x_n = na$ équidistants de a. Cette approximation est d'autant plus justifiée que a est « petit », ce que l'on précisera par la suite.

❑ **6** En effectuant un développement au second ordre en a de $u_{n+1}(t)$ et $u_{n-1}(t)$, et en assimilant $\dfrac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t}$ à $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ montrer que l'équation de récurrence établie à la question 5 se ramène à l'équation aux dérivées partielles de la question 1, en prenant $r = \dfrac{R}{a}$ et $\Gamma = \dfrac{C}{a}$.

❑ **7** En utilisant l'expression de $u(x,t)$ établi à la question 1, et en considérant $u_n(t) = u(na,t)$, montrer que l'on peut écrire

$$u_n(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-n/n_0}\cos\left(2\pi f t - \frac{n}{n_0}\right),$$

où l'on exprimera n_0 en fonction de f et des paramètres r, Γ et a de ligne continue, puis en fonction de f et des paramètres R et C de la lignes discrète.

2.3 Validité du passage à la ligne continue

❑ **8** Comment interpréter, en terme d'onde, le terme $\cos\left(2\pi f t - \dfrac{x}{\delta}\right)$ de l'expression de $u(x,t)$?

Exprimer la longueur d'onde λ associée.

Le passage au milieu continu est valide si la variation spatiale de l'onde de tension, à un instant t donné, est faible à l'échelle d'une cellule, c'est-à-dire si $a \ll \lambda$.

Montrer que cette condition se ramène à $RCf \ll \beta$, où β est un coefficient numérique que l'on précisera.

❑ **9** Discuter de la validité du modèle de la ligne continue étudiée en TP aux fréquences considérées.

2.4 Validité du modèle de la ligne semi-infinie

On a considéré la ligne comme semi-infinie ($N \to \infty$), ce qui revient à négliger tout effet de bord en bout de ligne.

❑ **10** Comment serait modifiée l'expression de $u(x,t)$ établie à la question 11 si la ligne est de longueur finie ? On donnera la forme générale de son expression sans chercher à déterminer d'éventuelles constantes dépendant des conditions aux extrémités.

❑ **11** En admettant que l'effet de l'extrémité de la ligne est négligeable si $U_N < \dfrac{U_0}{100}$, montrer que le nombre de cellules doit être au moins égal à un nombre $N_{\min}$ que l'on exprimera en fonction de n_0.

❑ **12** Discuter de la validité du modèle de la ligne semi-infinie lors des mesures expérimentales effectuées.

2.5 Étude directe de ligne à constantes réparties (d'après un écrit de Centrale PC)

On part de l'équation de récurrence établie à la question 5.

❑ **13** En régime harmonique, on note $\underline{u}_n(t) = \underline{U}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = U_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_n)}$ la tension au point n.

Montrer que cette équation admet une solution de la forme $\underline{U}_n = \underline{k}^n\underline{U}_0$, pourvu que le nombre complexe $\underline{k}$ vérifie une équation du second degré à expliciter.

❑ **14** On se place dans la limite des basses fréquences, soit $X = RC\omega \ll 1$. Montrer alors que, au deuxième ordre près en $\sqrt{X}$, le paramètre $\underline{k}$ est donné par

$$\underline{k} = 1 \pm (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{X}{2}}.$$

❑ **15** Montrer que, au premier ordre en $\sqrt{X}$, le module de $\underline{k}$ est donné par $\left|\underline{k}\right| = 1 \pm \sqrt{\dfrac{X}{2}}$.

En envisageant la limite $n \to +\infty$ d'une ligne très longue, lever l'indétermination sur le signe apparaissant dans l'expression de $\left|\underline{k}\right|$.

En déduire l'expression, entièrement déterminée, de $\underline{k}$.

❑ **16** Comme $X = RC\omega \ll 1$, $\left|\underline{k}\right|$ est proche de l'unité. Montrer que l'amplitude U_n de $u_n(t)$ présente alors une décroissance quasi exponentielle du type

$$\frac{U_n}{U_0} \approx \mathrm{e}^{-\frac{n}{n_0}}.$$

Exprimer n_0.

❑ **17** Comparer l'hypothèse $X \ll 1$ effectuée ici avec l'hypothèse nécessaire pour utiliser le modèle de la ligne continue étudiée dans la sous-partie **2.3**.