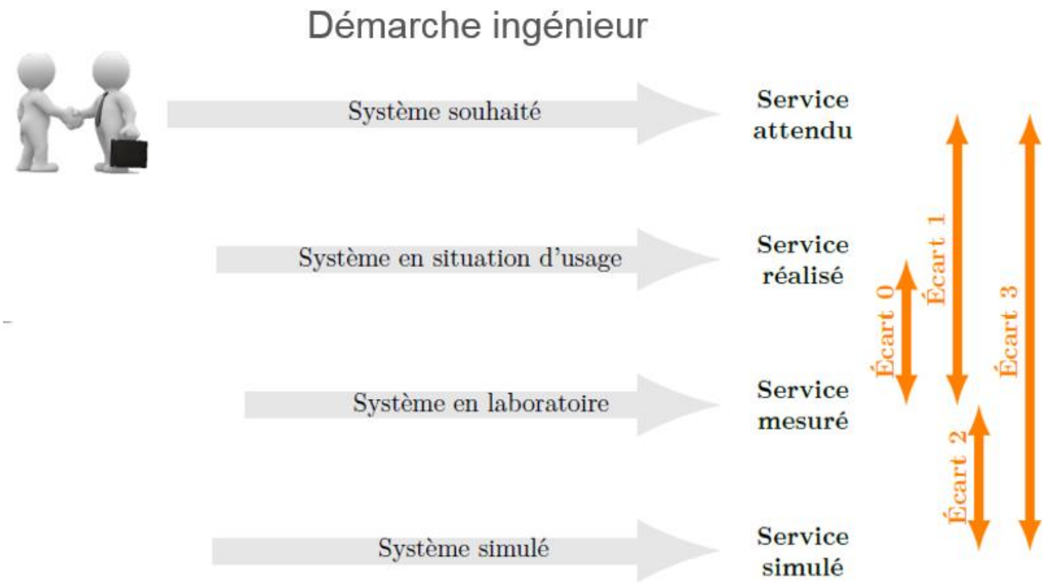
Gyromètre de mesure de vitesse angulaire : théorie et simulation

Objectifs

- Découvrir les phénomènes gyroscopiques : stabilisation et couple
- Ecrire les équations de gyroscopie simplifiée à partir du PFD
- Confronter théorie et simulation numérique pour le cas d'un gyromètre de mesure de vitesse.

Vous devez préparer la partie théorique avant la séance de TP.

Durée du TP : 2 heures



Objectif : minimiser les écarts

AVERTISSEMENT

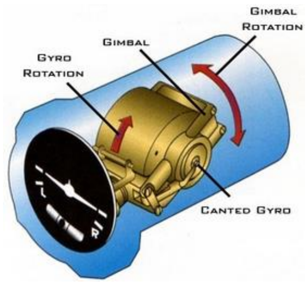
VOUS DEVEZ DEPLACER TOUT DOCUMENT NUMERIQUE MODIFIABLE DANS UN DOSSIER PERSONNEL AVANT TOUTE OUVERTURE ET MODIFICATION.

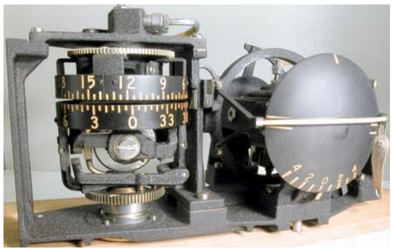
Contexte

L'effet gyroscopique (couple et stabilisation) sont utilisés dans de multiples domaines :

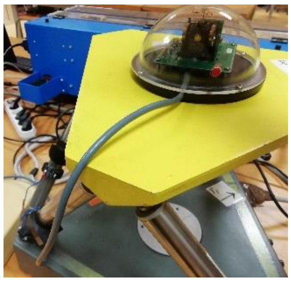
Jeu d'enfant

Gyroscope pour horizon artificiel d'avion





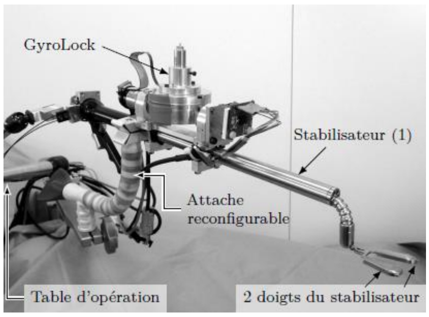
Gyromètre de la plateforme 6 axes du laboratoire de SII



Contre braquage à moto pour la prise de courbe

Stabilisation de la moto

Gyrolock de stabilisateur cardiaque
(Epreuve de concours, CCS 2022)

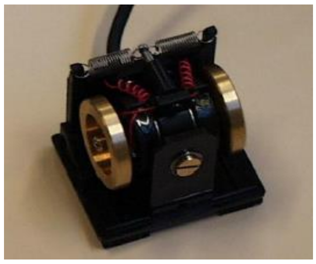


Parmi les six exemples ci-dessus,

- trois sont une application de la <u>stabilisation</u> gyroscopique : la toupie, le gyroscope d'avion, la stabilisation d'un deux-roues ;
- trois sont une application du <u>couple</u> gyroscopique : gyromètre, contre braquage à moto, gyrolock

Les deux phénomènes n'ont pas les mêmes conséquences technologiques même s'ils sont liés et sont les conséquences des équations de la dynamique. Disons que stabilisation gyroscopique et couple gyroscopique sont cousins germains.

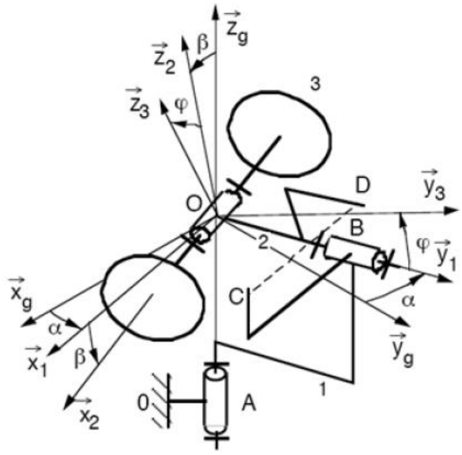
Nous nous intéressons ici au <u>couple</u> gyroscopique. Nous prendrons comme support d'étude le gyromètre de la plateforme 6 axes.



Le gyromètre est un capteur de vitesse angulaire.

Fonctionnement du gyromètre

On donne le schéma cinématique et l'illustration ci-dessous.
Le rotor 3 est lancé à haute vitesse, ω_{rot} dans le stator 2 selon l'axe $\overrightarrow{x_{23}}$ (plus de 6000 tr/min).
Le stator 2 est en pivot dans le support 1 selon l'axe $\overrightarrow{y_{12}}$ orthogonal au précédent.
Enfin le support 1 est en pivot par rapport au sol 0 galiléen, selon l'axe $\overrightarrow{z_{g01}}$.
Il est important de comprendre que la gyroscopie en général se comprend comme la mise en rotation des trois axes de l'espace. Il s'agit d'un phénomène dynamique tridimensionnel.



<u>Le couple gyroscopique se constate ainsi</u> :
La rotation de 1/0 d'un angle α conjuguée à la rotation continue de 3/2 selon deux axes orthogonaux entraîne l'apparition d'un couple selon le troisième axe : couple de 3 sur 2 transmis par la liaison pivot 3/2.
Ici la conséquence va être la rotation de 2/1. La présence de ressorts de rappels fait que 2/1 ne tourna pas continuellement mais juste d'un petit angle β.

Pour une vitesse de rotor constante, l'inclinaison β est liée à la vitesse $\dot{\alpha}$. On peut donc connaître la vitesse $\dot{\alpha}$ par mesure de β.

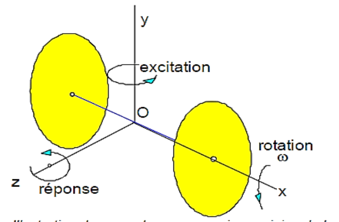
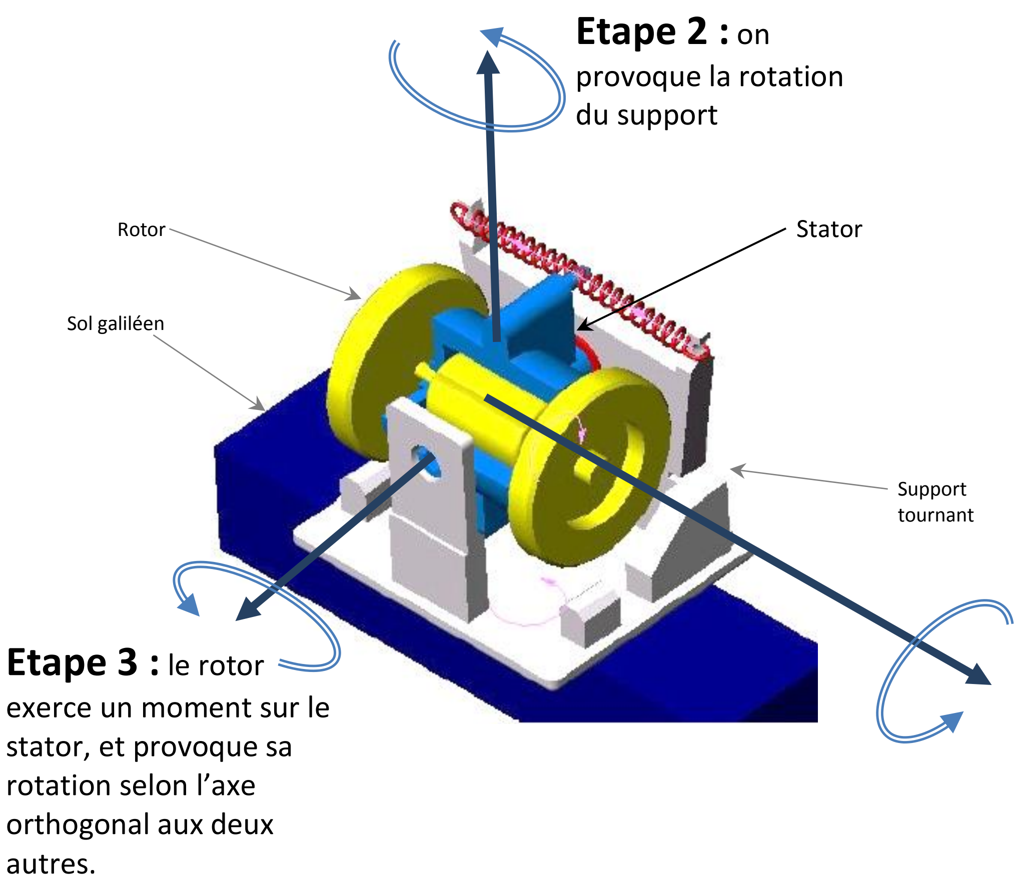


Illustration du « couple » gyroscopique origine de la réponse autour de Z



Objectif du TP

1ère partie théorique (45 min) : trouver la relation entre β et $\dot{\alpha}$: $\beta = f(\dot{\alpha})$ par application du PFD.
2ème partie (1h) : simulation Méca3D, comparaison des résultats théoriques.

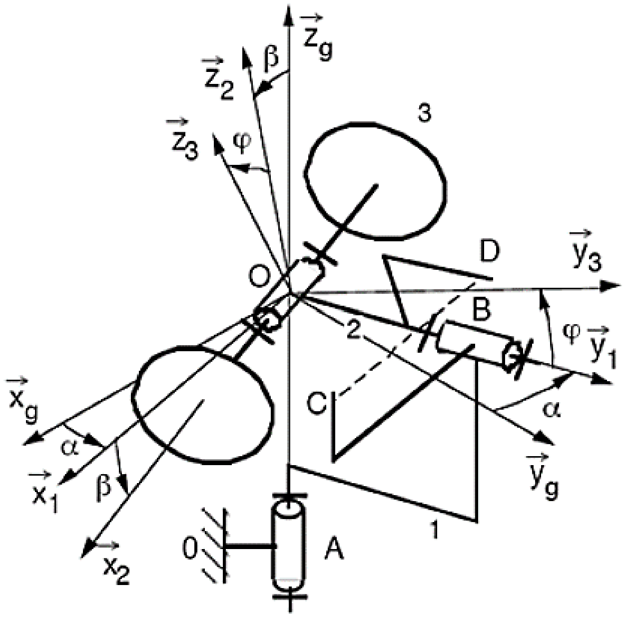
Démonstration du phénomène

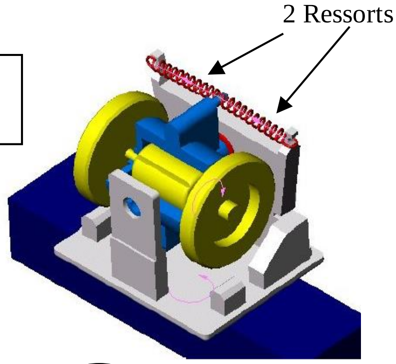
Demandez au professeur de faire une démonstration de l'effet gyroscopique. S'il n'est pas disponible, commencez l'étude théorique, il viendra plus tard.

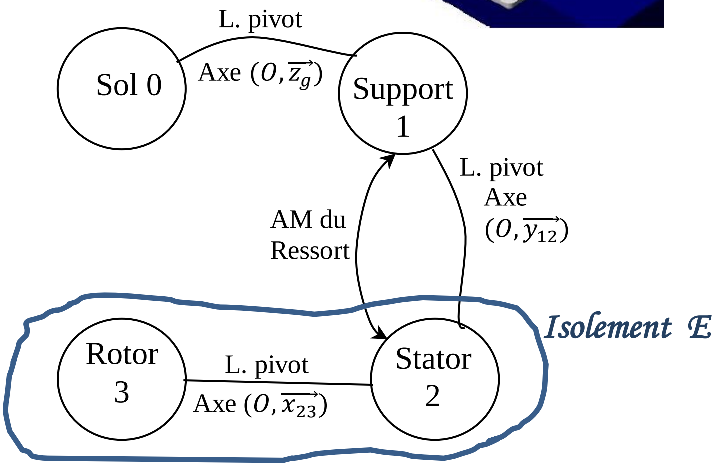
PARTIE 1
APPLICATION DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Modèle cinématique.

Remarque : un ressort de rappel est placé entre C et D.





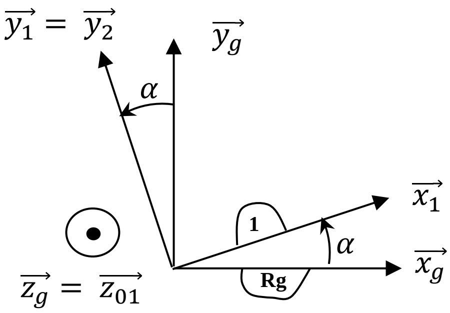


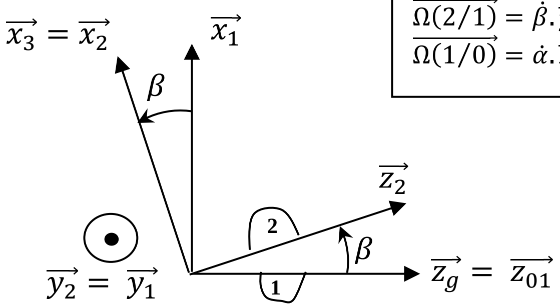
Remarque : un ressort de rappel est placé entre C et D.

$\overrightarrow{\Omega(3/2)} = \omega_{rot}.\overrightarrow{x_{23}}$

$\overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta}.\overrightarrow{y_{21}}$

$\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_{g01}}$





Hypothèses :

- *H1* : Moment d'inertie et masse de 1 et 2 négligés devant l'inertie de 3
- *H2* : Angle β petit $\Rightarrow$ $\cos\beta \sim 0$ et $\sin\beta \sim \beta$
- *H3* : Vitesse $\dot{\beta}$ faible, voire nulle car le stator se stabilise angulairement selon un angle fixe.
- *H4* : Vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ constante.
- *H5* : Poids négligés (ou, disons, sans influence sur la dynamique du mécanisme)
- *H6* : produit $\dot{\alpha}\beta$ négligeable devant ω_{rot}.

Note : il est important de voir que le point O, centre d'inertie du rotor 3, est fixe dans le référentiel galiléen.

On va appliquer le théorème du moment dynamique à l'ensemble rotor-stator nommé E={2,3}, au point O selon l'axe $\overrightarrow{y_{12}}$. Il s'énonce ainsi :

$$\overrightarrow{M_O}(\bar{E} \rightarrow E).\overrightarrow{y_{12}} = \overrightarrow{\delta_O}(E/R_g).\overrightarrow{y_{12}}$$

Il faut donc calculer les moments extérieurs à E en O, et le moment dynamique de E en O.

<u>Bilan des actions mécaniques extérieures appliquées à ***E***</u>

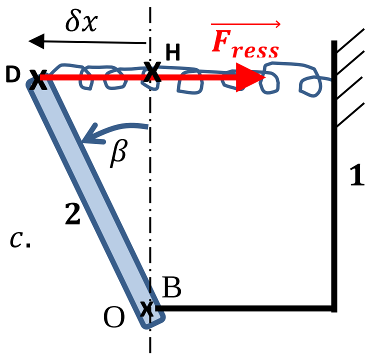
Comme le montre le graphe des liaisons, ***E*** est soumis à deux actions mécaniques extérieures.

- AM provenant de 1, transmise par la liaison pivot 1/2
- AM provenant des deux ressorts

Les moments extérieurs sont donc :

$$\overrightarrow{M_O}(\bar{E} \rightarrow E).\overrightarrow{y_{12}} = \overrightarrow{M_O}(1 \rightarrow E).\overrightarrow{y_{12}} + \overrightarrow{M_O}(ressorts \rightarrow E).\overrightarrow{y_{12}}$$

$\overrightarrow{M_O}(1 \rightarrow E).\overrightarrow{y_{12}} = 0$ car liaison pivot 1/2 d'axe $(O, \overrightarrow{y_{12}})$



$\overrightarrow{M_O}(ressorts \rightarrow E).\overrightarrow{y_{12}} = 2 \times \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_{ress}} \rightarrow E).\overrightarrow{y_{12}}$

- **Calculer le moment** de la force de rappel du ressort $M_O(\overrightarrow{F_{ress}} \rightarrow 2)$

Pour ce calcul <u>très simple</u>, comme l'angle β est faible, on a $HB = BD = c$.
On rappelle aussi que la force de rappel du ressort est :
$F_{ress} = k.\delta x$ où k est la raideur du ressort.
Donner le résultat $M_O(\overrightarrow{F_{ress}} \rightarrow 2)$ en fonction exclusive de k, c, β.

<u>Calcul du moment dynamique</u> : $\overrightarrow{\delta_O}(E/R_g).\overrightarrow{y_{12}}$

On donne l'opérateur d'inertie du rotor :

$$\bar{\bar{I}}(O,3) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_{23}},\_,\_)}$$

E étant la réunion des deux solides 2 et 3 : $\overrightarrow{\delta_O}(E/R_g) = \overrightarrow{\delta_O}(3/R_g) + \overrightarrow{\delta_O}(2/R_g)$

- Pourquoi la matrice d'inertie $\bar{\bar{I}}(O,3)$ a-t-elle une allure si simple : diagonale avec deux moment d'inertie identique ?

- Pourquoi peut-on écrire : $\overrightarrow{\delta_O}(\boldsymbol{E}/R_g) = \overrightarrow{\delta_O}(\boldsymbol{3}/R_g)$?

- Pourquoi peut-on calculer le moment dynamique en écrivant simplement :
  $\overrightarrow{\delta_O}(3/R_g) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}(3/R_g)}{dt}\right]_{R_g}$?
- Pourquoi peut-on calculer le moment cinétique en écrivant simplement :
  $\overrightarrow{\sigma_O}(3/R_g) = \bar{\bar{I}}(O,3)\,.\overrightarrow{\Omega}(3/R_g)$

- Calculer $\overrightarrow{\sigma_O}(3/R_g)$. Faîtes la simplification conséquence des hypothèses *H3* et *H6*.

- Calculer $\overrightarrow{\delta_O}(3/R_g).\overrightarrow{y_{12}}$.

Ecriture du théorème du moment dynamique: $\overrightarrow{M_O}(\overline{E} \rightarrow E).\overrightarrow{y_{12}} = \overrightarrow{\delta_O}(E/R_g).\overrightarrow{y_{12}}$

- D'après le théorème du moment dynamique déduire l'expression de β en fonction exclusive des paramètres : ω_{rot} , A, k, c, $\dot{\alpha}$.

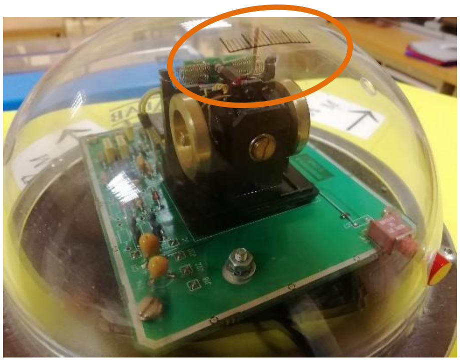
Application numérique.
On veut mesurer une vitesse de rotation selon l'axe vertical, $\dot{\alpha}$, de 7,5°/s.
Le moteur électrique fait tourner le rotor à 7160 tr/min.

raideur 1 seul ressort (Nm) k=	17
Mt inertie (kg.m²) A =	
vit excitation (rad/s) $\dot{\alpha}$ =	
vitesse rotor (rad/s) ω_{rot} =	
bras de levier ressort (m) $c =$	0,012

- Sous SolidWorks, ouvrir le « *rotor* ». Déterminer son moment d'inertie A.

On donne l'angle béta : $\beta = -\omega_{rot} \frac{A}{2.k.c^2} .\dot{\alpha}$

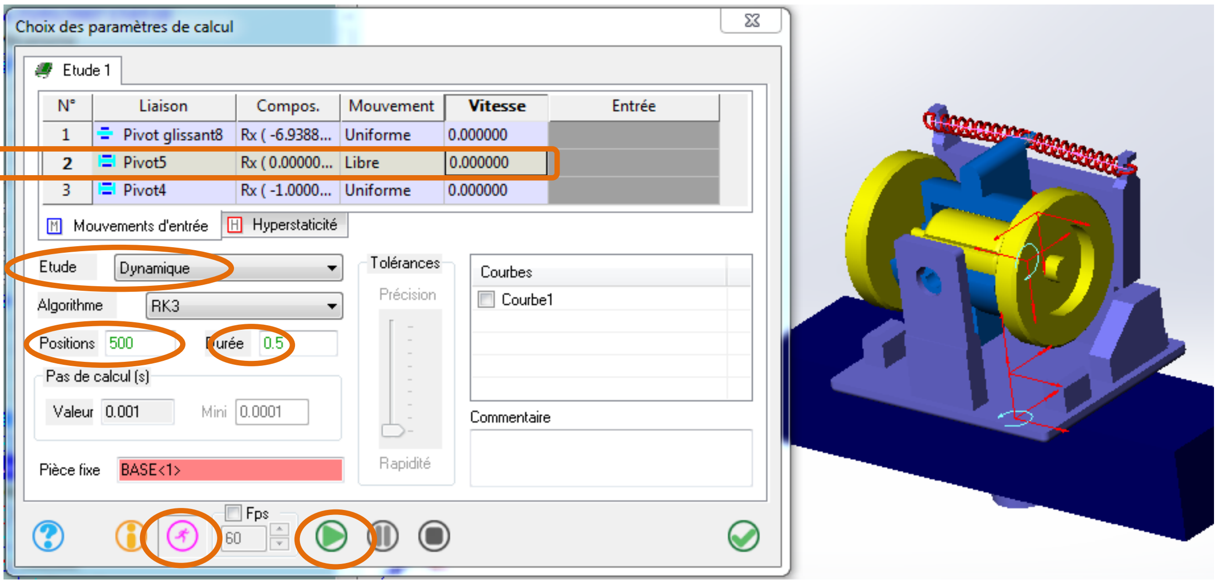
- Calculer l'angle d'inclinaison β.



PARTIE 2
SIMULATION SOUS SOLIDWORKS

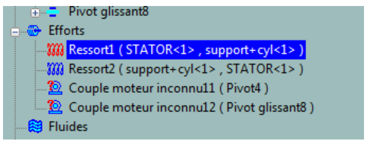
Déplacer tout le dossier « DAO_gyro_eleve » dans un dossier personnel.
Ouvrir l'assemblage « Ensemble_global ».

Ouvrir Meca3D : lancer une analyse avec étude dynamique.



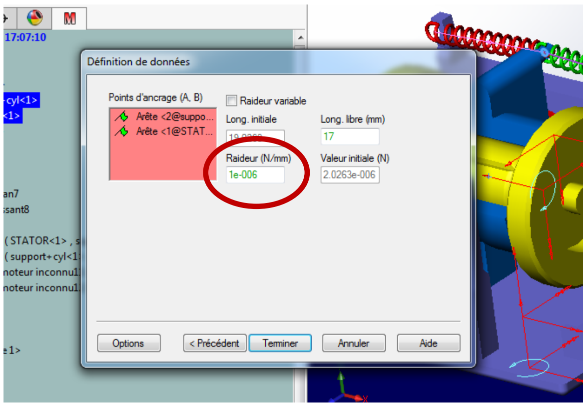
La liaison pivot stator/support doit être laissée « libre ».
Vous devez saisir la vitesse du rotor (7160 tr/min) et la vitesse $\dot{\alpha}$ (7,5 °/s).
Durée de la simulation : 2s.
Attention : les unités doivent être tr/min dans Méca3D.
Lancer la simulation <u>avec animation simultanée</u> pour voir les différents mouvemente du gyroscope.

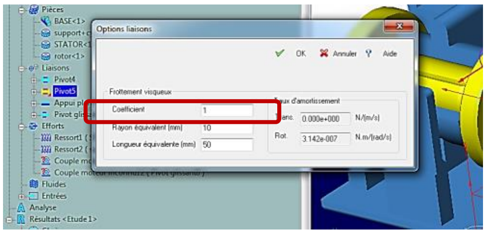
- Qu'observez-vous ? Quel paramètre a-t-on oublié de saisir ?



Saisir les paramètres nécessaires : clic droit sur chaque ressort dans méca3D => saisissez la valeur de raideur.
Lancer la simulation.

- C'est mieux, mais pourquoi ne peut-on toujours pas comparer l'angle β_{sim} avec l'inclinaison théorique trouvée précédemment β_{th} ?





En fait, il manque de l'amortissement visqueux ou sec nécessaire à tout mouvement pour dissiper l'énergie : brassage de l'air, lubrification des paliers…
Nous allons modéliser la dissipation par un frottement visqueux dans la pivot stator/support. Cela est possible dans Méca3D.
Clic droit sur la pivot stator/support puis option/frottement. Saisir un « *coefficient* » de 500 pour commencer.
Lancer la simulation.

Editer la courbe de l'angle β : si elle est encore oscillante c'est que l'amortissement est mal réglé car dans la réalité le gyro n'oscille pas.
Dans ce cas augmenter encore le « *coefficient* ». vous devez trouver le premier « coefficient » qui donne une réponse sans oscillation. A ce moment vous aurez l'angle d'inclinaison simulé β_{sim}.

- Comparer β_{th} et β_{sim}.

FIN DE L'ACTIVITÉ PRATIQUE