Rappels concernant la rédaction

- Encadrement des résultats littéraux et numériques finaux à la règle et au stylo (surligneurs interdits)
- Nombre de chiffres significatifs cohérents avec les données du problème. Trois chiffres significatifs est le bon nombre en SI
- Copies doubles avec marges. Feuilles simples refusées.
- Respect de la grammaire, de l'orthographe, et du niveau de langage nécessaire lors de la rédaction d'une copie !
- Notation des torseurs : voir les indications en fin de sujet.

Notations imposées en statique : les actions mécaniques transmissibles d'un solide i à un solide j se notent classiquement

$$\{\mathcal{F}(i \to j)\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R(i \to j)} \\ \overrightarrow{M_P(i \to j)}\end{matrix}\right\}_P = \left\{\begin{matrix}X_{ij}\vec{x} + Y_{ij}\vec{y} + Z_{ij}\vec{z} \\ L_{ij}\vec{x} + M_{ij}\vec{y} + N_{ij}\vec{z}\end{matrix}\right\}_P$$

MECANISME DE DETECTION DE SURCOUPLE MOTEUR

MISE EN SITUATION – PRINCIPE DE LA MESURE

Le mécanisme étudié permet de détecter l'excès de couple subit par le rotor d'un moteur électrique. Ce couple, dit électromagnétique, du stator 2 sur le rotor 5, est noté $C_{mot}(2 \to 5)$. Il est la conséquence de la force de Laplace s'exerçant du stator sur chaque conducteur électrique solidaire du rotor. Les figures ci-dessous illustrent le principe de fonctionnement de la détection de couple.

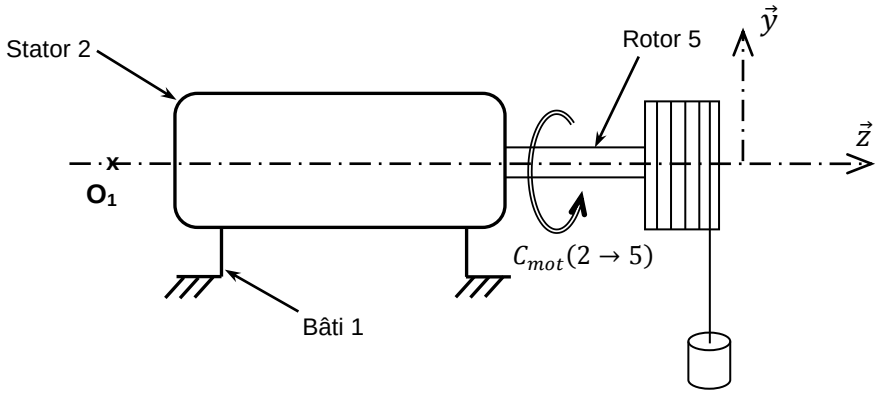


Figure 1

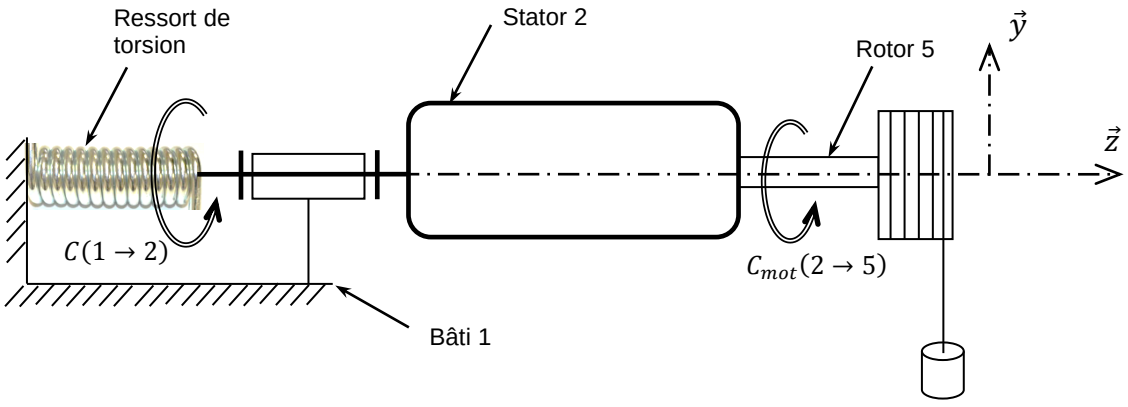


Figure 2

L'évaluation du couple sur le rotor est technologiquement délicate du fait qu'il tourne ! On utilise donc le principe suivant, qui permet de mesurer le couple sur une pièce ne tournant pas : le stator 2 n'est plus encastré avec le bâti 1 comme sur la figure 1 : il est mis en liaison pivot avec le bâti 1 pour lui permettre une petite rotation (quelques degrés d'angle), comme montré sur la figure 2. On place un lien élastique (équivalant à un ressort de torsion de forte raideur) entre le stator 2 et le bâti 1. La petite torsion angulaire du ressort sous l'effet du couple permet l'évaluation du couple de 1 sur 2 : $C(1 \rightarrow 2)$.

Le mécanisme étudié permettra la mesure de $C(1 \rightarrow 2)$ donc la détection de couple excessif sur le rotor.

Question 1

Par un isolement judicieux, montrer que le couple mesuré est égal au couple moteur à évaluer, c'est à dire : $C(1 \rightarrow 2) = C_{mot}(2 \rightarrow 5)$. On n'oubliera pas le bilan des actions mécaniques extérieures, et on citera avec rigueur le théorème utilisé, l'axe de projection et le point éventuel.

PRESENTATION DU MECANISME (figure 3)

Le système présenté ci-après sur la figure 3 était symbolisé par le ressort de torsion dans la mise en situation précédente (figure 2). La figure 3 montre la technologie réellement mise en œuvre, objet de l'étude statique qui suit.

Le disque 2 est solidaire du stator moteur. 2 est donc en liaison pivot avec le bâti 1 d'axe $(O_1, \vec{z})$. Il est muni d'une encoche inclinée dans laquelle vient se loger un galet 3 de forme cylindrique. 3 est en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z})$ avec un levier 4. Ce levier 4 est en liaison pivot d'axe $(C, \vec{z})$avec le bâti.

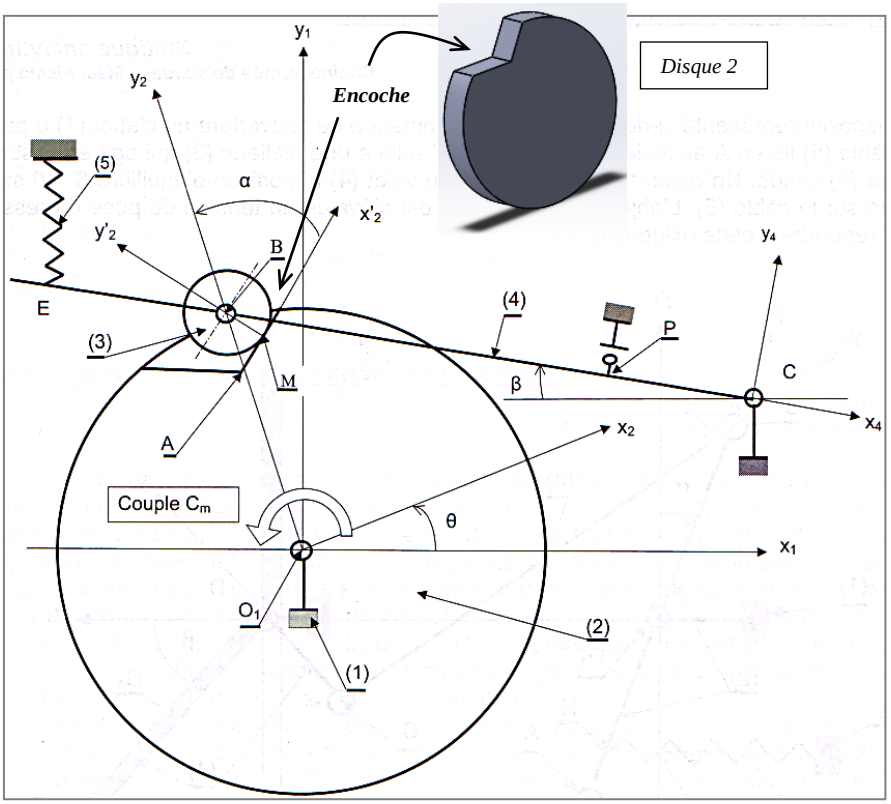
La forme cylindrique du galet (3) est en appui sur le plan incliné de l'encoche.

Un ressort de compression 5 placé entre le bâti et le levier en E maintient le galet dans l'encoche.

Quand le couple $C_m = C(1 \rightarrow 2)$ augmente, le galet roule sur le plan incliné de l'encoche : le point M se déplace le long de la droite $(A, \overrightarrow{x_2}')$ et le levier 4 bascule vers le haut.

Quand le couple sur le disque $C_m = C(1 \rightarrow 2)$ dépasse un couple limite C_L, le contact en P devient effectif. Cela déclenche un signal témoignant d'une surcharge de couple.

Figure 3



Les dimensions caractéristiques sont :
$O_1A = a$, $AM = \lambda$,
$MB = r$ (rayon du galet),
$CB = b$,
$BE = c$, $CP = L$,
$\overrightarrow{O_1C} = h.\vec{x}_1 - h.\vec{y}_1$

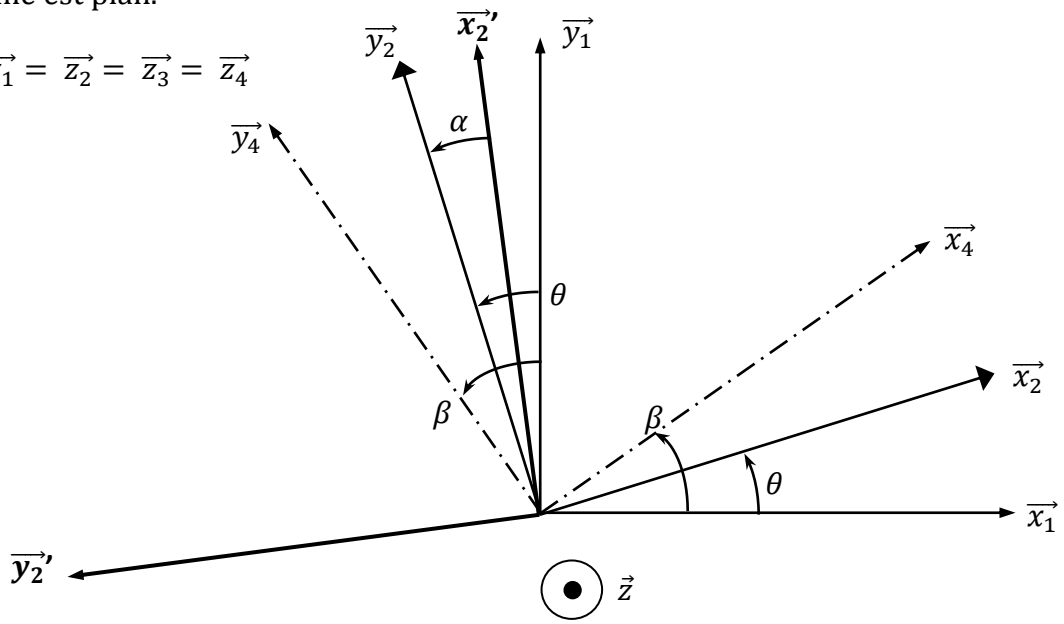
L'action du ressort est modélisée par un glisseur :

$\{\mathcal{F}(ress \to 4)\} = \left\{\begin{matrix} -F_r.\overrightarrow{y_1} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_E$,

avec $F_r > 0$

Hypothèses :
- Liaisons parfaites.
- Poids négligés devant autres forces.
- Le problème est plan.

On note $\vec{z} = \overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_3} = \overrightarrow{z_4}$



ETUDE STATIQUE

<u>Objectif</u> : déterminer la précharge nécessaire du ressort 5 afin que le contacteur en P soit actif lorsque le couple C_m atteint une valeur limite C_L donnée.

Question 2 – Préalable mathématique
Calculer les trois produits vectoriels : $\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{y_2} \wedge \overrightarrow{y_2'}$, $\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{y_2'}$.

Question 3
Donnez le nom et les caractéristiques géométriques (centre, axe, direction, normale...) de la liaison 3/2.

Question 4
Ecrire le torseur de l'action mécanique transmissible de 2 sur 3 $\{\mathcal{F}(2 \to 3)\}$ dans l'espace, puis, réécrire ce torseur en considérant le cas plan ici présent.

Question 5
Calculer le moment de l'action du galet 3 sur le disque 2 par rapport au point O_1, $\overrightarrow{M_{O1}(3 \to 2)}$, en fonction de l'effort normal de 3 sur 2, Y_{32} (=composante d'effort suivant $\overrightarrow{y_2'}$), et des données géométriques nécessaires.

Question 6
Calculer le moment de l'action du ressort 5 sur le levier 4 par rapport au point C, $\overrightarrow{M_C(5 \to 4)}$, en fonction de F_r et des données géométriques nécessaires.

Question 7
Faire le graphe des liaisons en vue d'une étude statique.

Question 8
Par application du théorème du moment sur le disque 2, au point O_1 selon l'axe $\vec{z}$ déterminez la relation entre le couple C_m et Y_{32}.

Question 9
Isoler l'ensemble {3,4} : par application du théorème du moment en un point que vous préciserez, déterminer la relation entre F_r et Y_{23}.

Question 10
Déterminer la relation finale entre le couple C_m et l'effort exercé par le ressort F_r.

Question 11
Déterminez le tarage du ressort.
On donne :
$C_m = 120\ Nm, a = 120mm, b = 200mm, c = 300mm,$
$\alpha = 45°,\ \beta = -5°, \theta = 20°, \lambda = 6mm.$

MODELISATION DU MECANISME : cas de la liaison {2,3,4}

<u>Objectif</u> : déterminer la liaison équivalente $\mathcal{L}_{eq234}$ aux deux liaisons $\mathcal{L}_{3/2}$ et $\mathcal{L}_{4/3}$

Avertissement : le problème se traite de manière spatiale, donc avec les torseurs « complets ». En outre on utilisera des notations usuelles de sciences de l'ingénieur en bannissant les notations « folkloriques ». Vous disposez d'un cours…

Question 12
Ecrire le torseur cinématique de la liaison disque 2 / galet 3 : $\{\mathcal{V}(3/2)\}$.
Ecrire le torseur cinématique de la liaison galet 3 / levier 4 : $\{\mathcal{V}(4/3)\}$.

Question 13
Les liaisons $\mathcal{L}_{3/2}$ et $\mathcal{L}_{4/3}$ sont-elles disposées en parallèle ou en série ? La réponse sera simplement justifiée par un graphe.

Question 14
Déterminer par un calcul torsoriel la liaison équivalente $4/2$: $\mathcal{L}_{\text{eq}234}$. La démarche sera justifiée.

Question 15 : pour les 5/2 uniquement
Calculer le degré d'hyperstatisme h_S du mécanisme spatial.
Quelle est la conséquence si on réalise une étude statique complète ?
D'où provient ce degré d'hypertatisme ?

Calculer le degré d'hyperstatisme h_P du mécanisme considéré plan.
Quelle est la conséquence si on réalise une étude statique complète ?

ETUDE CINEMATIQUE : IMPACT SUR LE CONTACT ELECTRIQUE EN *P*
<u>Objectif</u> : déterminer la vitesse d'impact au point P en fonction de la vitesse angulaire du disque 2 par rapport au bâti.

Le vecteur rotation instantanée du disque 2 par rapport au bâti 1 est classiquement noté : $\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\theta}.\vec{z}$

Question 16 – Préalable mathématique
Calculer les deux produits scalaire : $\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{y_2}'$ et $\overrightarrow{y_4} \wedge \overrightarrow{y_2}'$.

Question 17
Justifier que la vitesse $\vec{V}(B, 4/1)$ est portée par $\overrightarrow{y_4}$.
Justifier que la vitesse $\vec{V}(B, 4/2)$ est portée par $\overrightarrow{x_2}'$

Conséquence : les vitesses précédentes pourront s'écrire avec une composante unique, $\vec{V}(B, 4/1) = V_{B41}.\overrightarrow{y_4}$, et, $\vec{V}(B, 4/2) = V_{B42}.\overrightarrow{x_2}'$.

Question 18
Calculer la vitesse $\vec{V}(B, 2/1)$ en fonction de $\dot{\theta}$ est des données géométriques nécessaires.

Question 19
Ecrire la composition des vitesses au point B entre les solides 4, 1, 2.

Question 20
Par une projection unique et judicieuse déterminer $\vec{V}(B, 4/1)$ en fonction de $\dot{\theta}$ et des données géométriques nécessaires.

Question 21
Déduire la vitesse au niveau du contact électrique $\vec{V}(P, 4/1)$ en fonction de $\dot{\theta}$ et des données géométriques nécessaires.

FIN DU SUJET

Note spéciale pour l'écriture de tout torseur (cinématique, statique, cinétique, dynamique…) : je refuse toute notation « en colonne ». J'exige la notation en ligne.

$\{Torseur\} = \begin{Bmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{Bmatrix}_{M,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ notation « COLONNE » refusée et ignorée lors de la lecture de vos documents.

$\{Torseur\} = \begin{Bmatrix} x.\vec{X} + y.\vec{Y} + z.\vec{Z} \\ u.\vec{X} + v.\vec{Y} + w.\vec{Z} \end{Bmatrix}_{M}$ notation « LIGNE », seule notation autorisée avec moi.

- La notation colonne induit une perte de sens de la notion de torseur : vecteurs résultante et moment disparaissent… en leur substituant 6 scalaires. Le tout ressemblant ainsi à une sorte de matrice, ou boite à œuf (ce que n'est pas un torseur bien-sûr). La notation colonne est donc pédagogiquement nuisible.
- La notation colonne impose l'utilisation d'expressions vectorielles réduites dans une base unique ce qui est contraire au déroulement naturel de nos calculs pour lesquels les expressions finales sont souvent exprimées en fonction de vecteurs appartenant à des bases différentes. La notation colonne est inutilement contraignante.
- La notation colonne impose de préciser sans cesse la base d'expression des coordonnés. C'est lourd ! En outre souvent vous oubliez de préciser la base : le torseur ne signifie donc plus rien ! La notation colonne est lourde et dangereuse.
- Quand vous vous habituez au torseur colonne, vous risquez, par mimétisme, d'indiquer la base sur des torseurs en notation ligne : cela est un non-sens et montre une non maîtrise des concepts mathématiques de base, puisque dans la notation ligne la résultante et le moment sont DÉJÀ une expression vectorielle ! La notation colonne crée ainsi de la confusion. Pas d'indication de la base pour un torseur ligne.

Et rappelez-vous toujours : « les torseurs, moins on en écrit, mieux on se porte ! »

Les questions de cours qui suivent sont indiquées pour que vous fassiez un bilan personnel de vos connaissances en mécanique du solide (cinématique et statique). Ce n'est pas un travail à rendre. Pour y répondre reportez-vous à votre cours de 1ère année. Si vous ne parvenez pas à y répondre, vous aurez des difficultés, voire des points de blocage lors de la résolution des problèmes de mécaniques.

BILAN DES CONNAISSANCES DE COURS EN CINEMATIQUE

1. Tracer deux repères $R_1(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ et $R_2(O,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_2})$ en rotation l'un par rapport à l'autre selon l'axe invariant $\overrightarrow{y_1}$, d'angle θ (figure de changement de base ou géométrale).
2. Déduire les produits : $\overrightarrow{y_2} \wedge \overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_2}.\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{y_1}$
3. Déduire le vecteur vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$. On le nomme aussi taux de rotation.
4. Soit les solides (1) et (2) de repère R_1 et R_2 précédents. Soit deux points de (1) : A et B. Ecrire la relation liant les vitesses de A et B appartenant à (2) par rapport à (1).
5. Soit un troisième solide (3). Ecrire la relation de composition des vitesses au point B des vitesses de 2/1, 2/3, 3/1.
6. Ecrire la définition du vecteur vitesse d'un point M appartenant à (2) par rapport à (1).
7. Dessiner la liaison pivot 2/1 **en couleurs** : avec axe $[O,\vec{y})$ perpendiculaire à la feuille, puis avec axe $[O,\vec{y})$ inclus dans le plan de la feuille.

8. Ecrire le torseur cinématique de 2/1.
9. Soit un vecteur $\vec{U}$ défini dans le repère (R_1). On veut le dériver temporellement dans la base (R_2) : écrire la relation vectorielle liant les dérivées temporelles du vecteur $\vec{U}$ par rapport au repère (R_1) et par rapport au repère (R_2).
10. Dans un problème plan de normale $\vec{y}$, écrire la forme littérale des torseurs cinématiques.

Soit deux solides 1 et 2 en contact ponctuel au point I, de normale $\vec{y}$.

11. Représenter en couleur la liaison sphère plan en I.
12. Ecrire le torseur cinématique de la liaison 2/1.
13. Ecrire le vecteur glissement de 2/1.
14. Ecrire la condition de roulement sans glissement de 2/1.

15. Ecrire le torseur cinématique d'une liaison hélicoïdale avec filetage à droite, d'axe $(A, \vec{y})$.

16. Soient 3 solides 1,2,3 et leur liaison L_{12}et L_{23} placés en série. Comment détermine-t-on la liaison équivalente L_{eq13} par un calcul torsoriel cinématique ?

17. Soient 2 solides 1,2 reliés entre eux par trois liaisons $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, $L^{(3)}$ placés en parallèle. Comment détermine-t-on la liaison équivalente L_{eq12} par un calcul torsoriel cinématique ?

BILAN DES CONNAISSANCES DE COURS EN STATIQUE

18. Ecrire l'expression du moment d'une force $\vec{F}$ par rapport au point A.
19. Ecrire le torseur général d'une action mécanique transmise de 1 vers 2 en un point Q.
20. Ecrire l'expression qui permet de calculer le moment d'une force $\vec{F}$ en B à partir de son moment en A.
21. Qu'est-ce qu'un couple ? Ecrire le torseur ?
22. Dans un problème plan de normale $\vec{z}$, comment s'écrivent les torseurs d'action mécanique ?

23. Ecrire le torseur des AM transmissibles de la liaison pivot de la partie cinématique.
24. Réécrire ce torseur dans un cas plan de normale $\vec{y}$.

25. Ecrire le Théorème de la résultante selon l'axe $\vec{z}$, appliqué à un solide (4) en équilibre dans le référentiel galiléen.
26. Ecrire le théorème du moment au point A, selon l'axe $\vec{x}$ appliqué à un solide (2) en équilibre dans le référentiel galiléen.

27. Ecrire le torseur des actions mécaniques transmissibles d'une liaison hélicoïdale avec filetage à droite, d'axe $(A, \vec{y})$.