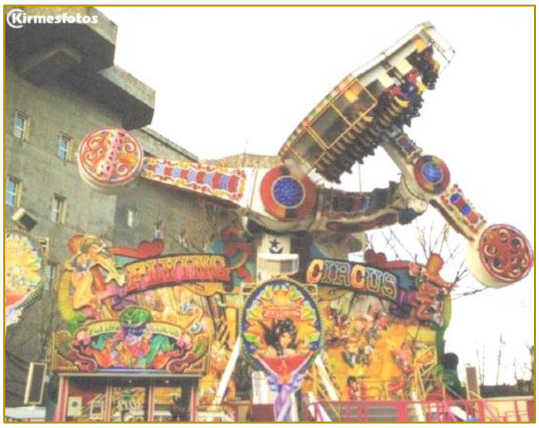
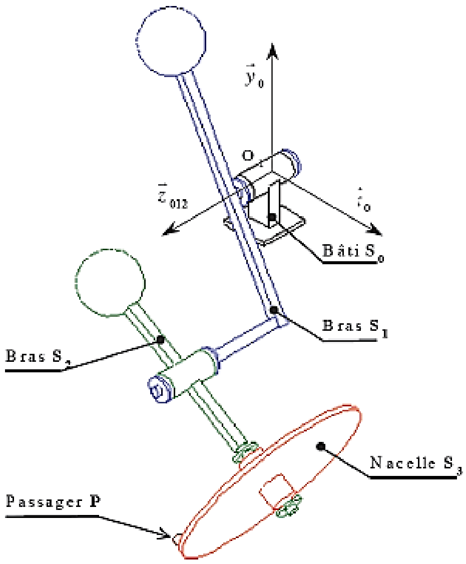
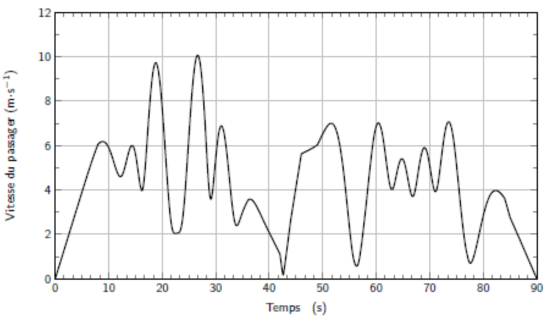
CINÉMATIQUE DU SOLIDE

PARTIE 2 - PERFORMANCES CINÉMATIQUES DES MÉCANISMES

COURS







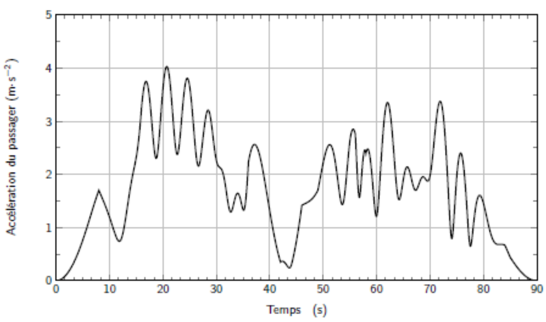
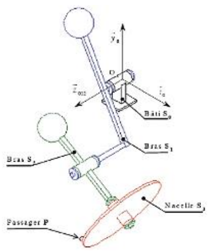


Table des matières

__Illustration 1ère de couverture__
L'attraction foraine « Magic Arms » permet de procurer de fortes sensations à un public averti. Son modèle cinématique suivi d'une étude analytique, puis numérique permet ensuite de tracer les vitesses et accélérations subies par le passager (courbes).

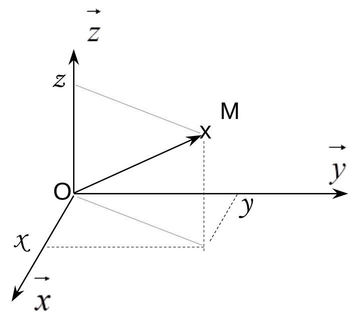


1. POSITIONNEMENT D'UN POINT DANS L'ESPACE – VECTEUR POSITION

1.1. Position d'un point en coordonnées cartésiennes

Paramètres de position : x(t) (abscisse), y(t) (ordonnée), z(t) (cote).

Vecteur position :



1.2. Position d'un point en coordonnées cylindriques

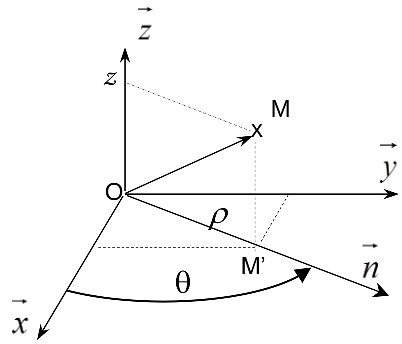
Paramètres de position : ρ(t) (rayon polaire), θ(t) (angle polaire), z(t) (cote).

M'= projection orthogonale de M sur le plan $(0, \vec{x}, \vec{y},)$: ρ = OM'

$$\theta(t) = (\vec{x}, \vec{n})$$

Vecteur position :

Correspondance avec les coordonnées cartésiennes :



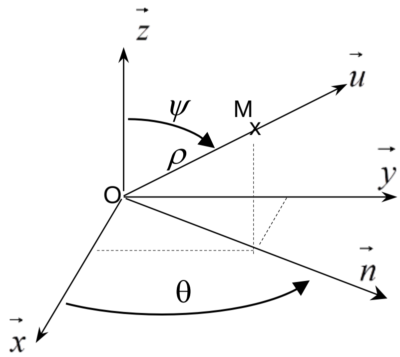
1.3. Position d'un point en coordonnées sphériques

Paramètres de position :

ρ (rayon polaire), θ (angle polaire), ψ (*psi*).

Vecteur position :

Correspondance avec les coordonnées cartésiennes :



Après substitution dans $\vec{u}$, de $\vec{n}$ par son expression :

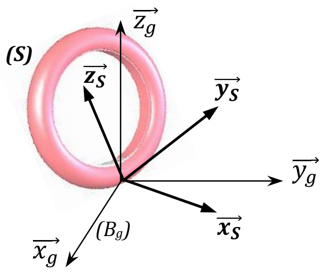
$\vec{u} = \cos\theta.\sin\psi.\vec{x} + \sin\theta.\sin\psi.\vec{y} + \cos\psi.\vec{z}$

<u>Remarque</u> : il arrive que l'angle ψ soit défini entre les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$. Attention donc à bien lire les sujets et le paramétrage imposé. Vous devez chaque fois calculer les expressions mathématiques ci-dessus.

1.4. Paramétrage d'un solide : exemple des angles d'Euler

Il s'agit de positionner angulairement un solide (S), en position quelconque par rapport à une base fixe (B_g). Trois angles suffisent pour définir complètement la position.

L'illustration ci-dessous montre une roue avant de vélo/moto/trottinette (S) au contact avec le sol (base B_g).



Le paramétrage d'Euler utilise trois rotations et deux bases intermédiaires permettant de passer de la base fixe (B_g) à la base (B_S) attachée au solide (S).

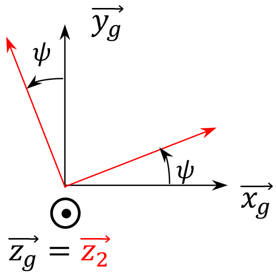
Les trois rotations sont appelées, dans l'ordre : précession ψ, nutation θ, et rotation propre φ.

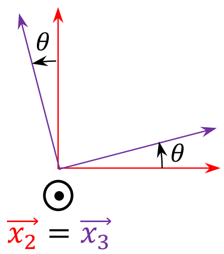
Les deux bases intermédiaires sont : $B_2(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ et $B_3(\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3})$.

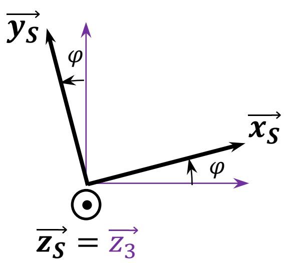
$$B_g(\overrightarrow{x_g},\overrightarrow{y_g},\overrightarrow{z_g}) \xrightarrow{\textbf{Précession} : rotation\ d'angle\ \psi,\ \ d'axe\ \overrightarrow{z_g}=\overrightarrow{z_2}} B_2(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$$

$$B_2(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}) \xrightarrow{\textbf{Nutation} : rotation\ d'angle\ \theta,\ d'axe\ \overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_3}} B_3(\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3})$$

$$B_3(\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3}) \xrightarrow{\textbf{Rotation propre} : rotation\ d'angle\ \varphi,\ d'axe\ \overrightarrow{z_3}=\overrightarrow{z_S}} B_S(\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})$$







✍ Je me teste

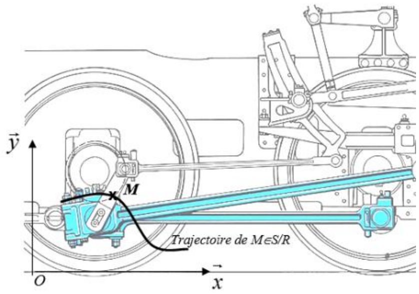
Reportez-vous aux angles d'Euler.

a. Si $\psi = +90°$, $\theta = -180°$, $\varphi = -90°$: comment est alors située la base du solide par rapport à la base fixe ?
b. Exprimer le vecteur liés au solide (S), $\overrightarrow{y_S}$, dans la base fixe *(B_g)* en fonction des trois angles.
c. Calculer la projection du vecteur $\overrightarrow{x_S}$ sur le vecteur $\overrightarrow{y_g}$: $\overrightarrow{x_S}.\overrightarrow{y_g}$.

2. TRAJECTOIRE DU POINT D'UN SOLIDE

2.1. Définition de la trajectoire d'un point

La trajectoire d'un point M appartenant à un solide (S) par rapport à un repère (R), est



<u>Remarque 1</u> : parler de la trajectoire d'un solide n'a pas de sens (la trajectoire fait référence à un… point !).

<u>Remarque 2</u> : En cinématique du solide un point peut appartenir à n'importe quel solide à un instant t donné ! C'est pour cela qu'on précise le solide auquel appartient le point considéré.

<u>Remarque 3</u> : Parler de la trajectoire d'un point sans préciser le repère de référence n'a pas de sens. La trajectoire d'un point est différente selon le repère d'observation.

2.2. Trajectoires usuelles

Deux types de trajectoires sont courantes :

-

-

Je me teste

On étudie l'éolienne dont le schéma cinématique est donné ci-contre.

Elle s'oriente pour être « dans le vent » selon l'axe vertical $(O, \overrightarrow{z_0})$.

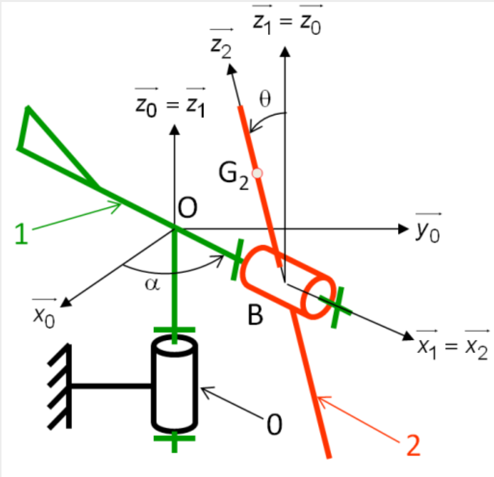
La rotation du rotor 2 de l'éolienne dans le corps 1 est selon l'axe horizontal $(O, \overrightarrow{x_1})$.

a. Faire le schéma cinématique en représentation plane et coloriez-le.
b. Faire les figures géométrales.

Donner les trajectoires des points suivant ainsi que les <u>caractéristiques géométriques</u> de celle-ci.

c. point B appartenant à 1 par rapport au bâti 0
d. point G_2 appartenant à 2 par rapport au corps 1
e. point G_2 <u>appartenant à 1</u> par rapport à 0
f. point G_2 appartenant à 2 par rapport à 0

g. Quelle est la surface générée par G_2 de 2 par rapport au corps 0 ?



3. VECTEUR VITESSE

Avertissement : vous devez maîtriser les bases de dérivation vectorielle pour aborder ce point de cours. Voir annexe éventuellement.

3.1. Définition du vecteur vitesse

<u>Définition</u>

La vitesse instantanée d'un point M appartenant à un solide (S) par rapport à un repère (R) de centre O est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le repère (R) :

L'unité de la vitesse est

Autre unité pratique parfois utilisée :

1 m/s =

<u>Exemple : point quelconque en coordonnées cartésiennes</u>

Repère (R) : $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = X_M(t).\vec{x} + Y_M(t).\vec{y} + Z_M(t).\vec{z}$

Le vecteur vitesse est :

$$\overrightarrow{V(M \in S/R)} = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{(R)} = \left[\frac{d[X_M(t).\vec{x}+Y_M(t).\vec{y}+Z_M(t).\vec{z}]}{dt}\right]_{(R)}$$

$$\overrightarrow{V(M \in S/R)} = \left[\frac{d[X_M(t).\vec{x}]}{dt}\right]_{(R)} + \left[\frac{d[Y_M(t).\vec{y}]}{dt}\right]_{(R)} + \left[\frac{d[Z_M(t).\vec{z}]}{dt}\right]_{(R)}$$

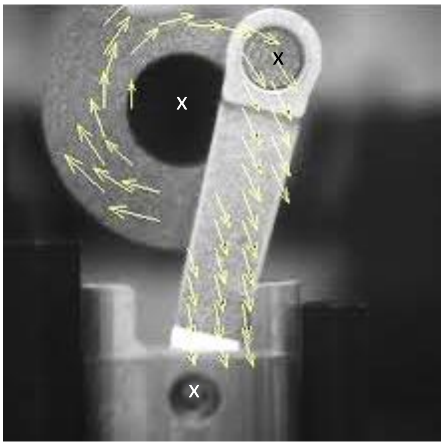
Or les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sont constants dans leur propre repère (R), donc leur dérivée temporelle est nulle : $\left[\frac{d\vec{x}}{dt}\right]_{(R)} = \vec{0}$, $\left[\frac{d\vec{y}}{dt}\right]_{(R)} = \vec{0}$, $\left[\frac{d\vec{z}}{dt}\right]_{(R)} = \vec{0}$

Donc :

$$\overrightarrow{V(M \in S/R)} = \frac{dX_M(t)}{dt}.\vec{x} + \frac{dY_M(t)}{dt}.\vec{y} + \frac{dZ_M(t)}{dt}.\vec{z}$$

Remarque 1 : il est obligatoire de préciser la base de dérivation par rapport à laquelle on dérive le vecteur. Sinon l'écriture n'a pas de sens.

Remarque 2 : la dérivée d'un vecteur de base par rapport à la base dont il est issu est nulle : $\left[\frac{d\overrightarrow{x_i}}{dt}\right]_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})} = \vec{0}$.

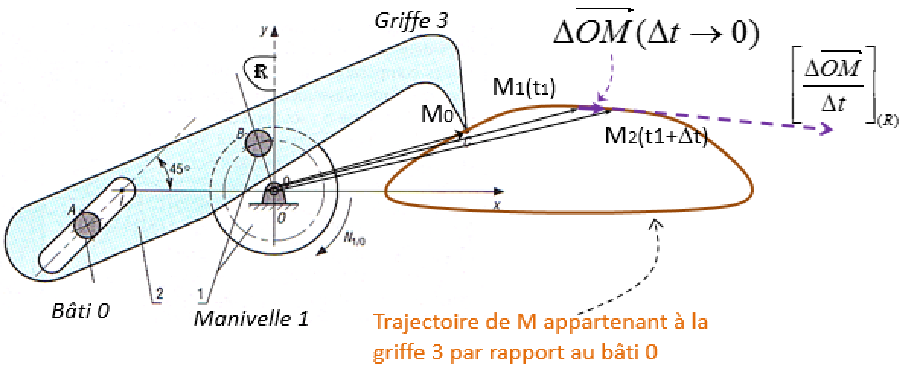


Remarque 3 : parler de la vitesse d'un solide n'a pas de signification car les points d'un solide ont des vitesses différentes au cours du mouvement. On parle toujours de la vitesse d'un point. Il y a juste une exception pour le mouvement de translation pour lequel tous les points ont même vitesse.

Ci-contre : visualisation du champ des vecteurs vitesse d'une bielle et d'une manivelle, pour un système bielle manivelle.

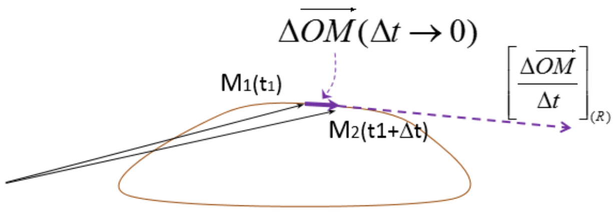
3.2. Démonstration : éclairage sur le vecteur vitesse

Soit un point M dont la trajectoire est connue. Sur la figure ci-contre il s'agit d'un mécanisme d'avancée de pellicule de film de cinéma.



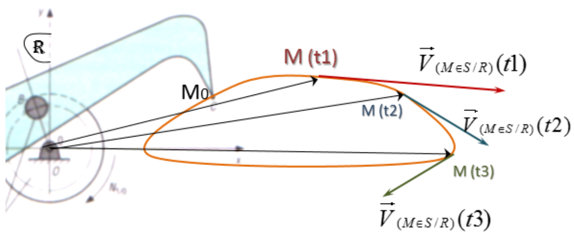
On souhaite évaluer la variation du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ au cours du temps, entre deux instants $\left[\frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}\right]_{(R)}$.

La quantité $\left[\frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}\right]_{(R)}$ est la vitesse moyenne entre deux instants. Elle est inutilisable car elle donne, certes, une idée de la variation temporelle du vecteur position, mais entre deux instant distincts. Or nous souhaitons connaître ce taux de variation à un instant donné. En effet entre deux instants la vélocité peut avoir considérablement évoluer. En outre comment définir rationnellement les deux instants ?



Il faut donc faire tendre le laps de temps qui sépare les deux instants vers zéro. Cela donne la vitesse instantannée. On cherche donc la quatité : $\overrightarrow{V(M \in S/R)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}\right]_{(R)}$ qui est par définition la dérivée temporelle de $\overrightarrow{OM}(t)$ si toutefois cette dérivée existe. La vitesse instantanée est donc :

$\overrightarrow{V(M \in S/R)} = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{(R)}$.



On remarque quand $\Delta t \to 0$ que le vecteur $\Delta\overrightarrow{OM}(t)$, donc $\frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$, se rapprochent de la courbe et se confond avec elle. A la limite, $\frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$, donc $\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{(R)}$ est **tangent** à la trajectoire.

3.3. Propriétés du vecteur vitesse

Support du vecteur vitesse : le vecteur vitesse est à la trajectoire du point.

Orientation du vecteur vitesse : il est orienté dans le sens de déplacement du point.

Cas particulier de la trajectoire circulaire : Le vecteur vitesse est au rayon de la trajectoire.

Compositions des vitesses

Si trois solides distincts S_1, S_2, S_3 sont en mouvement quelconque l'un par rapport à l'autre, on démontre la composition des vecteurs vitesse en un point M quelconque de l'espace :

Vitesses opposées : on démontre

Je me teste

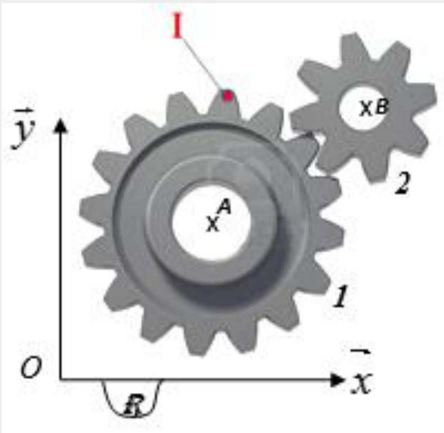
Un engrenage comprenant les roues 1 et 2 en rotation dans le référentiel R : centres A et B.

Représenter le support des vitesses :

a. $\overrightarrow{V(I \in 1/R)}$
b. $\overrightarrow{V(I \in 2/R)}$

Sens de rotation trigo pour la roue 1, et prendre pour norme : $\left\|\overrightarrow{V(I \in 2/R)}\right\| = 4$ et $\left\|\overrightarrow{V(I \in 1/R)}\right\| = 3$.

c. Tracez ces deux vecteurs.
d. Déduire par composition des vitesses et construction graphique le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(I \in 2/1)}$.



4. VECTEUR ACCELERATION

4.1. Définition du vecteur accélération

Définition

L'accélération instantanée d'un point (M) appartenant à un solide (S) par rapport à un repère (R), est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\overrightarrow{V(M \in S/R)}$:

Unité : . (augmentation de vitesse de 1m/s chaque s)
Le g est aussi utilisé : $1g = 9{,}81\ m.s^{-2}$ (augmentation de vitesse de 35km/h chaque s)

Exemple

Repère (R) : $R(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = X_M(t).\vec{x} + Y_M(t).\vec{y} + Z_M(t).\vec{z}$

Le vecteur vitesse est : $\overrightarrow{V(M \in S/R)} = \frac{dX_M(t)}{dt}.\vec{x} + \frac{dY_M(t)}{dt}.\vec{y} + \frac{dZ_M(t)}{dt}.\vec{z}$

Le calcul de la dérivée donne immédiatement :

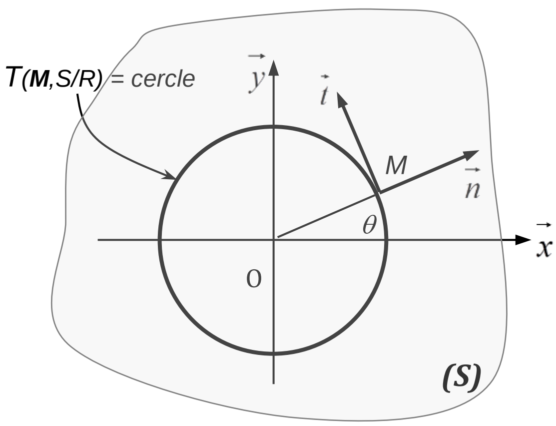
$$\overrightarrow{\Gamma(M \in S/R)} = \left[\frac{d\overrightarrow{V(M \in S/R)}}{dt}\right]_{(R)} = \frac{d^2X_M(t)}{dt^2}.\vec{x} + \frac{d^2Y_M(t)}{dt^2}.\vec{y} + \frac{d^2Z_M(t)}{dt^2}.\vec{z}$$

4.2. Accélération d'un point sur trajectoire circulaire

$R(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ = référentiel galiléen.

$R(M,\vec{n},\vec{t},\vec{z})$ = repère de Frenet, lié au solide en rotation.

$\overrightarrow{OM} = r.\vec{n}$; r = rayon de giration ou rayon de courbure constant.



Calcul de la vitesse

$\overrightarrow{V(M \in S/R)} = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{(R)} = r.\left[\frac{d\vec{n}}{dt}\right]_{(R)}$

Calcul de l'accélération

$\overrightarrow{\Gamma(M \in S/R)} = \left[\frac{d\overrightarrow{V(M \in S/R)}}{dt}\right]_{(R)} = r\left[\frac{d\dot{\theta}.\vec{t}}{dt}\right]_{(R)} =$

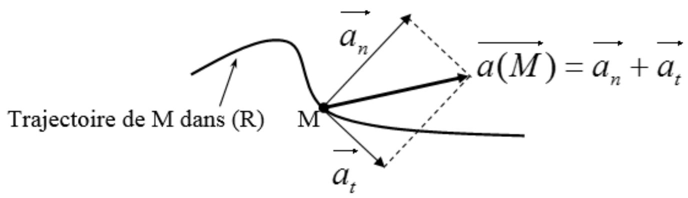
Conclusions

a. La variable $\dot{\theta}$, dérivée temporelle de l'angle balayé par le solide, est la vitesse angulaire du solide (S) par rapport au référentiel (R). Elle s'exprime en rad/s, et représente l'angle balayé par unité de temps.
b. La variable $\ddot{\theta}$, dérivée temporelle seconde de l'angle balayé par le solide, est l'accélération angulaire du solide (S) par rapport au référentiel (R). Elle s'exprime en rad/s^2, et représente l'accroissement de vitesse angulaire par unité de temps
c. L'accélération d'un point situé sur une trajectoire curviligne comporte deux composantes :

Composante tangentielle, fonction de l'accélération angulaire

Composante normale, centripète fonction de la vitesse angulaire

$$\overrightarrow{\Gamma(M \in S/R)} = r\ddot{\theta}.\vec{t} - r\dot{\theta}^2.\vec{n}$$



AVERTISSEMENT, DANGER

Les accélérations ne se composent pas comme les vecteurs vitesses :

$$\cancel{\overrightarrow{\Gamma(M \in 1/2)} = \overrightarrow{\Gamma(M \in 1/3)} + \overrightarrow{\Gamma(M \in 3/2)}} \quad !!!!!!!!!!!!!$$

Il faut calculer la vitesse $\overrightarrow{V(M \in 1/2)}$ puis la dériver par rapport au temps.

Je me teste

a. Calculer l'expression de l'accélération d'un point sur une trajectoire curviligne : retrouver le résultat du cours calculé précédemment qui dont le calcul doit être maîtrisé.

Un véhicule se déplace à la vitesse V=36 km/h dans un rond-point dont le diamètre est D=30m.

b. Calculer sa vitesse angulaire ω par rapport à la route.

c. Combien de temps est nécessaire pour faire le tour du rond-point ?

d. Calculer son accélération normale, centripète.

e. Montrer que l'expression $\overrightarrow{\Gamma(M \in S/R)} = r\ddot{\theta}.\vec{t} - r\dot{\theta}^2.\vec{n}$ peut se mettre sous la forme : $\overrightarrow{\Gamma(M \in S/R)} = a_t.\vec{t} - \frac{V^2}{r}.\vec{n}$; où $V = \left\|\overrightarrow{V(véhicule/R)}\right\|$, et $a_t = \frac{dV}{dt}$.

La vitesse du véhicule s'accroit de 3 m/s chaque seconde.

f. Calculer l'accélération tangentielle.

g. Déduire l'accélération totale galiléenne subie par le véhicule dans le rond-point.

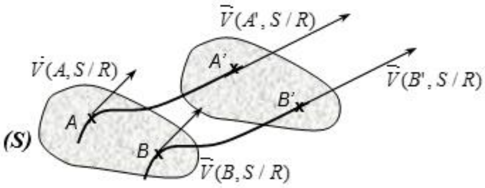
5. LES MOUVEMENTS PARTICULIERS

Les mouvements de translation et rotation ont été définis dans la partie « Modélisation des mécanismes ». La notion de vitesse, maintenant définie permet de donner une autre définition et de nouvelles propriétés.

5.1. Mouvement de translation entre deux solides

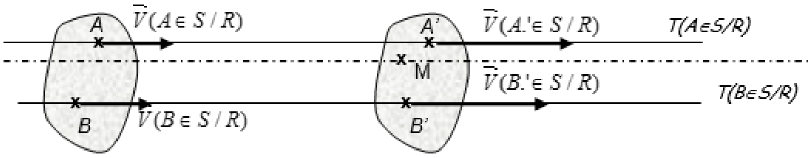
Définition

Un solide (S) est animé d'un mouvement de translation par rapport à un repère R si à chaque instant, tous ses points ont même vecteur vitesse par rapport à (R):



5.1.1. Translation rectiligne

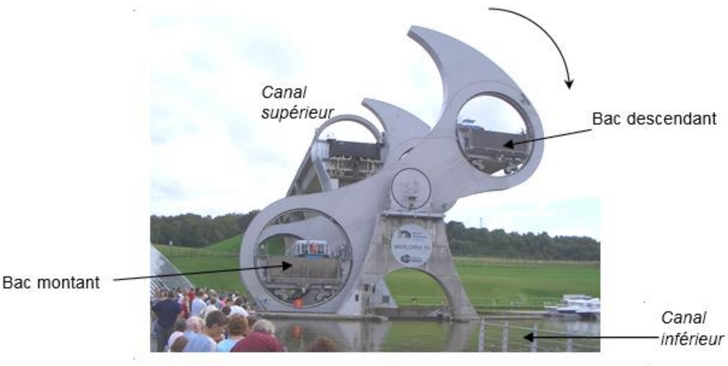
Les trajectoires des points sont des droites.



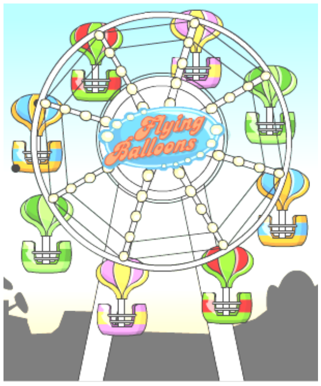
5.1.2. Translation circulaire

Les trajectoires des points sont des cercles non concentriques. On donne deux exemples.

- La nacelle de la grande roue de fête foraine est en translation circulaire par rapport au sol. Elle reste parallèle à elle-même au cours du mouvement, et c'est mieux ainsi !
- Les bacs remplis d'eau de l'écluse de falkirk en Ecosse sont animés d'un mouvement de translation circulaire par rapport au sol. Ils restent parallèles à eux-même au cours du mouvement… Il vaut mieux !



Ecluse de Falkirk - Ecosse

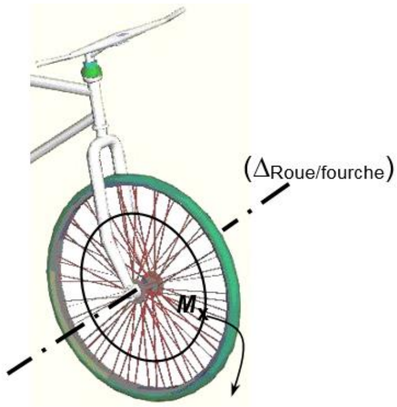


Grande roue de fête foraine

5.2. Mouvement de rotation entre deux solides

Définition

Un solide (S) est animé d'un mouvement de rotation dans un repère (R), s'il possède au moins deux points distincts dont la vitesse reste nulle dans le temps par rapport à (R). Ces points, invariants dans le mouvement de (S)/R, sont alignés sur une droite Δ appelé axe de rotation.



<u>Propriété</u> : les trajectoires des points d'un solide animé d'un mouvement de rotation sont des cercles concentriques centrés sur l'axe de rotation.

<u>Propriété inverse</u> : Pour trouver l'axe d'un solide en rotation (ou le centre si on est dans le plan), on peut prendre le centre d'un des cercles trajectoire.

<u>Définition mathématique de l'axe de rotation Δ</u> : $N \in \Delta$

Je me teste

Reprenez l'éolienne. Vous devez disposer des figures géométrales.

On donne : $\overrightarrow{OB} = b.\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{BG_2} = c.\overrightarrow{z_2}$.

a. Calculer : $\vec{V}(B,1/0)$
b. Montrer $\vec{V}(B,1/0) = \vec{V}(B,2/0)$ par composition des vitesses
c. Calculer : $\vec{V}(G_2,2/1)$
d. Calculer : $\vec{V}(G_2,2/0)$
e. Calculer l'accélération : $\vec{\Gamma}(G_2,2/1)$
f. Calculer l'accélération : $\vec{\Gamma}(G_2,2/0)$

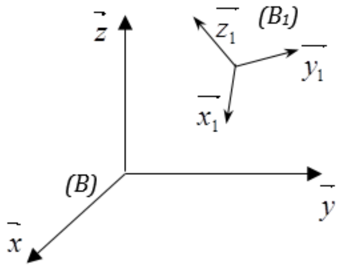
6. VECTEUR TAUX DE ROTATION

Il est encore appelé vecteur vitesse de rotation ou vecteur rotation instantanée.

6.1. Définition

Soient deux bases $B_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ et $B_2(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ en mouvement l'une par rapport à l'autre et positionnées de manière quelconque dans l'espace. On démontre qu'il existe un vecteur unique noté $\overrightarrow{\Omega(B_1/B_2)}$, appelé vecteur taux de rotation de (B_1) par rapport à (B_2), permettant de déterminer les dérivées temporelles des vecteurs de base $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}$ tel que :

- $\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{(B_2)} =$
-
-



Unité de $\overrightarrow{\Omega(B_1/B_2)}$:

Le vecteur taux de rotation est une sorte de coefficient vectoriel, permettant d'obtenir les dérivées temporelles des vecteurs de bases en fonction des vecteur de base eux-même.

Dis autrement, la dérivée temporelle d'un vecteur de base $\overrightarrow{x_k}$ s'obtient en multipliant ce même vecteur $\overrightarrow{x_k}$ par le vecteur taux de rotation.

Par exemple, on peut écrire immédiatement : $\left[\frac{d\overrightarrow{y_5}}{dt}\right]_{B_2} = \vec{\Omega}(B_5/B_2) \wedge \overrightarrow{y_5}$.

Démonstration

La démonstration de l'existence et unicité du vecteur $\overrightarrow{\Omega(B_1/B_2)}$ est donnée en annexe. C'est une belle démonstration, très mathématique, pas immédiate !

6.2. Propriétés du vecteur taux rotation

a. Originellement le vecteur taux de rotation se défini entre DEUX BASES. Par extension nous parlerons de vecteur rotation d'un solide S_1 par rapport à S_2 : il s'agit en fait du vecteur taux de rotation entre les bases attachées à chaque solide : $\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(B_2/B_1)$.

b. Sens inverse :

c. **Composition** des vecteurs taux de rotation entre trois solides S_2, S_1, S_3 :

d. Solide S_2 **en translation** par rapport à S_1 : le vecteur taux de rotation nul

$$\Rightarrow$$

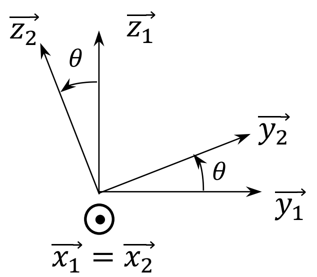
e. A un instant t, pour un solide donné, le vecteur taux de rotation est un invariant vectoriel qui ne dépend pas d'un point du solide. Alors que le vecteur vitesse instantanée dépend du point considéré du solide. On parle donc de la vitesse d'un point, mais du taux de rotation… d'un solide (par rapport à un autre bien entendu).

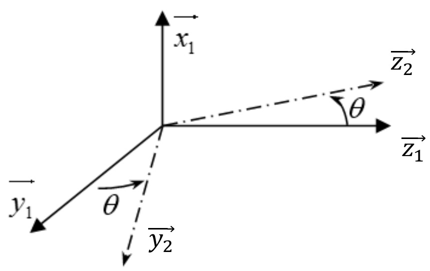
6.3. Application : rotation entre bases selon un vecteur de base invariant

Cette application est un cas particulier très important. En effet, calculer un vecteur rotation dans un cas quelconque serait très délicat sans l'étude du cas particulier qui suit et dont nous nous servirons tout le temps.

Il s'agit de déterminer le vecteur taux de rotation dans le cas le plus simple possible : la rotation d'un solide S_2 par rapport à un solide S_1 autour d'un axe fixe.

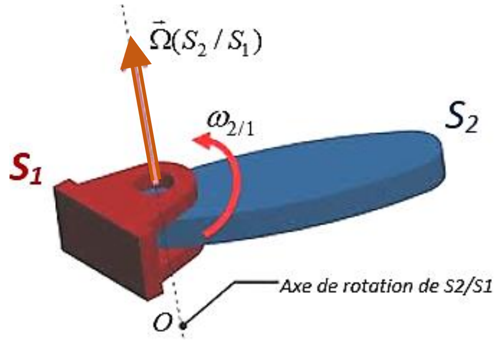
B_2 est en rotation par rapport à B_1 autour du vecteur invariant $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$.





On démontre que dans ce cas simple le vecteur taux de rotation est :

$\boxed{\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \overrightarrow{\Omega(B_2/B_1)} \ = \qquad\qquad}$



On note aussi la vitesse angulaire : $\omega_{2/1} = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

Illustration : on place usuellement le vecteur rotation sur l'axe de rotation.

En pratique : on ne calculera jamais un taux de rotation en fonction de la définition fondamentale mais en effectuant une composition sur le vecteur taux de rotation recherché, pour passer par des rotations simples.

Démonstration

On cherche le vecteur $\vec{\Omega}$, inconnu tel que :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{x_2}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{y_2}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{z_2}$$

Dans le cas de la rotation autour de $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$, décrite précédemment, on a les dérivées de chaque vecteur de base :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = \vec{0} = \left(\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{x_2}\right) \wedge \overrightarrow{x_2}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \overrightarrow{z_2} = \left(\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{x_2}\right) \wedge \overrightarrow{y_2}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = -\frac{d\theta}{dt} \cdot \overrightarrow{y_2} = \left(\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{x_2}\right) \wedge \overrightarrow{z_2}$$

⇨ Par identification a donc l'inconnue $\vec{\Omega}$: $\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{\Omega(B_2/B_1)}$.

Je me teste

Reprendre les **angles d'Euler**, vus en début de cours.

On souhaite connaître le taux de rotation du solide (S) par rapport à la base (B_g) : $\vec{\Omega}(S/B_g)$.

a. Appliquer la composition des vecteurs taux de rotation.
b. Déduire le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}(S/B_g)$.

Reprendre le petit exercice précédent sur **l'éolienne**. Calculer :

c. $\vec{\Omega}(1/0)$
d. $\vec{\Omega}(2/1)$
e. $\vec{\Omega}(2/0)$

7. FORMULE DE LA BASE MOBILE (ou dérivation vectorielle, ou Bour)

Formule encore appelée formule de dérivation vectorielle, ou formule de Bour : ces trois appellations doivent être connues.

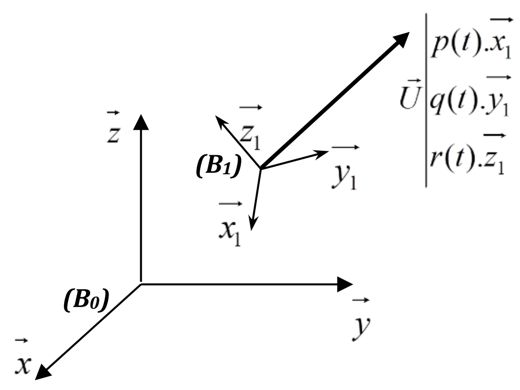
Il s'agit de la formule fondamentale de la mécanique du solide toute entière : cinématique, statique, dynamique, résistance des matériaux…

7.1. Enoncé de la formule de dérivation vectorielle

Enoncé de la formule de dérivation vectorielle

Soit un vecteur $\vec{U}$ quelconque variable et défini par ses coordonnées $p(t), q(t), r(t)$ dans une base $B_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$. La base $B_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ est elle-même mobile dans $B_0(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$.

La dérivée temporelle de $\vec{U}$ dans la base $B_0(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ peut se calculer grâce à l'expression suivante dite formule de la base mobile :



Où : $\vec{\Omega}(B_1/B_0)$ est le vecteur taux de rotation de B_1 par rapport à B_0 en rad/s.

7.2. Démonstration

Démonstration (apportant une certaine satisfaction)

Il suffit de dériver $\vec{U} = p(t)\overrightarrow{x_1} + q(t)\overrightarrow{y_1} + r(t)\overrightarrow{z_1}$, par rapport au temps dans la base B_0 : ça fini par venir sans (trop) résister : $\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{B_0} = \left[\frac{d(p(t)\overrightarrow{x_1}+q(t)\overrightarrow{y_1}+r(t)\overrightarrow{z_1})}{dt}\right]_{B_0}$ etc.

✍ Je me teste

Démontrer la formule de la base mobile : $\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{B_0} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{B_1} + \vec{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \vec{U}$. Très bon exercice pour s'approprier la dérivation vectorielle.

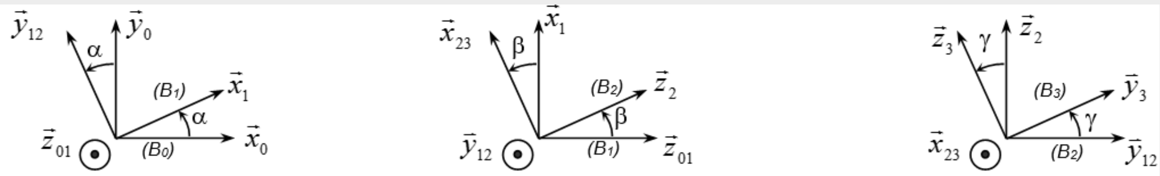
7.3. Deux cas particuliers

Si le vecteur $\vec{U}$ est fixe dans $B_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$, la formule devient : $\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{B_0} = \vec{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \vec{U}$.

Si le vecteur $\vec{U}$ est fixe dans $B_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$, et que la base B_1 est que $\vec{\Omega}(B_1/B_0) = \vec{0}$: $\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{B_0} = \vec{0}$

✍ Je me teste : exercice de pratique fondamentale !

Soit les trois rotations entre bases ci-dessous.



a. Calculer les vecteur taux de rotations : $\vec{\Omega}(B_1/B_0)$, $\vec{\Omega}(B_2/B_1)$, $\vec{\Omega}(B_3/B_2)$
b. Calculer les vecteur taux de rotations : $\vec{\Omega}(B_2/B_0)$, $\vec{\Omega}(B_3/B_1)$, $\vec{\Omega}(B_3/B_0)$

Calculer les vecteurs dérivés suivants :

c. $\left[\frac{d\overrightarrow{y_{12}}}{dt}\right]_{B_0}$
d. $\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{B_1}$
e. $\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{B_0}$
f. $\left[\frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt}\right]_{B_1}$
g. $\left[\frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt}\right]_{B_0}$

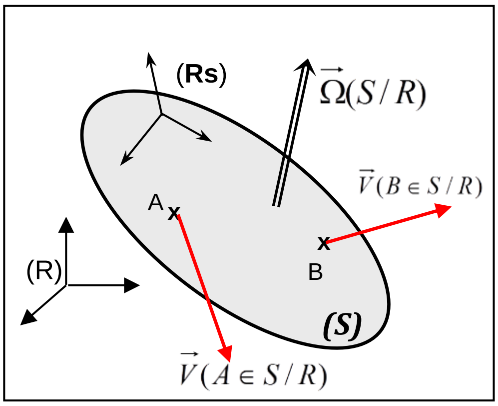
8. TORSEUR DISTRIBUTEUR DES VITESSES D'UN SOLIDE INDEFORMABLE

Avertissement : le cours sur les torseurs donné en annexe doit être connu.

Problématique : comment se distribuent les vecteurs vitesse des différents points M d'un solide (S) indéformable, dans son mouvement par rapport à un repère (R) ?

Les vecteurs vitesse étant différents en chaque points du solides, on parle de <u>champ</u> de vecteurs vitesses.

Ce type de champ de vecteur est un champ dit « champ de moments ».



8.1. Expression mathématique du champ des vecteurs vitesses

Soit un solide indéformable (S) en mouvement par rapport à un repère (R). Son vecteur taux de rotation est $\vec{\Omega}(S/R)$. La relation mathématique liant les vecteurs vitesse de deux points A et B distincts s'écrit :

Cette expression mathématique porte trois appellations possibles à connaître : Expression du champ des vecteurs vitesse, formule de Varignon, ou formule de changement de point.

8.2. Démonstration

Considérons deux points A et B du solide (S) dont le repère attaché est (Rs).

Dérivons temporellement le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère (R) en appliquant la formule de Bour :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{(R)} = \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{(R_S)} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

En vertu du <u>caractère indéformable du solide</u> (S) : $\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{(R_S)} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{(R)} = \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)}{dt}\right]_{(R)} = \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{(R)} = \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{(R)} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$\Leftrightarrow \vec{V}(B \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$

Remarque : apprentissage mnémotechnique de la formule de Varignon.

$\vec{V}(B \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \vec{V}(B \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$ (Antisymétrie du produit vectoriel)

L'ordre des lettres est BABAR (Ω est la Résultante) : facile à retenir. BARAB fonctionne aussi.

8.3. Torseur distributeur des vecteurs vitesses d'un solide indéformable

Définition

Les vecteurs vitesses d'un solide indéformable se distribuent selon un champ de moments. Le vecteur taux de rotation est la constante vectorielle appelée résultante (invariant vectoriel). Le torseur cinématique du solide (S) est la réunion de ces deux champs de vecteurs :

- Champ des vecteurs vitesse variable
- Champ des vecteurs taux de rotation constant

Ce torseur s'écrit :

Explication du contenu de cette expression

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{matrix} \right\}_A$$

8.4. Transport d'un « torseur » d'un point A à un point B

L'appellation est abusive car on ne déplace pas le torseur, mais juste les éléments de réduction. Le torseur (double champs de vecteurs) reste identique. On change juste les « représentants ». Mais bon, l'usage oral fait foi.

Il s'agit ici de calculer le vecteur vitesse en B à partir de celui en A : il faut donc utiliser l'expression du champ des vitesses :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(B \in S/R) \end{matrix}\right\}_B = \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB} \end{matrix}\right\}_B$$

Bien entendu lors du transport, seul le vecteur vitesse est différent, $\vec{\Omega}(S/R)$ étant l'invariant vectoriel du torseur.

8.5. Composition des torseurs cinématiques

Si trois solides S_k sont en mouvement entre eux, on peut écrire :

Si on réduit les torseurs <u>au même point</u> A :

$$\left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(A \in S_2/S_1) \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_2/S_3) \\ \vec{V}(A \in S_2/S_3) \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_3/S_1) \\ \vec{V}(A \in S_3/S_1) \end{matrix}\right\}_A$$

On retrouve la composition des vecteurs vitesse, et taux de rotation vu précédemment dans le cours :

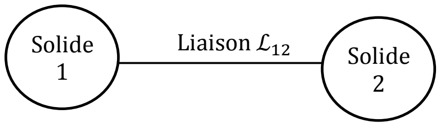
$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2/S_3) + \vec{\Omega}(S_3/S_1)$$
$$\vec{V}(A \in S_2/S_1) = \vec{V}(A \in S_2/S_3) + \vec{V}(A \in S_3/S_1)$$

9. TORSEUR CINEMATIQUE DES LIAISONS NORMALISÉES

9.1. Qu'est-ce que le torseur cinématique d'une liaison

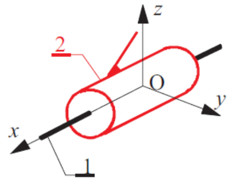
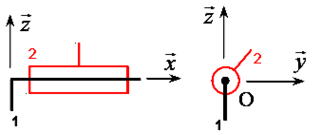
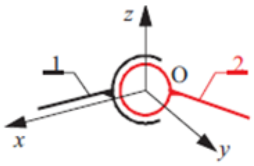
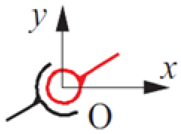
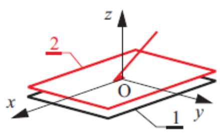
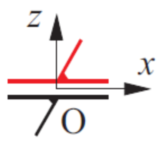
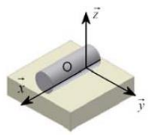
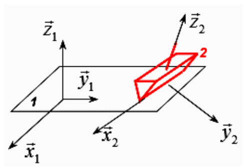
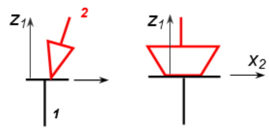
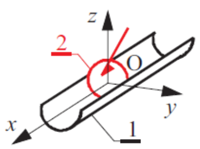
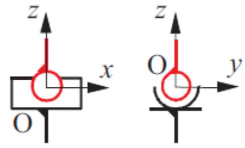
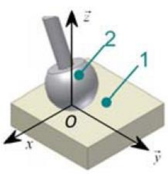
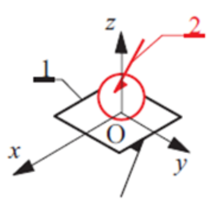
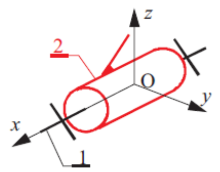
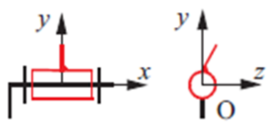
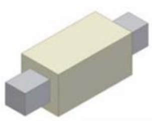
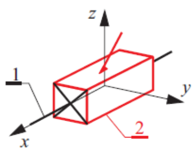
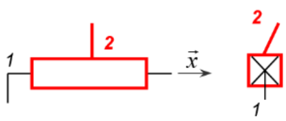
Expression débraillée, « le torseur cinématique d'une liaison » L_{12} entre deux solides 1 et 2, est en fait le torseur distributeur des vitesses du solide 2 par rapport à 1 <u>permis</u> par la liaison L_{12}.

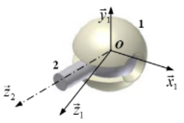
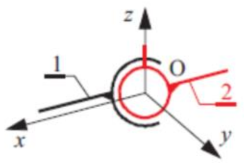
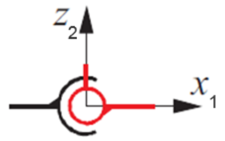
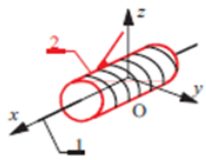
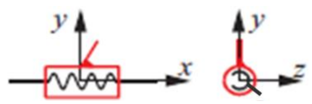
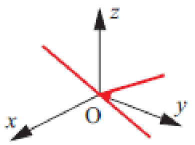
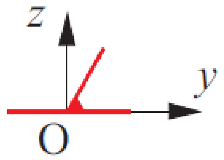
Certaines composantes du torseur vont donc être nulles car la liaison interdit certaines rotations et translations.



Torseur de la Liaison $\mathcal{L}_{12}$: $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}$

9.2. Tableau des liaisons normalisées

Liaison : nom et illustration	Caract. géométriq.	Schéma spatial (3D)	Schéma plan (2D)	Torseur cinématique
$\mathcal{L}$ pivot glissant (-4) 	Axe $(O,\vec{x})$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_A\left\{ \quad \right\}$ Validité : $\forall A \in$ ***axe*** *liaison* $(O,\vec{x})$
$\mathcal{L}$ sphérique (-3) 	Centre O			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_O\left\{ \quad \right\}$ Validité : $\boldsymbol{O}$ = ***centre*** *de la sphère*
$\mathcal{L}$ appui plan (-3) 	Normale $\vec{z}$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_M\left\{ \quad \right\}$ Dom.de Validité : $\forall M$ *de l'****espace***
$\mathcal{L}$ cylindre plan (-2) 	- Normale $\vec{z}$ - Axe $(O,\vec{x})$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \omega_{x2}\vec{x_2} + \omega_{z1}\vec{z_1} \\ V_{x1}\vec{x_1} + V_{y1}\vec{y_1} \end{Bmatrix}$ Dom. de Validité : $\forall O \in$ *plan passant par la ligne de contact et perpendiculaire au plan de la liaison*
$\mathcal{L}$ sphère cylindre (-2) 	- Centre O - Axe $(O,\vec{x})$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_O\left\{ \quad \right\}$ Domaine de Validité : *O* ***centre de la sphère***
$\mathcal{L}$ sphère plan (-1) 	- Centre O - Normale $\vec{z}$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_x\vec{x} + \omega_y\vec{y} + \omega_z\vec{z} \\ V_x\vec{x} + V_y\vec{y} \end{Bmatrix}$ Dom.de Validité : $\forall A \in$ *droite* $(O,\vec{z})$ *normale au plan et passant le centre de lasphère*
$\mathcal{L}$ pivot (-1) 	Axe $(O,\vec{x})$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_A\left\{ \quad \right\}$ Dom.de Validité : $\forall A \in$ ***axe*** *de la liaison* $(O,\vec{x})$
$\mathcal{L}$ glissière (-1) 	Direction $\vec{x}$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_M\left\{ \quad \right\}$ Dom.de Validité : $\forall M$ *de l'****espace***

$\mathcal{L}$ sphérique à doigt (-4) 	- centre O - plan de normale $\vec{y_1}$ - axe de doigt $(O, \vec{z_2})$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{y1}\vec{y_1} + \omega_{z2}\vec{z_2} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$ Dom.de Validité : *O centre de la sphère*
$\mathcal{L}$ hélicoïdale (-1) 	Axe $(O, \vec{x})$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \quad \right\}_A$ $V_x =$ (V en m/s, ω en rad/s, p, le pas en m/tr). « -p » si hélice à gauche. Validité : $\forall A \in$ ***axe** de la liaison*
$\mathcal{L}$ encastrement (-6)				$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \{0\}$ Dom.de Validité : $\forall M$ *de l'espace*

✍ Je me teste

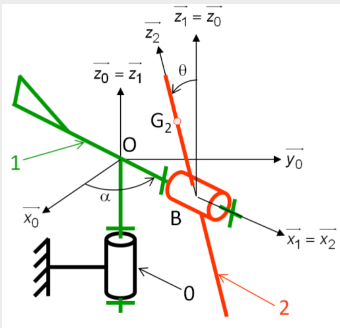
Reprenez l'éolienne. Vous avez calculé les différentes vitesses par dérivation temporelle du vecteur position. Vous avez aussi les vecteurs taux de rotation.

On va calculer à nouveau les vitesses des points avec la formule de Varignon.

a. Exprimer le champ des vitesses entre les points O et B.
b. Déduire $\vec{V}(B, 1/0)$.
c. Par la même méthode calculer $\vec{V}(G_2, 2/1)$.
d. Par la même méthode calculer $\vec{V}(G_2, 1/0)$.

Ecrire les torseurs suivant en un point judicieux :

e. $\{\mathcal{V}(1/0)\}$
f. $\{\mathcal{V}(2/1)\}$



10. MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

10.1. Rappel de la définition

Le mouvement d'un solide S_2 par rapport à un solide S_1 est dit plan, s'il existe un plan P_2 lié à S_2 qui reste coïncident avec un plan P_1 lié à S_1 au cours du mouvement. On parle alors de mouvement plan sur plan de plan P_1 (ou P_2).

10.2. Torseur cinématique dans le cas d'un mouvement plan/plan

Dans le cas d'une étude plane, de plan $(\vec{x},\vec{y})$ tous les vecteurs vitesses sont contenus dans ce plan. L'expression du changement de point (Formule de « Varignon ») implique immédiatement que tous les vecteurs taux de rotations sont orthogonaux à ce plan, donc uniquement selon $\vec{z}$.

Dans le cas d'une étude plane, de plan $(\vec{x},\vec{y})$, <u>tous les torseurs cinématiques</u> se simplifient de la manière suivante :

$$\boxed{\{V(i/j)\} = {}_M\begin{Bmatrix} p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z} \end{Bmatrix} = {}_M\begin{Bmatrix} \quad \\ \quad \end{Bmatrix}}$$

Si le plan d'étude est $(\vec{y},\vec{z})$: $\{V(i/j)\} = {}_M\begin{Bmatrix} p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z} \end{Bmatrix} =$

Si le plan d'étude est $(\vec{z},\vec{x})$: $\{V(i/j)\} = {}_M\begin{Bmatrix} p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z} \end{Bmatrix} =$

10.3. Conséquences pratiques d'un problème plan

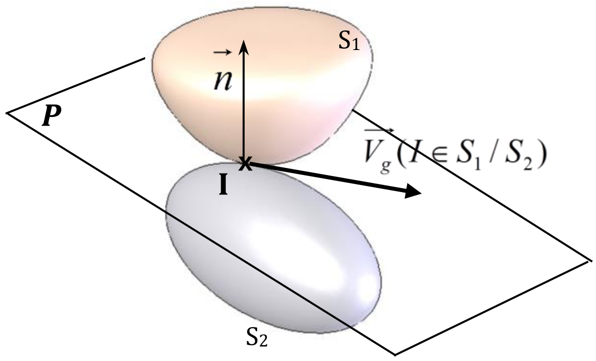
a. Tout point a une trajectoire contenue dans le plan. Rien ne peut sortir du plan.
b. Le plan d'étude est le plan de la feuille.
c. Les vecteurs rotation instantanée $\vec{\Omega}(i/j)$ sont perpendiculaires au plan.
d. Les vitesses $\vec{V}(M \in i/j)$ sont contenues dans le plan
e. L'hypothèse du mouvement plan simplifie l'étude cinématique. Cela est spécifié dans la présentation de l'étude (énoncé sujet). Attention à ne pas extrapoler un problème non plan.
f. Dans un mouvement plan les torseurs sont : des glisseurs, couples, ou nul.

✍ Je me teste

Reprenez toutes les liaisons et simplifiez-les dans les trois cas plan : $(\vec{x_1},\vec{y_1})$, $(\vec{y_1},\vec{z_1})$, $(\vec{z_1},\vec{x_1})$.

11. CINEMATIQUE DU CONTACT PONCTUEL

11.1. Modélisation du contact ponctuel



Soient deux solides indéformables S_1 et S_2, en contact ponctuel au point I.

Il existe un plan tangent commun (P) unique à S_1 et S_2 au point I.

Le plan (P) est appelé

On construit la normale $\vec{n}$ au plan (P) au point I.

A l'instant t, le point I est en fait le point coïncident d'un point I_1 appartenant à S_1, et un point I_2 appartenant à S_2. A l'instant t considéré, $I=I_1=I_2$. A l'instant *t+dt*, ces trois points ont éclaté et ne sont plus confondus.

Remarque : le solide étant considéré indéformable, le contact est considéré ponctuel même sous l'effet des efforts appliqués qui, en réalité, déforment le contact pour le rendre… surfacique.

11.2. Vitesse de glissement entre deux solides

Définition

Si deux solides S_1 et S_2 sont en contact au point I, le vecteur vitesse de glissement du solide S_1 par rapport à S_2 s'écrit :

Propriété importante

Le vecteur vitesse de glissement est inclu dans

! **Avertissement, danger** : on ne peut pas calculer la vitesse $\overrightarrow{V_g}(I \in S_1/S_1)$ *par dérivation* du vecteur position : le calcul amène à un résultat faux car le point I ne peut pas être suivi au cours du mouvement et il est la réunion de trois points. Il est donc impératif d'utiliser le champ des vitesses pour tout calcul de glissement.

Remarque

La vitesse de glissement est la conséquence d'une vitesse relative des deux solides. En I ça frotte entre S_1 et S_2, il y a mouvement relatif des solides au point de contact.

11.3. Cas particulier du roulement sans glissement

Définition du Roulement Sans Glissement entre deux solides (RSG)

La condition de non glissement au point de contact I entre deux solides S_1 et S_2 s'écrit :

Exemples de modèle possible et courant de roulement sans glissement : pneu/sol, cylindres ou cercles primitifs d'un engrenage.

✍ Je me teste : deux exercices fondamentaux

I. ENGRENAGE

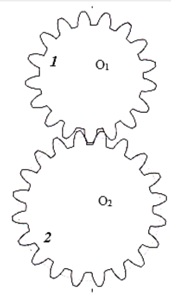
Un engrenage à axes parallèles se modélise cinématiquement par deux roues circulaires 1 et 2 qui roulent sans glisser l'une sur l'autre au point de contact I.

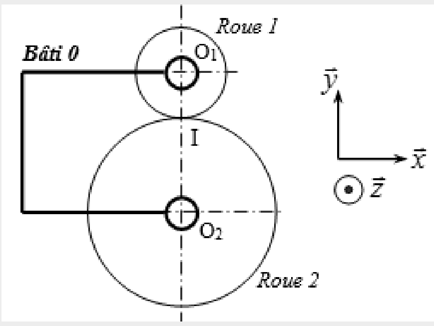
Les rayons sont : $\overrightarrow{IO_1} = R_1\vec{y}$; $\overrightarrow{IO_2} = -R_2\vec{y}$

On note les vitesses angulaires :

$\vec{\Omega}(1/0) = \omega_{10}\vec{z}$; $\vec{\Omega}(2/0) = \omega_{20}\vec{z}$

<u>Objectif</u> : calculer le rapport des vitesses angulaires $\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$.





a. Que valent les vitesses : $\vec{V}(O_1, 1/0), \vec{V}(O_2, 2/0)$ et $\vec{V}(I, 2/1)$?
b. Exprimer la condition de RSG en I et faire une composition de vitesse entre les solides 0, 1, 2.
c. Faire un changement de point sur chaque vitesse obtenue, entre I et O_1, I et O_2.
d. Terminer le calcul et écrire le rapport $\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$.

II. ROUE SUR LE SOL

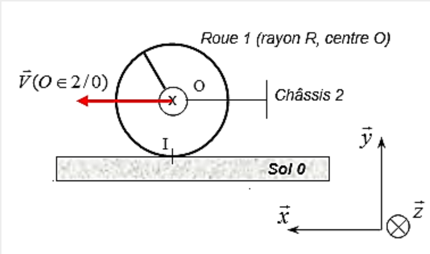
Une roue 1 roule sur le sol 0 sans glisser au point de contact I.

Elle est guidée en L. Pivot dans le châssis 2. Le châssis en mouvement de translation par rapport à la route.

La vitesse de rotation de la roue par rapport au châssis est :

$\vec{\Omega}(1/2) = \omega_{12}\vec{x}$. La vitesse d'avancée du châssis par rapport à la route est : $\vec{V}(O, 2/0) = V_{20}.\vec{x}$.

Rayon roue : $\overrightarrow{IO} = R_1\vec{y}$



<u>Objectif</u> : calculer V_{20} en fonction de ω_{12} (loi entrée sortie cinématique).

a. Que valent les vitesses : $\vec{V}(I, 1/0)$ et $\vec{V}(O, 1/2)$?
b. Démontrer que $\vec{V}(O, 2/0) = \vec{V}(O, 1/0)$ et $\vec{\Omega}(1/0)$.
c. Exprimer la condition de RSG en I entre 1 et 0. Faire un changement de point entre I et O.
d. Terminez le calcul et trouver la relation scalaire V_{20} en fonction de ω_{12}.
e. Expliquez le signe qui apparait dans l'expression.

12. LOI ENTRÉE-SORTIE CINÉMATIQUE

12.1. Définition

Soit un mécanisme de paramètres de mouvement d'entrée et sortie e(t), s(t). Les grandeurs e(t), s(t) sont de type distance ou angle.

La loi entrée sortie cinématique (à ne surtout pas confondre avec la loi e-s géométrique) est une relation mathématique reliant les dérivées temporelles de e(t) et s(t) : $f\left[\frac{de}{dt}(t), \frac{ds}{dt}(t)\right] = 0$.

L'idéal est de trouver la sortie en fonction exclusive de l'entrée : $\frac{ds}{dt}(t) = g\left[\frac{de}{dt}(t)\right]$ mais c'est parfois fastidieux, voire mathématiquement impossible. Dans ce cas on se contentera d'une relation du type $f\left[\frac{de}{dt}(t), \frac{ds}{dt}(t)\right] = 0$. L'outil numérique fera le reste…

Il existe quatre manières de trouver un loi e-s cinématique

- dériver la loi e-s géométrique par rapport au temps
- effectuer la fermeture cinématique du mécanisme (composition des torseurs cinématiques)
- Utiliser une condition cinématique (roulement sans glissement, contrainte géométrique…)
- Utiliser une loi déjà connue sans la recalculer (engrenage, vis/écrou)

12.2. Cas de la fermeture cinématique

Dans le même esprit que la fermeture géométrique, il suffit de faire une composition des torseurs cinématique en passant par les liaisons d'une chaîne de solides.

Pour n solides :

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_n)\} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \{\mathcal{V}(S_i/S_{i+1})\}$$

On somme ensuite les éléments de réductions en un point :

$$_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_n) \\ \vec{V}(A \in S_1/S_n) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{i=n-1} {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_\mathrm{i}/S_{i+1}) \\ \vec{V}(A \in S_\mathrm{i}/S_{i+1}) \end{Bmatrix}$$

Puis, la somme des taux de rotation :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_n) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \vec{\Omega}(S_\mathrm{i}/S_{i+1})$$

Et enfin, la somme des vitesses :

$$\vec{V}(A \in S_1/S_n) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \vec{V}(A \in S_\mathrm{i}/S_{i+1})$$

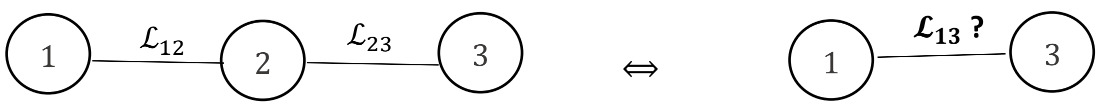
Je me teste : deux exercices fondamentaux

I. ENGRENAGE
Reprendre l'engrenage et retrouver sa loi e-s cinématique en effectuant un fermeture cinématique entre les trois solides 0, 1, 2. La réduction des torseurs se fera au point I de manière à faire apparaître la condition de RSG entre roues.

II. ROUE SUR LE SOL
Reprendre la roue qui roule sur le sol et retrouver sa loi e-s cinématique en effectuant un fermeture cinématique entre les trois solides 0, 1, 2. La réduction des torseurs se fera au point I de manière à faire apparaître la condition de RSG entre roue et sol.

13. DÉTERMINATION D'UNE LIAISON EQUIVALENTE

13.1. Cas de liaisons placées en série



Torseur cinématique de la liaison $\mathcal{L}_{12}$: $\{\mathcal{V}(2/1)\}$

Torseur cinématique de la liaison $\mathcal{L}_{23}$: $\{\mathcal{V}(3/2)\}$

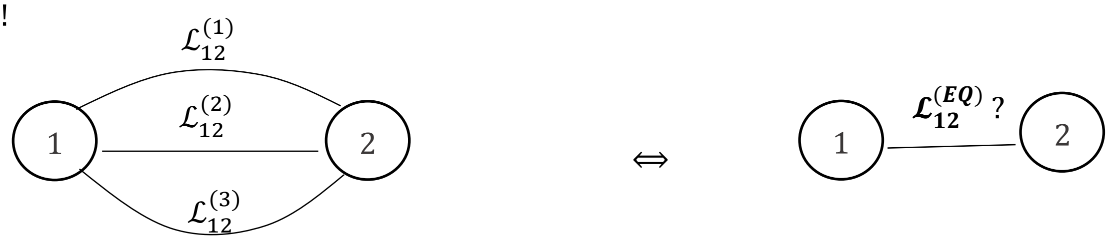
<u>Définition</u> : la liaison équivalente entre les solides 1 et 3 est la liaison dont le torseur cinématique est $\{\mathcal{V}(3/1)\}$.

Par composition des torseurs cinématiques il vient immédiatement :

<u>Règle</u> : pour déterminer la liaison équivalente de deux liaisons disposées en ,
on les torseurs cinématiques. Ensuite, on identifie le torseur trouvé à la liaison normalisée.

13.2. Cas de liaisons placées en parallèle

Remarque : on étudie ci-dessous le cas de trois liaisons en parallèle, mais on peut en avoir… n !



Torseur cinématique de la liaison $\mathcal{L}_{12}^{(\mathbf{1})}$: $\left\{\mathcal{V}_{2/1}^{(\mathbf{1})}\right\}$

Torseur cinématique de la liaison $\mathcal{L}_{12}^{(\mathbf{2})}$: $\left\{\mathcal{V}_{2/1}^{(\mathbf{2})}\right\}$

Torseur cinématique de la liaison $\mathcal{L}_{12}^{(\mathbf{3})}$: $\left\{\mathcal{V}_{2/1}^{(\mathbf{3})}\right\}$

Définition : la liaison équivalente entre les solides 1 et 2 est la liaison dont le torseur cinématique est $\{\mathcal{V}(2/1)\}$.

Principe :

Les trois liaisons doivent permettre les mêmes degrés de liberté : les degrés de liberté de 2 par rapport à 1. On écrit donc des torseurs cinématiques :

$\left\{\mathcal{V}_{2/1}^{(\boldsymbol{EQ})}\right\} =$

$\left\{\mathcal{V}_{2/1}^{(\boldsymbol{EQ})}\right\} =$

$\left\{\mathcal{V}_{2/1}^{(\boldsymbol{EQ})}\right\} =$

On obtient donc un système de $3 \times 6 = 18$ d'équations à 6 inconnues. Les 6 inconnues sont les 6 composantes du torseur $\left\{\mathcal{V}_{2/1}^{(\boldsymbol{EQ})}\right\}$.

FIN DU COURS SUR LA PERFORMANCE CINEMATIQUE DES SYSTEMES

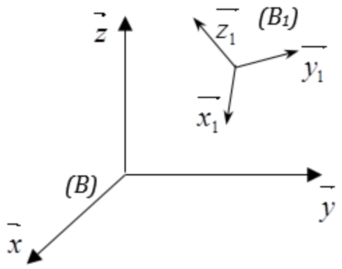
ANNEXE

Dérivation vectorielle par multiplication avec le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}$

$\vec{\Omega}$ est appelé vecteur vitesse de rotation.

Soient deux bases $B_1(\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ et $B_2(\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$ en mouvement l'une par rapport à l'autre et positionnées de manière quelconque dans l'espace de taux de rotation $\overrightarrow{\Omega(B_1/B_2)}$.
Pour obtenir la dérivée d'un vecteur de la base B1 par rapport à la base B2 on multiplie simplement par le vecteur taux de rotation $\overrightarrow{\Omega(B_1/B_2)}$.

$$\left[\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right]_{(B)} = \overrightarrow{\Omega(B_1/B_2)} \wedge \vec{x_1}$$
$$\left[\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right]_{(B)} = \overrightarrow{\Omega(B_1/B_2)} \wedge \vec{y_1}$$
$$\left[\frac{d\vec{z_1}}{dt}\right]_{(B)} = \overrightarrow{\Omega(B_1/B_2)} \wedge \vec{z_1}$$



Le vecteur taux de rotation est une sorte de coefficient vectoriel, permettant d'obtenir les dérivées temporelles des vecteurs de bases en fonction des vecteur de base eux-même.
Unité de $\overrightarrow{\Omega(B_1/B_2)}$: rad/s

Démonstration

Traduisons le fait que la base $B_2(\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$ est **normée**.

$$\|\vec{x_2}\| = 1 \Rightarrow \vec{x_2}.\vec{x_2} = 1 \Rightarrow \vec{x_2}.\left[\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{B_1} = 0 \Rightarrow \vec{x_2} \perp \left[\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{B_1} \Rightarrow \left[\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{B_1} = \gamma.\vec{y_2} + \delta.\vec{z_2}$$

$$\|\vec{y_2}\| = 1 \Rightarrow \vec{y_2}.\vec{y_2} = 1 \Rightarrow \vec{y_2}.\left[\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right]_{B_1} = 0 \Rightarrow \vec{y_2} \perp \left[\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right]_{B_1} \Rightarrow \left[\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right]_{B_1} = \sigma.\vec{x_2} + \alpha.\vec{z_2}$$

$$\|\vec{z_2}\| = 1 \Rightarrow \vec{z_2}.\vec{z_2} = 1 \Rightarrow \vec{z_2}.\left[\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right]_{B_1} = 0 \Rightarrow \vec{z_2} \perp \left[\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right]_{B_1} \Rightarrow \left[\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right]_{B_1} = \xi.\vec{y_2} + \beta.\vec{x_2}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \xi$ réels quelconques.

Puis traduisons le fait que la base $B_2(\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$ est **orthogonale**.

$$\vec{y_2}.\vec{z_2} = 0 \Rightarrow \vec{y_2}.\left[\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right]_{B_1} + \vec{z_2}.\left[\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right]_{B_1} = 0 \Rightarrow \vec{y_2}.(\xi.\vec{y_2} + \beta.\vec{x_2}) + \vec{z_2}.(\ \sigma.\vec{x_2} + \alpha.\vec{z_2}) = 0 \Rightarrow \xi = -\alpha$$

$$\vec{x_2}.\vec{z_2} = 0 \Rightarrow \vec{x_2}.\left[\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right]_{B_1} + \vec{z_2}.\left[\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{B_1} = 0 \Rightarrow \vec{x_2}.(\xi.\vec{y_2} + \beta.\vec{x_2}) + \vec{z_2}.(\ \gamma.\vec{y_2} + \delta.\vec{z_2}) = 0 \Rightarrow \delta = -\beta$$

$$\vec{x_2}.\vec{y_2} = 0 \Rightarrow \vec{x_2}.\left[\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right]_{B_1} + \vec{y_2}.\left[\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right]_{B_1} = 0 \Rightarrow \vec{x_2}.(\sigma.\vec{x_2} + \alpha.\vec{z_2}) + \vec{y_2}.(\ \gamma.\vec{y_2} + \delta.\vec{z_2}) = 0 \Rightarrow \sigma = -\gamma$$

Finalement les dérivées des vecteurs de la base B_2 s'écrivent :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right]_{B_1} = \gamma.\overrightarrow{y_2} - \beta.\overrightarrow{z_2}$$
$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{B_1} = -\gamma.\overrightarrow{x_2} + \alpha.\overrightarrow{z_2}$$
$$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{B_1} = -\alpha.\overrightarrow{y_2} + \beta.\overrightarrow{x_2}$$

On peut donc écrire les dérivées des vecteurs de la base B_2en fonction des vecteurs de base de B_2 grâce à un même vecteur multiplicatif $\vec{\Omega}(B_2/B_1) = \alpha.\overrightarrow{x_2} + \beta.\overrightarrow{y_2} + \gamma.\overrightarrow{z_2}$:

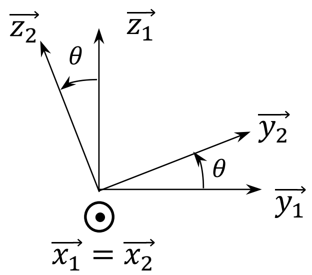
$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right]_{B_1} = \vec{\Omega}(B_2/B_1) \wedge \overrightarrow{x_2}$$
$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{B_1} = \vec{\Omega}(B_2/B_1) \wedge \overrightarrow{y_2}$$
$$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{B_1} = \vec{\Omega}(B_2/B_1) \wedge \overrightarrow{z_2}$$

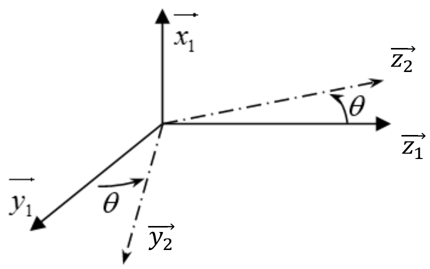
Conclusion (et conséquence) :

Dis autrement, la dérivée d'un vecteur de base $\overrightarrow{x_\iota}$ s'obtient en multipliant ce même vecteur par le vecteur taux de rotation.

Par exemple, on peut écrire immédiatement : $\left[\frac{d\overrightarrow{y_5}}{dt}\right]_{B_2} = \vec{\Omega}(B_5/B_2) \wedge \overrightarrow{y_5}$.

1. Application : rotation entre bases selon un vecteur de base invariant





On démontre que dans ce cas simple le vecteur taux de rotation est : $\boxed{\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \overrightarrow{\Omega(B_2/B_1)} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{x_1}}$

On note aussi la vitesse angulaire : $\omega_{2/1} = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ en rad/s.

<u>Démonstration</u>

On cherche le vecteur $\vec{\Omega}$, inconnu tel que :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{x_2}$$

$\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{y_2}$

$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{z_2}$

Dans le cas de la rotation autour de $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_2}$, décrite précédemment, on a les dérivées de chaque vecteur de base :

$\left[\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = \vec{0} = \left(\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{x_2}\right) \wedge \overrightarrow{x_2}$

$\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = \frac{d\theta}{dt}\,.\overrightarrow{z_2} = \left(\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{x_2}\right) \wedge \overrightarrow{y_2}$

$\left[\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{(B_1)} = -\frac{d\theta}{dt}\,.\overrightarrow{y_2} = \left(\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{x_2}\right) \wedge \overrightarrow{z_2}$

⇨ Par identification on a donc l'inconnue $\vec{\Omega}$: $\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{\Omega(B_2/B_1)}$.