STATIQUE DU SOLIDE - 1ère PARTIE

- Modélisation des actions mécaniques ponctuelles simples
- Principe fondamental de la statique

COURS

Table des matières

1. MODELISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES DE CONTACT PONCTUELLES 4
1.1. Définition 4
1.2. Exemples 4
1.3. Modélisation d'une action mécanique de contact ponctuelle 5
1.4. Changement de point 5
2. FORCE ET MOMENT : ECLAIRAGE 5
2.1. Force 5
2.2. Moment 6
2.2.1. Définition 6
2.2.2. Bras de levier 6
2.2.3. Produit vectoriel contre bras de levier 6
2.2.4. Cas de nullité du moment d'une force 7
2.2.5. Couple de forces 7
2.2.6. Ordres de grandeur de couples (ou moment) 8
2.3. Les quatre types de torseurs d'action mécanique possibles 8
3. TORSEUR DES ACTIONS MECANIQUES TRANSMISSIBLES PAR UNE LIAISON 9
3.1. Qu'est-ce que le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison ? 9
3.2. Exemple de la liaison sphère cylindre 9
3.3. Exemple de la liaison appui plan 10
3.4. Tableau du torseur des actions mécaniques transmissible de chaque liaison (voir annexe) 10
3.5. Cas fréquent du moment selon l'axe d'une liaison pivot 11
4. PROBLÈME PLAN 11
5. ISOLEMENT D'UN ENSEMBLE DE SOLIDES – ACTIONS MÉCANIQUES EXTÉRIEURES 11
6. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE 12
6.1. Enoncé du principe fondamental de la statique 12
6.2. Les deux théorèmes découlant du PFS 12
6.3. Cas d'un ensemble subissant deux glisseurs 13
6.4. Résolution d'un problème de statique : nombre d'inconnues / équations 13
6.5. Exemple complet de résolution par le PFS 14

<u>Illustration 1ère de couverture</u> : barrage de Couesnon (Mont Saint Michel)
Le barrage, construit en 2009, utilise la force des eaux mêlées de la marée et du fleuve Couesnon pour éviter l'ensablage du Mont Saint Michel prévu à l'horizon 2040. Cet ouvrage technologique est dimensionné pour supporter les efforts hydrodynamiques considérables !

Limite du cours : ce cours traite de la modélisation des actions mécaniques de contact ponctuelles sans frottement.

Les cas du frottement et des charges réparties seront abordés dans la partie 2 du cours de statique.

1. MODELISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES DE CONTACT PONCTUELLES

1.1. Définition

Une action mécanique appliqué à un solide est un phénomène qui :

- Permet l'équilibre de ce solide
- Peut modifier l'équilibre de ce solide
- Peut déformer ce solide

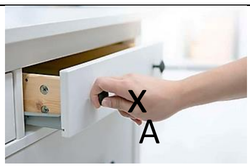
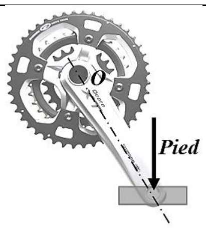
En statique, seul le premier cas nous intéresse. Les deux autres cas sont étudiés en dynamique et résistance des matériaux.

Il existe :

- des actions mécaniques de contact (solide contre solide, liaisons)
- des actions mécaniques à distance (pesanteur, champs magnétique/électrostatique)

Une action mécanique se modélise par **un torseur des actions mécaniques**.

1.2. Exemples

		Torseur	
Main qui tire un tiroir		$\{\mathcal{F}(main \rightarrow tiroir)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F(m \rightarrow t)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$	Glisseur
Deux mains qui tournent un volant		$\{\mathcal{F}(2mains \rightarrow volant)\} = {}_*\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{Bmatrix}$	Couple
Pied sur le pédalier d'un vélo		$\{\mathcal{F}(pied \rightarrow pédalier)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F(p \rightarrow péd)} \\ \overrightarrow{M_O(p \rightarrow péd)} \end{Bmatrix}$	Glisseur

1.3. Modélisation d'une action mécanique de contact ponctuelle

C'est le cas le plus simple. Une action mécanique de contact est la conséquence du contact entre deux solides indéformables. On considère cette action mécanique concentrée en un point. On parle donc d'action mécanique de contact ponctuelle.

Le torseur de l'action mécanique d'un solide S_1 sur un solide S_2 se définit comme cela :

Résultante du torseur : **force en N**

$$\{\mathcal{F}(S_1 \rightarrow S_2)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \overrightarrow{M_A}(S_1 \rightarrow S_2) \end{Bmatrix}$$

Moment du torseur : **en Nm**

Notation usuelle des coordonnées :

$$\{\mathcal{F}(i \rightarrow j)\} = \left| \begin{array}{l} \vec{R}(i \rightarrow j) = \\ \\ \overrightarrow{M_A}(i \rightarrow j) = \end{array} \right.$$

1.4. Changement de point

Le moment de l'action mécanique dépend du point d'expression A.

Si on vout exprimer l'action mécanique en un autre point B :

Le torseur s'écrit alors :

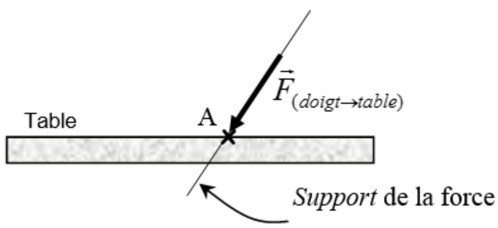
$$\{\mathcal{F}(S_1 \rightarrow S_2)\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \overrightarrow{M_B}(S_1 \rightarrow S_2) \end{Bmatrix}$$

2. FORCE ET MOMENT : ECLAIRAGE

2.1. Force

Pensez à votre doigt posé sur la table. Une force $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ est modélisée par un vecteur et un point d'application :

- Direction
- Sens
- Norme
- Point d'application



Unité : le Newton (N), parfois le daN (décaNewton), voire le kN (kiloNewton)

La réunion du point et de la direction forme une droite appelée support de la force.

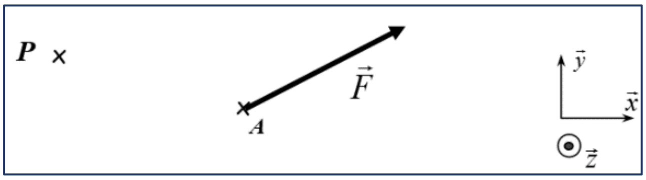
On dit de manière imagée que la force $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ entraîne une tendance à la translation de S_2 par rapport à S_1. Attention c'est juste une tendance car il y a équilibre sans mouvement !

2.2. Moment

2.2.1. Définition

Le moment $\overrightarrow{M_P}(S_1 \rightarrow S_2)$ entraîne une tendance à la rotation de S_2 par rapport à S_1 autour du point P. On dit de manière simple et imagée que le moment représente « l'envie de tourner » de S_2 par rapport à S_1 .

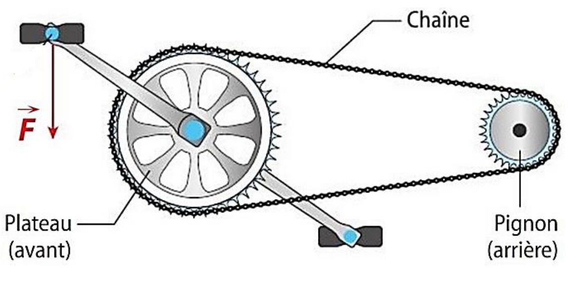
Le moment le plus simple à exprimer est le moment d'une force ponctuelle :



2.2.2. Bras de levier

Le bras de levier de la force $\vec{F}$ par rapport au point P est la distance d entre le point P et le support de la force $\vec{F}$. Le moment peut s'écrire avec le bras de levier :

$$\overrightarrow{M_P}(\vec{F}) = \pm \|\vec{F}\| \times d \times \vec{z}$$



2.2.3. Produit vectoriel contre bras de levier

L'utilisation du bras de levier permet d'éviter le calcul du produit vectoriel mais nécessite la prévision de la tendance au sens de rotation, le calcul du bras de levier, la connaissance de l'axe.

Le calcul du moment avec le bras de levier est donc réservé aux cas simples.

Au moindre doute : utiliser le produit vectoriel qui est sans ambiguïté !

2.2.4. Cas de nullité du moment d'une force

Rappelons le moment d'une force $\vec{F}$ au point P : $\overrightarrow{M_P}(\vec{F}) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F}$

Le moment est nul si :

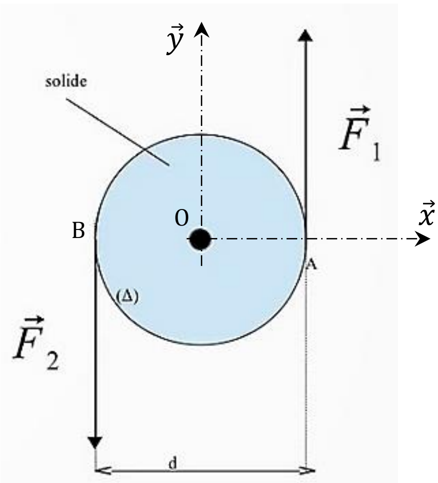
-

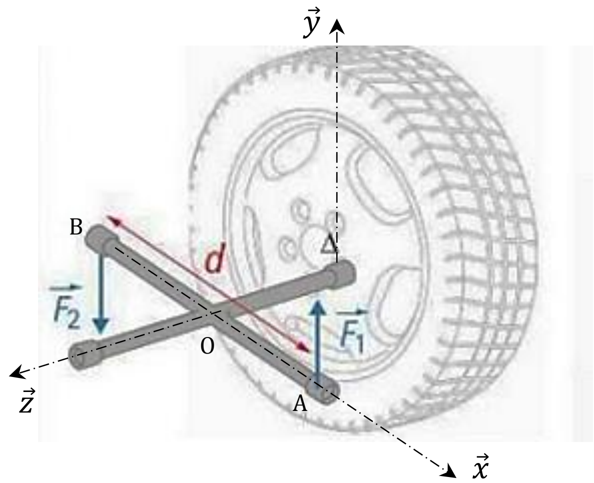
-

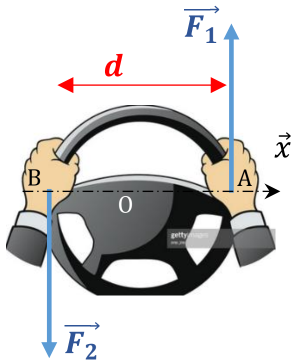
-

2.2.5. Couple de forces

Considérons la réunion de deux forces de **même norme** et **opposées** $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, tel que $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$. Trois exemples sont donnés ci-dessous.







Calculons le moment résultant de chaque force.

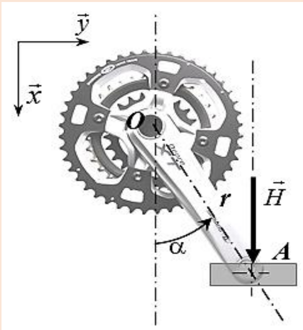
Nous obtenons le torseur : $\{\mathcal{F}\} =$

2.2.6. Ordres de grandeur de couples (ou moment)

Moteur à combustion d'une petite voiture ou moto sportive : 120 Nm
Desserrage d'un écrou de roue de voiture : autour de 50 Nm
Moteur à combustion de scooter : 5 Nm
Porte que vous ouvrez : moins de 1Nm
Clef allen quand vous serrez une vis : 2 Nm
Moteur électrique du bras Maxpid (labo de SII) : 0,2 Nm

Je me teste

Calculer le moment de la force $\vec{H}$ par rapport au centre du pédalier O en fonction de r et α.



2.3. Les quatre types de torseurs d'action mécanique possibles

Le torseur nul : $\{0\} = {}_{\forall M}\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$

Le torseur glisseur : $\{F\} = {}_{A}\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$ = vecteur force positionné sur un point d'application

Le torseur couple : $\{\mathcal{C}\} = {}_{\forall M}\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{C}\end{Bmatrix}$ = invariant dans l'espace, quel que soit le point M

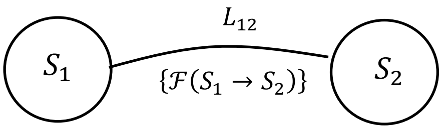
Le torseur quelconque : $\{F\} = {}_{A}\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_A}\end{Bmatrix}$ avec $\vec{R}.\overrightarrow{M_A} \neq 0$ (ni couple, ni glisseur)

Démonstration de l'invariance spatiale du torseur couple $\{\mathcal{C}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{Bmatrix}$.

3. TORSEUR DES ACTIONS MECANIQUES TRANSMISSIBLES PAR UNE LIAISON

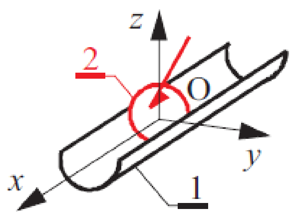
3.1. Qu'est-ce que le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison ?

Soit le solide S_1 en liaison L_{12} avec le solide S_2 . Les différents moments et forces selon chacune des trois directions de l'espace que le solide S_1 peut transmettre au solide S_2 , se rangent dans un torseur.



La liaison L_{12} autorise certains degrés de liberté : la transmission des efforts de S_1 vers S_2 n'est alors pas possible puisqu'il y a mouvement.
La liaison L_{12} interdit certains degrés de liberté : la transmission des efforts de S_1 vers S_2 est alors possible puisqu'il y a obstacle donc poussée de S_1 sur S_2.

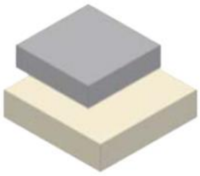
3.2. Exemple de la liaison sphère cylindre

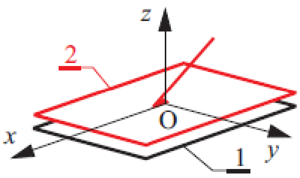


La sphère 2 possède les trois rotations selon $\vec{x}, \vec{y}\ et\ \vec{z}$ par rapport à 1. 2 ne transmet donc aucun moment à 1 selon ces trois axes : $\overrightarrow{M_O}(2 \to 1) = \vec{0}$ (« ça tourne dans le vide » autour du point O !)
La sphère 2 possède une seule translation par rapport à 1, selon $\vec{x}$. Donc 1 ne peut pas transmettre d'effort à 2 selon $\vec{x}$: $\vec{R}(2 \to 1).\vec{x} = 0$. En revanche, « ça bloque » selon $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Donc 2 peut transmettre un effort à 1 selon $\vec{y}$ et $\vec{z}$: $\vec{R}(2 \to 1) = Y_{21}.\vec{y} + Z_{21}.\vec{z}$.

Conclusion : le torseur des actions mécaniques transmissibles de 1 vers 2 s'écrit

3.3. Exemple de la liaison appui plan





Le plan 2 possède une rotation selon $\vec{z}$ par rapport à 1. 2 ne transmet donc aucun moment à 1 selon l'axe $\vec{z}$: $\overrightarrow{M_O}(2 \to 1).\vec{z} = 0$. En revanche 2 ne peut pas tourner par rapport à 1 selon l'axe $\vec{x}$, « ça bloque » à cause de la forme plan sur plan. Donc 2 peut transmettre un moment à 1 selon $\vec{x}$: $\overrightarrow{M_O}(2 \to 1).\vec{x} \neq 0$. Idem selon $\vec{y}$.

Même raisonnement pour la translation impossible selon $\vec{z}$: $\vec{R}(2 \to 1).\vec{z} \neq 0$

Le torseur des actions transmissibles de 1 sur 2 s'écrit donc :

3.4. Tableau du torseur des actions mécaniques transmissible de chaque liaison (voir annexe)

Règle d'or : on retiendra que lorsque la liaison <u>interdit un degré de liberté</u> selon une direction, elle <u>autorise</u> la transmission d'une action mécanique selon cette direction.

Si on différentie force et moment, cela s'énonce ainsi :

- Si une translation est bloquée selon une direction, une force peut être transmise.
- Si une rotation est bloquée selon une direction, un moment peut être transmis.

Dans le cas de la liaison parfaite : quand le degré de liberté est autorisé, il n'y a pas transmission d'action mécanique.

Remarque : vous rencontrerez peut être l’appellation « torseur statique » d’une liaison. Cette appellation est à éviter… même si elle est plus rapide à énoncer.

3.5. Cas fréquent du moment selon l’axe d’une liaison pivot

On retiendra qu’une liaison pivot ne transmet pas de moment selon son axe.

On retiendra qu’une liaison sphérique ne transmet pas de moment pour tous axes passant par son centre.

4. PROBLÈME PLAN

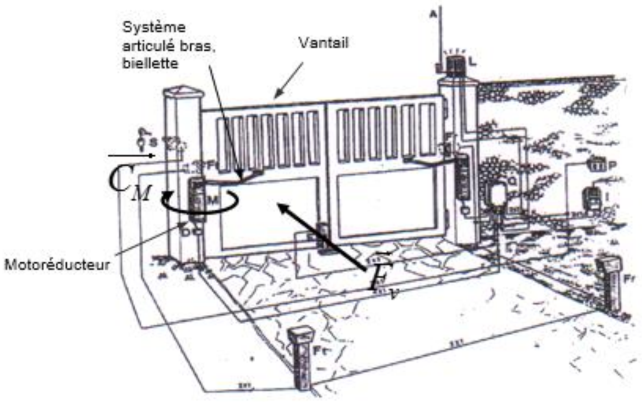
Si le problème est plan, de plan $(\vec{y},\vec{z})$ par exemple, tous les torseurs intervenant dans le problème, quels qu’ils soient, se simplifient de la manière suivante :

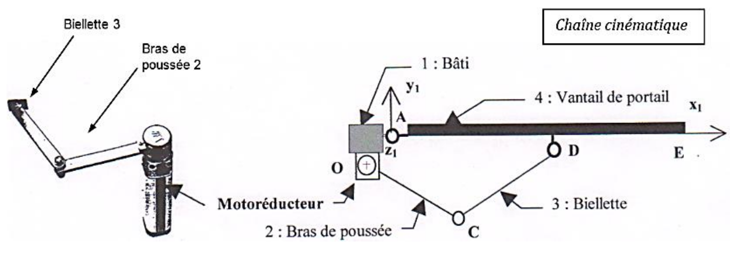
$$\{\mathcal{F}\} = {}_{P}\begin{Bmatrix} X.\vec{x}+Y.\vec{y}+Z.\vec{z} \\ L.\vec{x}+M.\vec{y}+N.\vec{z} \end{Bmatrix} \rightarrow$$

Cas où le problème est plan, de plan $(\vec{z},\vec{x})$:

5. ISOLEMENT D’UN ENSEMBLE DE SOLIDES – ACTIONS MÉCANIQUES EXTÉRIEURES

Prenons l’exemple d’un système grand public bien connu et équipant le laboratoire de SI : le portail à deux vantaux motorisés.





<u>Graphe des liaisons en vue d’une étude statique</u>

<u>Isolons le bras de poussée 2 et faisons le bilan des actions mécaniques extérieures</u>

6. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

6.1. Enoncé du principe fondamental de la statique

Si un système S est en équilibre, il existe un repère galiléen R_g dans lequel le torseur des actions mécaniques extérieures à S est nul.

6.2. Les deux théorèmes découlant du PFS

Théorème de la résultante :

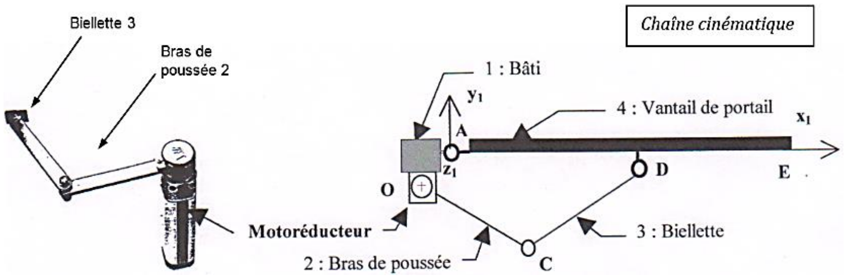
Théorème du moment :

6.3. Cas d'un ensemble subissant deux glisseurs

<u>Théorème</u>

Soit un ensemble de solides, ou un solide unique, en équilibre dans R_g soumis à deux glisseurs $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{R_B}$ s'appliquant aux points A et B. Les vecteurs force $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{R_B}$ possèdent les propriétés suivantes :

- Ils ont la même
- Ils ont le même
- Ils sont de sens



6.4. Résolution d'un problème de statique : nombre d'inconnues / équations

<u>Problème spatial</u> :

3 équations de résultantes, 3 équations de moment => $\boxed{\text{6 équations par isolement}}$

<u>Problème plan</u>, de plan $(\vec{z}, \vec{x})$ par exemple :

$$\left.\begin{array}{l}\text{2 équations de résultantes, selon } \vec{z} \text{ et } \vec{x} \\ \text{1 équation de moments selon } \vec{y}\end{array}\right\} \boxed{\text{3 équations par isolement}}$$

Si le nombre d'inconnues statiques est inférieur ou égal au nombre d'équations indépendantes de la statique :

Problème dit « isostatique » donc totalement résolvable.

Si le nombre d'inconnues statiques est strictement supérieur au nombre d'équations indépendantes de la statique :

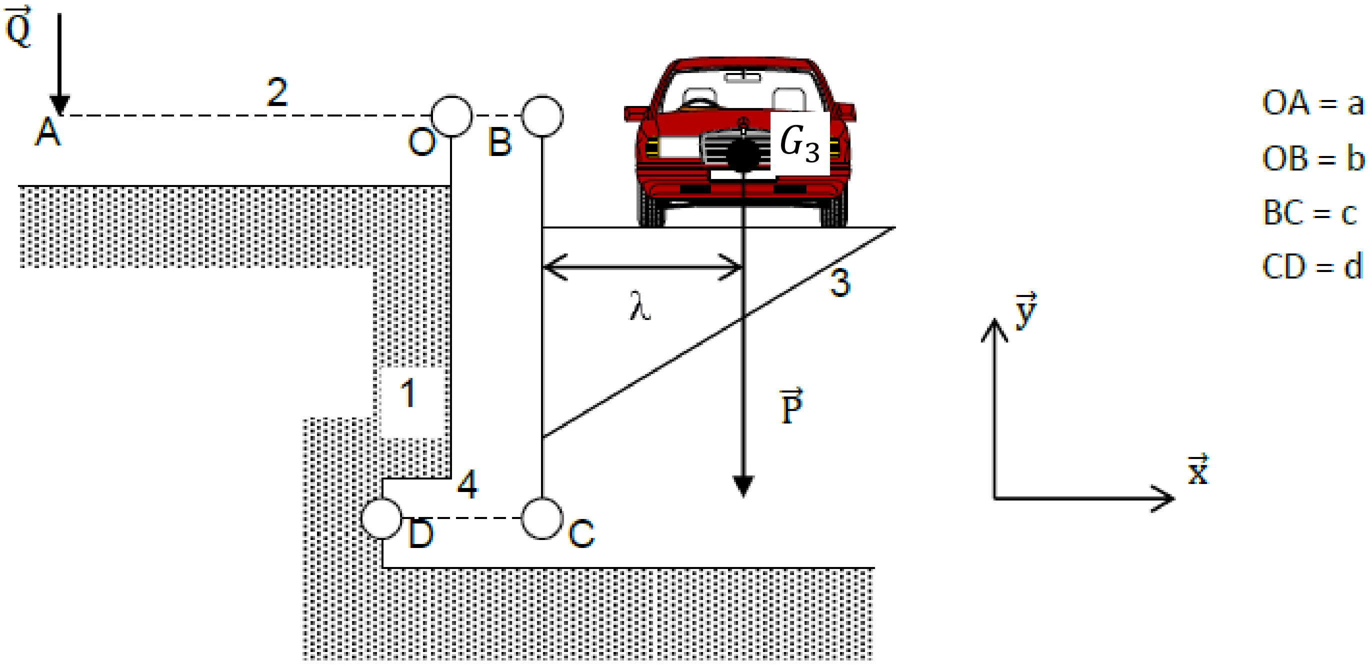
Problème dit « hyperstatique » donc pas totalement résolvable pour certaines inconnues.

6.5. Exemple complet de résolution par le PFS

Un dispositif utilisé pour peser des véhicules est représenté par le schéma ci-dessous.

Le véhicule, de poids $\vec{P} = -P\vec{y}$, est placé sur le plateau 3. La position de son centre de gravité est définie par le paramètre λ. A l'extrémité A du levier 2 est placée une charge de poids $\vec{Q} = -Q\vec{y}$ équilibrant le poids $\vec{P}$.

L'objet de l'étude est de lier $\vec{Q}$ à $\vec{P}$ afin de déterminer le gain de cet appareil de mesure, et de vérifier que la mesure de $\vec{Q}$ ne dépend pas de la position du véhicule sur le plateau 3, donc ne dépend pas du paramètre λ.



<u>Hypothèses</u> :

- le problème est supposé plan, de plan $(O,\vec{x},\vec{y})$,
- la masse des différentes pièces de la balance n'est pas prise en compte, car la balance est équilibrée à la conception et fabrication.
- les liaisons pivots en O, B, C et D sont supposées parfaites.

<u>Notation des torseurs d'action mécanique</u> :

$$\{\mathcal{F}(i \to j)\} = {}_P\begin{Bmatrix} X_{ij}.\vec{x} + Y_{ij}.\vec{y} + Z_{ij}.\vec{z} \\ L_{ij}.\vec{x} + M_{ij}.\vec{y} + N_{ij}.\vec{z} \end{Bmatrix} \qquad \left| \begin{array}{l} \vec{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{i} \to \boldsymbol{j}) = X_{ij}.\vec{x} + Y_{ij}.\vec{y} + Z_{ij}.\vec{z} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{M_P}}(\boldsymbol{i} \to \boldsymbol{j}) = L_{ij}.\vec{x} + M_{ij}.\vec{y} + N_{ij}.\vec{z} \end{array} \right.$$

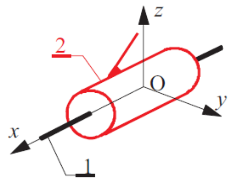
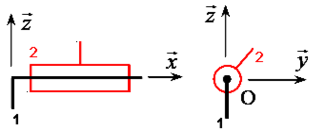
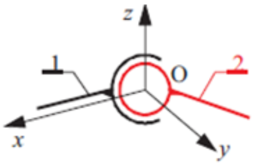
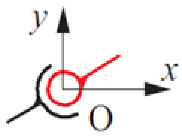
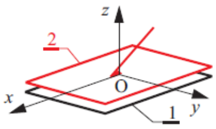
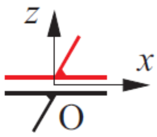
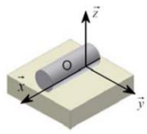
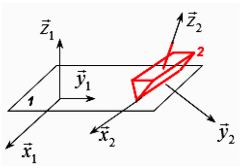
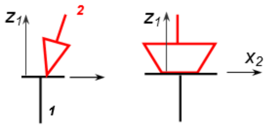
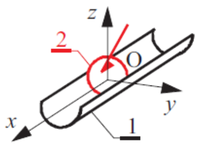
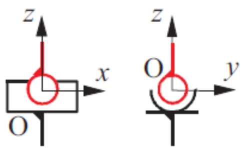
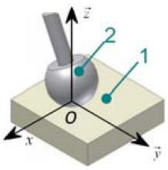
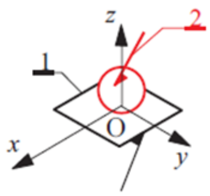
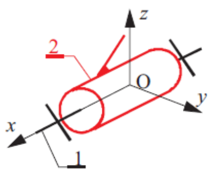
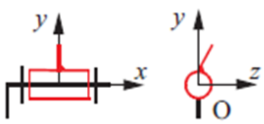
<u>Objectif</u> : trouver la relation Q=f(P) et vérifier qu'elle ne dépend pas de λ.

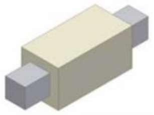
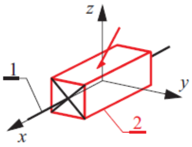
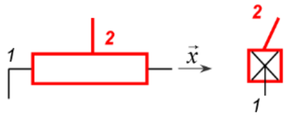
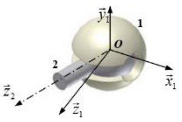
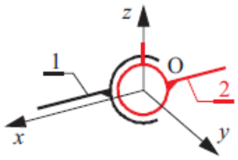
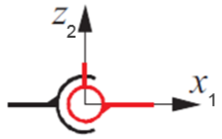
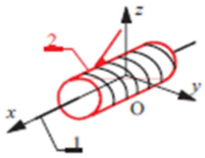
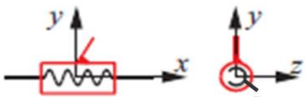
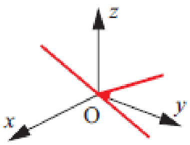
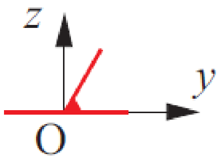
<u>Application numérique</u> « pour voir » : masse véhicule = 3 tonnes, $a = 2{,}5m$, $b = 0{,}5m$

FIN DU COURS

ANNEXE 1

LIAISONS : TORSEUR DES ACTIONS MECANIQUES TRANSMISSIBLES

Liaison : nom et illustration	Caract. géométriq.	Schéma spatial (3D)	Schéma plan (2D)	Torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison
$\mathcal{L}$ pivot glissant (-4) 	Axe $(O, \vec{x})$			$\{\mathcal{F}(2 \rightarrow 1)\} =$ Dom.de Validité : $\forall A \in axe\ liaison\ \ (O, x)$
$\mathcal{L}$ sphérique (-3) 	Centre O			$\{\mathcal{F}(2 \rightarrow 1)\} =$ Dom.de Validité : $O\, = centre\ de\ la\ liaison$, base quelconque
$\mathcal{L}$ appui plan (-3) 	Normale $\vec{z}$			$\{\mathcal{F}(2 \rightarrow 1)\} =$ Dom.de Validité : $\forall M\ de\ l'espace$
$\mathcal{L}$ cylindre plan (-2) 	- Normale $\vec{z}$ - Axe $(O, \vec{x})$			$\{\mathcal{F}(2 \rightarrow 1)\} =$ Dom.de Validité : $\forall O \in$ *plan passant par la ligne de contact et perpendiculaire au plan de la liaison*
$\mathcal{L}$ sphère cylindre (-2) 	- Centre O - Axe $(O, \vec{x})$			$\{\mathcal{F}(2 \rightarrow 1)\} =$ Dom.de Validité : *O centre de la sphère*
$\mathcal{L}$ sphère plan (-1) 	- Centre O - Normale $\vec{z}$			$\{\mathcal{F}(2 \rightarrow 1)\} =$ Dom.de Validité : $\forall A \in$ *droite normale au plan* (O,z) et *passant le centre de lasphère* O
$\mathcal{L}$ pivot (-1) 	Axe $(O, \vec{x})$			$\{\mathcal{F}(2 \rightarrow 1)\} =$ Dom.de Validité : $\forall A \in axe\ de\ la\ liaison\ (O, z)$

$\mathcal{L}$ glissière (-1) 	Direction $\vec{x}$			$\{\mathcal{F}(2\to 1)\}$ $=$ Dom.de Validité : $\forall M\ de\ l'espace$
$\mathcal{L}$ sphérique à doigt (-4) 	- centre O - plan de normale $\vec{y_1}$ - axe de doigt $(O,\vec{z_2})$			$\{\mathcal{F}(2\to 1)\} =$ Dom.de Validité : $O\ centre\ de\ la\ sphère$
$\mathcal{L}$ hélicoïdale (-1) 	Axe $(O,\vec{x})$			$\{\mathcal{F}(2\to 1)\}$ $L_{21}=\frac{\pm p}{2\pi}.X_{21}$ (pas p en m/tr). « -p » si hélice à droite. Dom.de Validité : $\forall A \in$ $axe\ de\ la\ liaison\ (O,z)$
$\mathcal{L}$ encastrement (-6)				$\{\mathcal{F}(2\to 1)\}=\{0\}$ Dom.de Validité : $\forall M\ de\ l'espace$