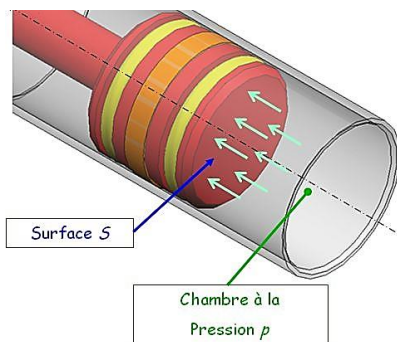


STATIQUE DU SOLIDE - 2^{ème} PARTIE

Modélisation des actions mécaniques particulières :

- Poids
- Action mécanique élastique
- Couple moteur
- Frottement sec
- Frottement visqueux
- Trainée (aéro/hydrodynamique)
- Charges réparties



COURS

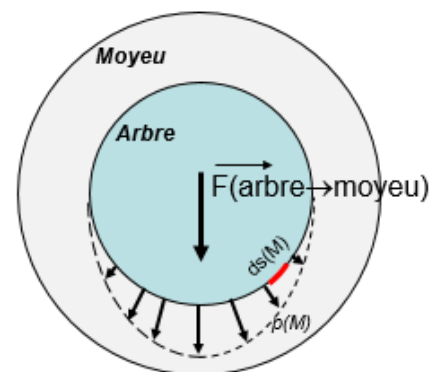


Table des matières

1. PESANTEUR.....	3
2. ACTION MECANIQUE ELASTIQUE	3
3. STATOR SUR ROTOR MOTEUR (« Couple moteur »)	3
4. FROTTEMENT VISQUEUX.....	3
5. FORCE DE TRAINÉE (Forces hydrodynamique / aérodynamique).....	4
6. MODELISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES DE FROTTEMENT SEC	5
6.1. Introduction - Aspect technologique	5
6.2. Lois de Coulomb pour le frottement sec solide/solide	5
6.2.1. Modèle de Coulomb pour le phénomène de frottement sec entre solides indéformables	5
6.2.2. Cas de l'adhérence entre les solide (1) et (2) (immobilité)	6
6.2.3. Un éclairage sur les coefficients d'adhérence et de frottement de glissement 6	6
6.2.4. Et le torseur de la liaison, que devient-il ?	7
6.2.5. Je me teste : contact pneu/sol pour un véhicule stationné en pente	7
7. CHARGES REPARTIES	8
7.1. Etude d'un cas simple : poutre bâtie dans un mur	8
7.1.1. Calcul du torseur d'AM du 2 sur 1 sur la partie supérieure de l'encastrement, $\{T_2 \rightarrow 1_{sup}\}$, au point O.....	9
7.1.2. Calcul du torseur d'AM du 2 sur 1 sur la partie inférieure de l'encastrement au point O : $\{T_2 \rightarrow 1_{inf}\}$	9
7.1.3. Application du PFS à 1 permettant de déterminer les pressions maximales P_1 et P_2 en fonction de F , e , L et D	9
7.2. Synthèse : densité de force	9
7.3. Torseur d'une densité surfacique de force	9
7.4. Torseur d'une densité linéique de force	11
7.5. Torseur d'une densité volumique de force (action mécanique à distance)	11

Illustration de la 1^{ère} de couverture : densité surfacique de force huile sur piston d'un vérin, barrage hydraulique (pression hydrostatique), pression de contact dans un palier de guidage (L.Pivot), frein de TGV (4 disques par essieu, application du frottement))

1. PESANTEUR

Pour un solide S donné, l'action mécanique de pesanteur s'exerce sur chaque élément de matière dm au point Q de S . Le poids de dm est $dm \cdot \vec{g}$. On définit le centre de gravité G de S de la manière suivante : au point G la somme des moments des poids de chaque élément de matière est nul :

$$\int_{(S)} \overrightarrow{GQ} \wedge (\vec{g} \cdot dm) = \vec{0}$$

Par conséquent le poids peut se modéliser par un torseur de type glisseur au point G , centre de gravité de S , de masse M :

$$\{F(pes \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} M \cdot \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

2. ACTION MECANIQUE ELASTIQUE

C'est la force exercée par un ressort hélicoïdal par exemple (il existe d'autres types de ressort). Cette force est proportionnelle à l'écrasement/élongation du ressort par rapport à la longueur à vide l_0 (= longueur « quand on sort le ressort du tiroir » quoi !).



$$F(\text{ressort} \rightarrow \text{extérieur}) = -k(l - l_0) = -kx$$

k est la raideur du ressort en N/m .

La raideur d'un ressort de stylo a un ordre de grandeur de $10 N/m$.

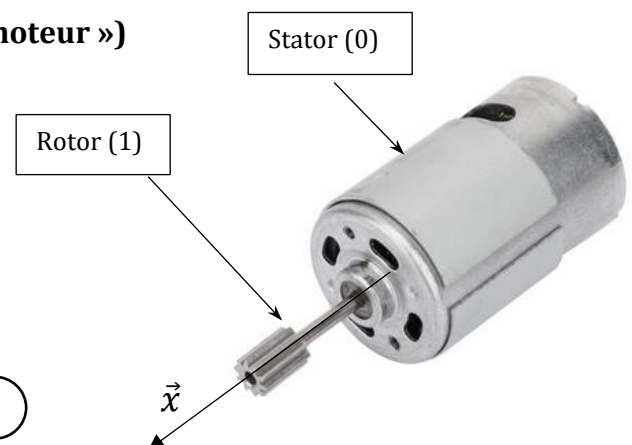
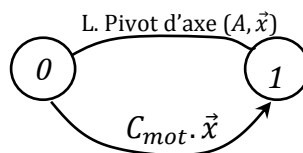
La raideur d'un ressort d'amortisseur automobile a un ordre de grandeur de $10^5 N/m$.

3. STATOR SUR ROTOR MOTEUR (« Couple moteur »)

Les forces de Laplace exercées par l'inducteur du stator (0) sur l'induit du rotor (1) génèrent un couple résultant de (0) sur (1) selon l'axe de rotation $\vec{x}$ de la liaison pivot de (1) dans (0).

Le torseur de l'action mécanique à distance de (0) sur (1) est donc :

$$\{F(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{mot} \cdot \vec{x} \end{array} \right\}_*$$



4. FROTTEMENT VISQUEUX

Il est la conséquence de la lubrification des paliers de guidage, du laminage/brassage de l'air lors du mouvement des pièces mécaniques...

Il est proportionnel à la vitesse de déplacement relatif des pièces mécaniques. Le frottement visqueux, comme tout frottement, s'oppose au mouvement.

Pour un mouvement de translation :

$$\vec{F}_v(1 \rightarrow 2) = -\lambda_v \cdot \vec{V}(2/1)$$

λ_v est le coefficient de frottement visqueux en Ns/m .

Pour un mouvement de rotation :

$$C_v(1 \rightarrow 2) = -f_v \cdot \omega(2/1)$$

f_v est le coefficient de frottement visqueux en Nm/s .

5. FORCE DE TRAINÉE (Forces hydrodynamique / aérodynamique)

La force résultant de la pénétration d'un solide dans un fluide (air, eau...) et s'opposant à la vitesse relative solide/fluide est appelée trainée.

Elle s'oppose au déplacement relatif du solide par rapport au fluide.

La résultante des efforts élémentaires de trainée sur la surface pénétrante s'applique en un point Q dont la localisation n'est pas « immédiate ». L'action mécanique de trainée peut donc être modélisée par un glisseur :

$$\{F(\text{fluide} \rightarrow \text{solide})\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\text{fluide} \rightarrow \text{solide}) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_Q$$

La norme de la force de trainée $\vec{F}(\text{fluide} \rightarrow \text{solide})$ est :

$$\|\vec{F}(\text{fluide} \rightarrow \text{solide})\| = \frac{1}{2} \rho_{\text{fluide}} \cdot S \cdot C_x \cdot [\vec{V}(\text{solide/fluide})]^2$$

N ← kg/m^3 ← m/s ← m^2 ← sans dimension

ρ_{fluide} : masse volumique du fluide en kg/m^3

C_x : Coefficient de trainée (encore appelée facteur de forme) sans dimension. Voir le tableau ci-contre.

S : surface projetée de la forme sur le plan orthogonal au vecteur vitesse $\vec{V}(\text{solide/fluide})$. S est aussi appelé « maître couple ». Ne me demandez pas l'origine de cette appellation bien peu pédagogique et incompréhensible... personne ne l'a jamais vraiment comprise ! Son unité est le m^2 .

Corps 3D		Coefficient de trainée
Sphère		0,47
Demi-sphère		0,42
Cône 60° d'angle au sommet		0,50
Cube		1,05
Cube à 45°		0,80
Long cylindre L/D = 2		0,85
Court cylindre L/D = 1		0,91
Corps de moindre trainée		0,04
Demi-corps de moindre trainée		0,09

Coefficients de trainée frontaux

Exemple : comparer la trainée d'une voiture citadine ($C_x=0,3$; surface frontale $2,5m^2$) à celle d'un poids lourd ($C_x=1$; surface frontale $7m^2$)... pour une vitesse $100 km/h$.

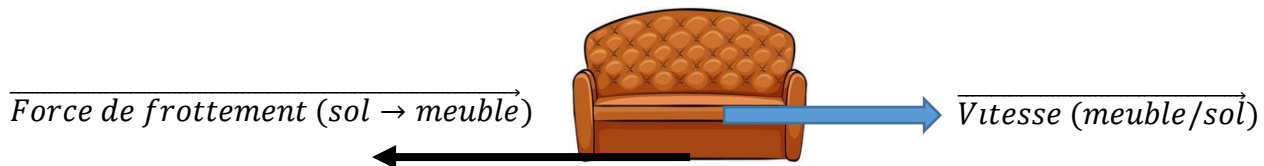
6. MODELISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES DE FROTTEMENT SEC

6.1. Introduction - Aspect technologique

Le phénomène de frottement prend naissance au contact entre solides. Il est la cause d'un effort s'exerçant de manière **tangentielle** entre les surfaces.

Alors que, sans frottement, les actions mécaniques de contact dans les liaisons ne se transmettent que perpendiculairement aux surfaces de contact (liaisons parfaites, transmission des actions mécanique par obstacle).

Le frottement ajoute donc une composante tangentielle à la composante normale déjà présente sans frottement.



Le phénomène de frottement :

- peut être un **avantage**. Il est alors recherché : frein, embrayage, contact chaussure/sol, pneu/route, préhension de votre stylo entre vos doigts...
- peut être un **inconvenient**. Il est alors évité : résistance au mouvement dans les guidages (pivots, glissières...) entraînant des pertes énergétiques, déplacement d'un meuble sur le sol en le poussant, etc.

6.2. Lois de Coulomb pour le frottement sec solide/solide

6.2.1. Modèle de Coulomb pour le phénomène de frottement sec entre solides indéformables

Les lois de Coulomb définissent l'action de contact entre solides quand il y a frottement.

On considère le contact ponctuel au point I entre les solides indéformables 1 et 2.

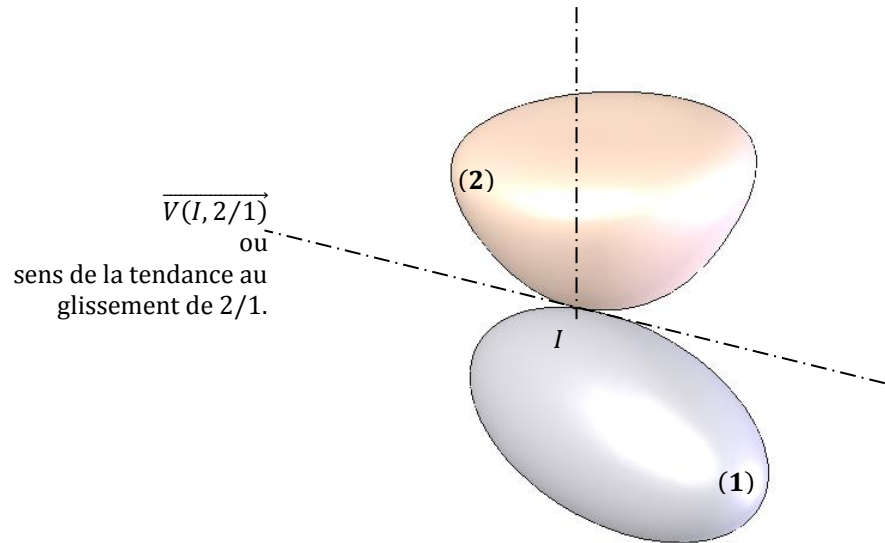
Le plan de contact (P) est défini comme le plan tangent commun à 1 et 2 au point I.

L'action mécanique de contact est modélisée par un vecteur force $\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}$ passant par le point de contact I (glisseur).

Le phénomène de frottement fait apparaître une composante tangentielle $\overrightarrow{T(1 \rightarrow 2)}$ au point de contact I. Cette composante vient s'ajouter à la composante normale $\overrightarrow{N(1 \rightarrow 2)}$ qui existe sans frottement.

- Composante normale $\overrightarrow{N(1 \rightarrow 2)}$: normale au plan de contact (P) en I. Orientée A L'INTERIEUR DE 2. Une action mécanique de contact est forcément répulsive.
- Composant tangentielle $\overrightarrow{T(1 \rightarrow 2)}$: contenue dans le plan de contact (P). $\overrightarrow{T(1 \rightarrow 2)}$ nulle si pas de frottement. $\overrightarrow{T(1 \rightarrow 2)}$ est OPPOSÉE au vecteur vitesse au point I : $\overrightarrow{V(I, 2/1)}$.

- Norme de $\overrightarrow{T(1 \rightarrow 2)} : \overrightarrow{T(1 \rightarrow 2)} = f \cdot \overrightarrow{N(1 \rightarrow 2)}$. f = coefficient de frottement entre les solides 1 et 2.



6.2.2. Cas de l'**adhérence** entre les solide (1) et (2) (immobilité)

Il y a adhérence entre les solides 1 et 2 quand 1 et 2 sont immobiles l'un par rapport à l'autre : $\overrightarrow{V(I, 2/1)} = \vec{0}$. Le problème se pose donc pour définir la direction et le sens de l'action tangentielle $\overrightarrow{T(1 \rightarrow 2)}$. On parle donc de la « tendance au glissement » :

- $\overrightarrow{T(1 \rightarrow 2)}$ est opposée à la tendance au glissement de 2/1.
- $\|\overrightarrow{T(1 \rightarrow 2)}\| < f \cdot \|\overrightarrow{N(1 \rightarrow 2)}\|$ (il n'y a pas égalité comme dans le cas du glissement entre surfaces)

S'il y a « adhérence limite » ou « limite du glissement », c'est-à-dire la valeur de $\|\overrightarrow{T(1 \rightarrow 2)}\|$ pour laquelle on bascule de la vitesse nulle (adhérence) au frottement (mouvement) : $\|\overrightarrow{T(1 \rightarrow 2)}\| = f \cdot \|\overrightarrow{N(1 \rightarrow 2)}\|$

Remarque : dans le modèle de Coulomb les effets du frottement ne dépendent pas de l'étendu des surfaces en contact.

6.2.3. Un éclairage sur les coefficients d'adhérence et de frottement de glissement

Le coefficient de frottement dépend :

- **des matériaux** en contact (caoutchouc sur route ça résiste plus à l'avancement que acier sur acier !) : $f_{\text{caoutchouc/bitume}} > f_{\text{acier/acier}}$

- **de l'état de surface** des solides en contact (surfaces de contact lisses => ça glisse mieux que qu'entre surfaces rugueuses)
- **de la lubrification** éventuelle

Le tableau ci-dessous donne des ordres de grandeur moyen de coefficients de frottement en fonction des matériaux. Ils sont en fait très variables selon les états de surface et la lubrification éventuelle.

Couple de matériaux	Coefficient de frottement f	Coefficient d'adhérence $f_{adhérence}$
Acier/acier	0,1	0,2
Acier/bronze	0,15	0,2
Acier/garniture frottante de freins ou embrayage (« Ferodo® »)	0,3	0,4
Acier/Téflon (PTFE)	0,1	0,15
Pneu/route	0,6	0,8

On remarquera que le coefficient d'adhérence est toujours supérieur au coefficient de frottement. Je l'indique en petits caractères dans ce présent cours car en pratique on considère les deux coefficients égaux.

6.2.4. Et le torseur de la liaison, que devient-il ?

S'il y a frottement entre 1 et 2 la liaison 2/1 n'est plus parfaite. Prenons le cas d'un contact « ponctuel », soit une liaison sphère plan, de centre I de normale $\vec{y}$.

Torseur d'action mécanique transmissible de 1 sur 2 :

Liaison parfaite :
$$\{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} Y_{12} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$$

Liaison avec frottement :
$$\{\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} \cdot \vec{x} + Y_{12} \cdot \vec{y} + Z_{12} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$$

Une composante est apparue dans le plan tangent $(\vec{x}, \vec{y})$. Il faudra ensuite l'orienter opposée à la vitesse relative comme vue dans les lois de Coulomb.

6.2.5. Je me teste : contact pneu/sol pour un véhicule stationné en pente

Le frein de stationnement (« frein à main ») actionné par le conducteur agit classiquement sur les roues arrière. Les roues avant sont laissées libres en rotation.

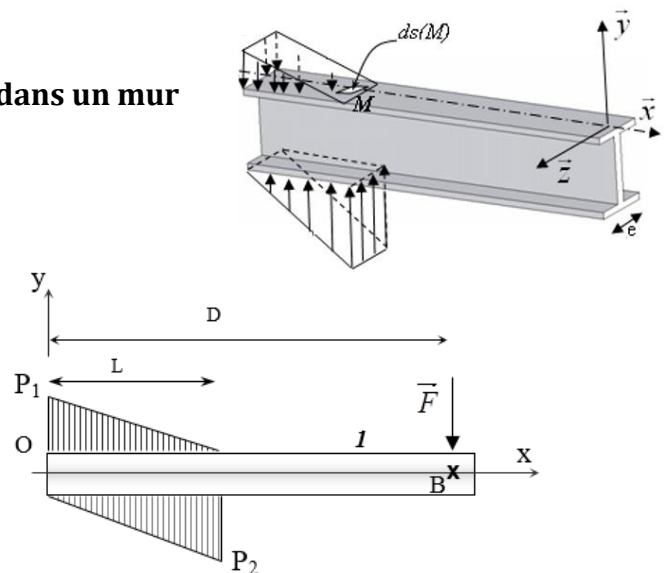
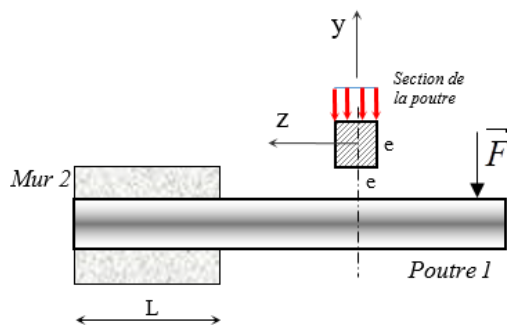
Représenter les composantes normale et tangentielle au point de contact roue/sol sur les roues avant et arrière.

Remarque le coefficient d'adhérence pneu/bitume : $f_{pneu/bitume} = 0,7$.



7. CHARGES REPARTIES

7.1. Etude d'un cas simple : poutre bâtie dans un mur



Une poutre 1 de section carrée est encastree dans un mur en béton 2. Elle est soumise à une charge $\vec{F}$ située à son extrémité B.

On souhaite étudier l'effort qui s'exerce sur la poutre au niveau de l'encastrement. Les appuis plans supérieur et inférieur étant surfaciques, on ne peut pas modéliser l'action mécanique par une force ponctuelle. En outre cette action est variable le long des plans d'appui sur la distance L .

On adopte donc un modèle de type **densité surfacique linéaire** sur la longueur L comme symbolisé sur la figure.

Pour la partie supérieure, la densité surfacique est : $p_1(x) = \frac{P_1}{L}(L - x) > 0$

Avec : $P_1 = p_{1\max} = p_1(x = 0) > 0$

Pour la partie inférieure, la densité surfacique est : $p_2(x) = \frac{P_2}{L}x > 0$

$$P_2 = p_{2\max} = p_2(x=0) > 0$$

Remarque : $p_1(x)$ et $p_2(x)$ ne dépendent pas de $z \Rightarrow p_1(x)$ et $p_2(x)$ constants sur la largeur e de la poutre.

Les grandeurs $p(x)$ sont des pressions en N/m^2 .

Objectif de cette étude : déterminer les pressions maxi P_1 et P_2

- 7.1.1. Calcul du torseur d'AM du 2 sur 1 sur la partie supérieure de l'encastrement, $\{T(2 \rightarrow 1)_{sup}\}$, au point O.
- 7.1.2. Calcul du torseur d'AM du 2 sur 1 sur la partie inférieure de l'encastrement au point O : $\{T(2 \rightarrow 1)_{inf}\}$
- 7.1.3. Application du PFS à 1 permettant de déterminer les pressions maximales P_1 et P_2 en fonction de F , e , L et D .

7.2. Synthèse : densité de force

Le torseur élémentaire de l'action mécanique d'un solide 1 sur un solide 2, conséquence d'une densité de force s'écrit :

$$\{dF(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 2)} \\ \overrightarrow{dM_O(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\} \quad \text{avec : } \overrightarrow{dM_O(1 \rightarrow 2)} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 2)}.$$

$\overrightarrow{dR(1 \rightarrow 2)}$ est la résultante élémentaire s'exerçant de 1 sur 2 exprimé en Newton (N).

$\overrightarrow{dM_O(1 \rightarrow 2)}$ est moment élémentaire s'exerçant de 1 sur 2 en Newton.mètre (Nm).

Selon qu'il s'agisse d'une densité linéique, surfacique, volumique la résultante élémentaire $\overrightarrow{dR(1 \rightarrow 2)}$ a une expression mathématique différente.

7.3. Torseur d'une densité surfacique de force

Dans le cas de densité de force surfacique, la surface commune entre les deux solides 1 et 2 transmet une infinité continue d'actions mécaniques de contact.

$$\overrightarrow{dR(1 \rightarrow 2)} =$$

$$\overrightarrow{dM_O(1 \rightarrow 2)} =$$

Il vient par intégration :

$$\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} =$$

$$\overrightarrow{M_O(1 \rightarrow 2)} =$$

$q_s(M)$ est la densité surfacique au point M , en N/m^2 .

$ds(M)$ est l'élément de surface en m^2 .

$\vec{u}_M$ est un vecteur unitaire au point M sans dimension (le vecteur $\vec{u}_M$ est parfois normal à la surface $ds(M)$).

(S), indiqué sous le signe intégral, est le domaine surfacique d'intégration qui donne les bornes d'intégration de chaque longueur constituant $ds(M)$. (S) délimite la frontière d'existence de la densité $q_s(M)$.

Mises en garde

- Les éléments présents dans ce torseur doivent être appris par cœur à la lettre près. Tout y est important.
- Tous les facteurs présents dans l'intégrale dépendent du point M appartenant à la surface sur laquelle on intègre. Avant de « sortir » le moindre facteur de l'intégrale vous devez vous assurer que ce facteur est constant sur la surface d'intégration. Par exemple si la surface est courbe, le vecteur normal $\vec{u}_M$ varie, donc vous ne pouvez pas le sortir de l'intégrale.

Je le fais moi-même : calculez les ordres de grandeurs de pression de contact dans les cas suivants.

Rappel pour faciliter vos calculs : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

Cas étudié	Votre valeur en bar
Pneu sur route pour une voiture pesant 1 tonne. Surface de contact d'un pneu/sol = rectangle 10 cm x 10 cm. Pression de contact pneu/route en bar et en MPa ?	
Talon aiguille (section = 1 cm^2) de madame (50 kg). Madame se tient bien droite, tout son poids est sur les talons. Pression de contact talon/sol en bar et en MPa ?	
Lame de couteau sur assiette (fil de la lame = 0,05 mm, longueur = 5 cm). Force d'une main 5 daN. Pression de contact ?	
Une personne de 80 kg, sur des skis (surface d'un ski : 10 cm de large et 1,50 m de long). Pression de contact ski/neige en bar et en MPa ?	
Dalle en béton au fond d'une piscine (12m x 7m x 15cm) qui supporte les 50 m^3 d'eau. Pression de contact dalle/sol en bar et MPa ?	

7.4. Torseur d'une densité linéique de force

Dans ce cas la densité de force $q_l(M)$ ne dépend que d'une longueur. L'élément dimensionnel devient un élément de ligne $dl(M)$.

Les éléments différentiels du torseur d'action mécanique deviennent :

$$\overrightarrow{dR(1 \rightarrow 2)} = q_l(M).dl(M).\overrightarrow{u_M}$$

$$\overrightarrow{dM_o(1 \rightarrow 2)} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 2)} = \overrightarrow{OM} \wedge [q_l(M).dl(M).\overrightarrow{u_M}]$$

Il vient par intégration :

$$\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} = \int_{(D_l)} \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 2)} = \int_{(D_l)} q_l(M).dl(M).\overrightarrow{u_M}$$

$$\overrightarrow{M_o(1 \rightarrow 2)} = \int_{(D_l)} \overrightarrow{dM_o(1 \rightarrow 2)} = \int_{(D_l)} \overrightarrow{OM} \wedge [q_l(M).dl(M).\overrightarrow{u_M}]$$

$q_l(M)$ est la densité linéique au point M , en N/m.

$dl(M)$ est l'élément de longueur en m.

$\overrightarrow{u_M}$ est un vecteur unitaire au point M sans dimension (le vecteur $\overrightarrow{u_M}$ est parfois normal à la ligne $dl(M)$).

(D_l) indiqué sous le signe intégral est le domaine linéique d'intégration définissant les bornes de l'intégrale. Il délimite la zone d'existence de la pression linéique $q_l(M)$.

7.5. Torseur d'une densité volumique de force (action mécanique à distance)

L'action mécanique élémentaire d'un solide 1 sur un solide 2, est fonction du volume élémentaire de matière dv en chaque point M de 2 : $dv(M)$.

$$\overrightarrow{dR(1 \rightarrow 2)} = f_v(M).dv(M).\overrightarrow{u_M}$$

$$\overrightarrow{dM_o(1 \rightarrow 2)} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 2)} = \overrightarrow{OM} \wedge [f_v(M).dv(M).\overrightarrow{u_M}]$$

Il vient par intégration :

$$\overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{dR(1 \rightarrow 2)} = \iiint_{(V)} f_v(M).dv(M).\overrightarrow{u_M}$$

$$\overrightarrow{M_o(1 \rightarrow 2)} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{dM_o(1 \rightarrow 2)} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{OM} \wedge [f_v(M).dv(M).\overrightarrow{u_M}]$$

$f_v(M)$: densité volumique d'effort au point M en N/m³.

$dv(M)$: volume élémentaire en m³ au point M du solide S_2 .

$\overrightarrow{u_M}$: vecteur unitaire au point M

(V) indiqué sous le signe intégral est le domaine volumique d'intégration sur lequel s'exerce la densité de force volumique $f_v(M)$. Il fixe les bornes d'intégration sur chacun des trois éléments de longueur intervenant dans $dv(M)$.

Exemple de densité volumique de force

Le poids : L'action mécanique élémentaire au point M est $\vec{P}(M) = \rho(M) \cdot dV_M \cdot \vec{g}$

$\rho(M)$ est la masse volumique au point M. Et oui : la masse volumique peut être variable au sein du solide.

$dm(M) = \rho(M) \cdot dV_M$ est la masse élémentaire du volume élémentaire dV_M au point M.

Autres actions mécaniques à distance volumiques : forces magnétique (solide dans un champ magnétique) et électrostatique (charge dans champ électrostatique).

La pression hydrostatatique

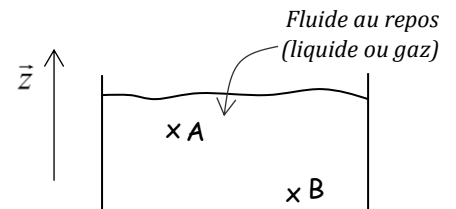
$$P(B) - P(A) = \rho \cdot g \cdot (Z_A - Z_B)$$

P = pression dans le fluide aux points A et B en Pa.

ρ = masse volumique du fluide en kg/m³

Z = « altitude » en m

$\vec{z}$ = vecteur normé vertical, ascendant.



Remarque : la pression augmente avec la profondeur, donc quand Z diminue.

Exercice d'application 1 : on dit souvent que la pression augmente de 1 bar, quand on descend de 10 m sous l'eau. Vérifiez-le.

Exercice d'application 2 : calculez la pression atmosphérique à la surface de la terre, s'il y a une hauteur d'air de 10 km au-dessus de sa surface, et si on considère qu'il a une masse volumique constante avec l'altitude (Hum !).

FIN DU COURS