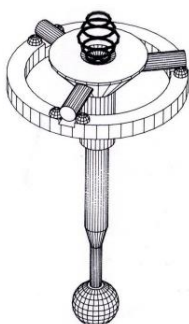


THEORIE DES MECANISMES

- Liaison équivalente
- Mobilité
- Isostatisme/Hyperstatisme

TRAVAUX DIRIGÉS/COURS



Palpeur de machine à mesurer tridimensionnelle : le positionnement du palpeur sur son bâti avec six appuis ponctuels est un encastrement isostatique... nécessité absolue pour une machine de précision.

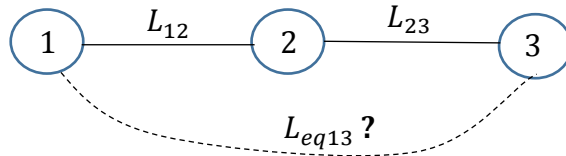
Table des matières

1. ELEMENTS DE COURS : LIAISONS EQUIVALENTES.....	2
1.1. Liaison équivalente pour des liaisons placées en série	2
1.2. Liaison équivalente pour des liaisons placées en parallèles	2
1.3. Synthèse	3
2. ELEMENT DE COURS : MOBILITÉ – ISOSTATISME - HYPERSTATISME	3
2.1. Calcul du degré d'hyperstatisme <i>h</i> d'un mécanisme.....	3
2.1.1. Degré de mobilité <i>m</i> d'un mécanisme	3
2.1.2. Calcul de <i>h</i> par la cinématique.....	5
2.1.3. Calcul de <i>h</i> par la statique.....	5
2.2. Que représente le degré d'hyperstatisme <i>h</i> d'un mécanisme ?.....	5
2.3. Rendre un mécanisme isostatique : mode d'emploi	6
2.4. Cas d'un problème plan ($6 \rightarrow 3$).....	7
2.5. Conséquence de l'hyperstatisme (non nul).....	7
2.6. Résolution des inconvénients	8
3. DETERMINATION DE LIAISONS EQUIVALENTES SIMPLES.....	9
4. MECANISME DE TRANSFORMATION DE MOUVEMENT SINUSMATIC.....	9
5. TRAIN D'ATTERRISSAGE D'AIRBUS A380 – ETUDE DE MOBILITÉ	10
6. MÉLANGEUR A ROTORS ENGRENANTS : ETUDE DE LA PRESSE.....	12

PARTIE 1 - QUELQUES ELEMENTS DE COURS

1. ELEMENTS DE COURS : LIAISONS EQUIVALENTES

1.1. Liaison équivalente pour des liaisons placées en série

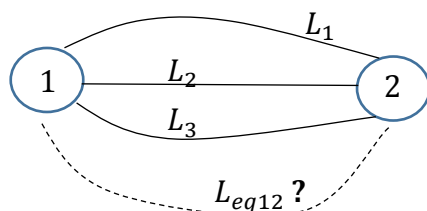


Soient trois solides 1, 2 et 3. Le solide 1 est lié à 2 avec la liaison L_{12} , 2 est lié à 3 avec la liaison L_{23} . On cherche la liaison L_{eq13} entre 1 et 3 qui autorise/interdit les mêmes degrés de liberté que 3/1.

Règle 1 : le torseur cinématique de la liaison équivalente L_{eq13} est la **somme** des torseurs cinématiques de L_{12} et de L_{23} : $\{\mathcal{V}_{31}\} = \{\mathcal{V}_{32}\} + \{\mathcal{V}_{21}\}$. Après avoir calculé $\{\mathcal{V}_{31}\}$ on identifie la liaison L_{eq13} dont le torseur cinématique est $\{\mathcal{V}_{31}\}$.

Règle 2 : le torseur des actions mécaniques transmissibles (AMT) de la liaison équivalente L_{eq13} est **égal** au torseur des AMT de L_{12} et au torseur des AMT L_{23} . On écrit donc $\{\mathcal{V}_{31}\} = \{\mathcal{V}_{32}\} = \{\mathcal{V}_{21}\}$. Un système d'équations linéaire simple apparaît. Sa résolution permet la connaissance de $\{\mathcal{V}_{31}\}$: on identifie ainsi la liaison L_{eq13} dont le torseur des AMT est $\{\mathcal{V}_{31}\}$.

1.2. Liaison équivalente pour des liaisons placées en parallèles



Soient deux solides 1 et 2. Le solide 1 est lié à 2 avec trois liaisons (ou plus) L_1, L_2, L_3 . On cherche la liaison L_{eq12} entre 1 et 2 qui autorise/interdit les mêmes degrés de liberté que 2/1.

Règle 1 : le torseur cinématique de la liaison équivalente L_{eq12} est **égal** aux torseurs cinématiques des autres liaisons L_1, L_2 et L_3 (ou plus).

On écrit donc : $\{\mathcal{V}_{21}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{21}^{(1)}\} = \{\mathcal{V}_{21}^{(2)}\} = \{\mathcal{V}_{21}^{(3)}\}$. La résolution d'un système d'équations linéaire simple permet la connaissance de $\{\mathcal{V}_{21}^{eq}\}$: on identifie ainsi la liaison L_{eq12} dont le torseur des AMT est $\{\mathcal{V}_{21}^{eq}\}$.

Règle 2 : le torseur des AMT de la liaison équivalente L_{eq12} est la **somme** des torseurs des AMT de L_1 , L_2 et L_3 (ou plus) : $\{\mathcal{V}_{21}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{21}^{(1)}\} + \{\mathcal{V}_{21}^{(2)}\} + \{\mathcal{V}_{21}^{(3)}\}$. Après avoir calculé $\{\mathcal{V}_{21}^{eq}\}$, on identifie la liaison L_{eq12} dont le torseur cinématique est $\{\mathcal{V}_{21}^{eq}\}$.

1.3. Synthèse

Liaisons en =>	Série	//
Torseur cinématique	+	=
Torseur des actions mécaniques transmissibles	=	+

Remarque : le calcul mène toujours à un « torseur équivalent ». Mais ce torseur ne mène pas forcément à une liaison existante répertoriée (« tableau des liaisons »). La liaison équivalente n'est donc pas toujours identifiable. Mais bon, si la question est posée dans un sujet de concours c'est qu'elle est clairement identifiable !

Remarque : si vous avez le choix de la méthode, choisissez toujours la **somme** des torseurs. Le calcul est bien plus simple, naturel et présente moins de risque que la résolution du système d'équations. Donc :

- pour des liaisons série => somme des torseurs cinématiques privilégiée,
- pour des liaisons parallèles => somme des torseurs statiques privilégiée.

2. ELEMENT DE COURS : MOBILITÉ – ISOSTATISME - HYPERSTATISME

2.1. Calcul du degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme.

2.1.1. Degré de mobilité m d'un mécanisme

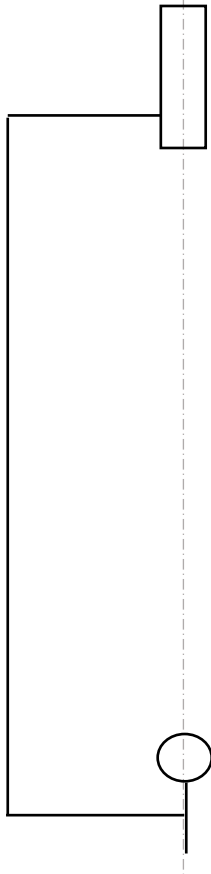
Le degré de mobilité m d'un mécanisme est le nombre de mouvements **INDÉPENDANTS** possibles entre les solides de ce mécanisme.

On distingue :

- les mobilités utiles m_u : ce sont les mouvements pour lequel le mécanisme est conçu, souvent le (ou les) mouvement entrée-sortie.
- les mobilités internes m_i : ce sont les mouvements de pièces dans le mécanisme pas intéressants du point de vue du service rendu par le mécanisme. En revanche ils jouent souvent un rôle « de bon fonctionnement » non visible à première vue.

On a, de manière évidente : $m =$

Exemple : système bielle/manivelle/coulisseau



2.1.2. Calcul de h par la cinématique

$h =$

$h = 0 \Rightarrow$ mécanisme ...

$h \geq 1 \Rightarrow$ mécanisme ...

$h < 0 \Rightarrow$ impossible, erreur de calcul (souvent mauvais décompte des mobilités), vous cherchez immédiatement votre erreur !..

γ : appelé aussi nombre **cyclomatique** (nombre de **cycles** quoi !)

h	Degré d'hyperstatisme	
m	Degré de mobilité	
E_c	Nb d'équations de la cinématique	$E_c =$
I_c	Nb d'inconnues cinématiques dans les liaisons	
γ	Nb de boucles indépendantes	$\gamma =$
N_L	Nb de liaisons	
N_p	Nb de solides (ou pièces)	

2.1.3. Calcul de h par la statique

$h =$

$h = 0 \Rightarrow$ mécanisme ...

$h \geq 1 \Rightarrow$ mécanisme ...

$h < 0 \Rightarrow$ impossible, erreur de calcul (souvent mauvais décompte des mobilités), vous cherchez votre erreur !..

h	Degré d'hyperstatisme	
m	Degré de mobilité	
E_s	Nb d'équations de la statique (PFS)	$E_s =$
I_s	Nb d'inconnues statiques dans les liaisons	
N_p	Nb de solides (ou pièces)	

2.2. Que représente le degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme ?

Point de vue « degré de liberté » : Pour un modèle cinématique donné, h représente le nombre de degrés de liberté supprimés « en trop » par rapport à un modèle qui aboutirait à la même fonctionnalité.

Le degré d'hyperstatisme h d'un ensemble de liaisons en série est... NUL !

Chercher le degré d'hyperstatisme d'une chaîne de solide ouverte n'a pas de sens.

Seule une chaîne fermée peut faire apparaître de l'hyperstatisme.

Point de vue statique (le plus rigoureux) : le degré d'hyperstatisme est le nombre d'inconnues statiques en excès dans un problème de résolution statique.

$h \geq 1 \Rightarrow$ Problème statique partiellement (ou pas) résoluble $\Rightarrow$ certaines inconnues statiques ne peuvent être calculées $\Rightarrow$ excès d'inconnues par rapport aux nombres d'équations disponibles issues du PFS. $h=0 \Rightarrow$ pb statique totalement résoluble.

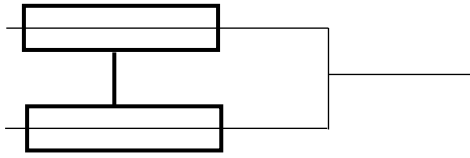
Illustration d'un montage hyperstatique simple : liaison pivot

2.3. Rendre un mécanisme isostatique : mode d'emploi

Quand on vous demande de rendre un mécanisme isostatique (questions de sujet de concours classique) :

- Vous respectez les contraintes imposées par le sujet. Souvent on vous impose d'agir sur une ou plusieurs liaisons L_i : donc vous ne modifiez que les liaisons L_i , pas les autres !
- Le mécanisme doit conserver sa fonctionnalité : s'il s'agit d'une glissière par exemple, après modification, il doit y avoir translation des pièces. Le mécanisme ne doit pas être bloqué.
- Le mécanisme ne doit pas se désunir, se « démantibuler », « s'ouvrir en deux », « se casser la figure », « tourner dans le vide », etc.
- Recomptez avec rigueur et honnêteté les mobilités m .
- Après avoir imaginé/proposé une solution : VOUS CALCULEZ À NOUVEAU le degré d'hyperstatisme h . Une affirmation du type « il faut ajouter 2 ddl, donc je modifie la liaison pivot en liaison sphérique » n'est pas une justification et est... fausse ! En effet de nouvelles mobilités peuvent apparaître... augmentant h .

Illustration : rendre isostatique une glissière réalisée par deux pivot glissant parallèles



2.4. Cas d'un problème plan ($6 \rightarrow 3$)

L'expression mathématique du degré d'hyperstatisme est différente.

Cinématique : $h = m + E_c - I_c$

Avec $E_c = \gamma \times 3$, et I_c doit être recomptée pour **chaque liaison** dans le cas plan dont le plan est identifié.

Statique : $h = m + I_s - E_s$

Avec $E_s = (N_p - 1) \times 3$ et I_s doit être recomptée pour **chaque liaison** dans le cas plan dont le plan est identifié.

2.5. Conséquence de l'hyperstatisme (non nul)

- Conséquence de rigidité (avantage) : augmente la rigidité d'un mécanisme. Il se déforme moins sous l'action des efforts.
- Conséquence de résistance (avantage) : augmente la résistance d'une structure sous l'action des efforts. Pensez au pont sur plusieurs pieds alors que... deux « suffiraient ».
- Conséquence de stabilité (avantage) : augmente la stabilité. Pensez à la table sur ses quatre pieds.
- Conséquence sur la conception du mécanisme (inconvénient) : le concepteur doit prévoir des dimensions et contraintes géométriques supplémentaires entre surfaces pour que le mécanisme puisse s'assembler. Un mécanisme isostatique peut, lui, toujours s'assembler.
- Conséquence pratique point de vue utilisateur (inconvénient) : difficulté d'assemblage éventuel (mise en place d'une porte dans ses gonds, Grrrh !), coincements agaçants, système bancal (table à 4 pieds), etc.

Quand on vous demande de conclure après le calcul de h il faut donner l'une des explications ci-dessus (ou plus...) à bon escient selon le contexte de l'étude.

2.6. Résolution des inconvénients

Les difficultés d'assemblage peuvent être résolues. Prenons l'exemple de la table/frigo/lave-vaisselle/voiture sur le sol. Cet exemple très basique est éloigné de nos problématiques mécaniques plus complexes, mais au moins tout le monde le connaît.

On souhaite réaliser un appui plan table/sol. Plutôt que de placer une surface plane sur le sol, la solution courante est la mise en œuvre d'appuis ponctuels (modèle liaison sphère/plan). Pour des raisons évidentes de stabilité on place souvent quatre appuis ponctuels (quatre pieds). L'appui table/sol est donc hyperstatisme d'ordre 1 :

$$h = m + I_s - E_s =$$

La conséquence, vous la connaissez : souvent la table est « bancale » ce qui signifie qu'un appui est inopérant donc : « difficulté d'assemblage » disons.

On résout ce problème de trois manières différentes :

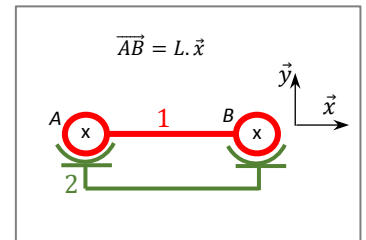
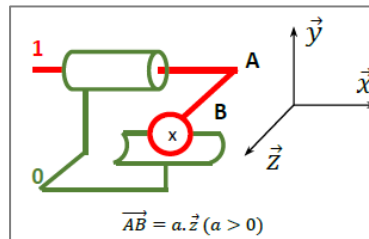
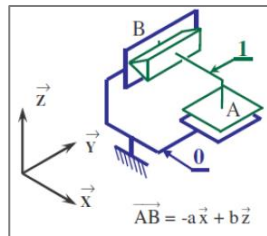
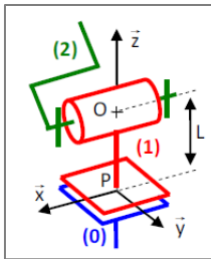
- **Précision** de la conception/fabrication par l'introduction de **contraintes géométriques supplémentaires** : le bout du quatrième pied de table doit être réalisé dans le plan des trois autres, et le sol doit être parfaitement plan ! Avec trois pieds (isostatisme), nul besoin de ces deux contraintes géométrique, ce problème de chaise ou table bancale ne se produit jamais !
- **Réglage** d'une pièce : table d'architecte, frigo, lave-vaisselle possèdent un pied réglable (vissé) pour que les quatre pieds soient en contact avec le sol.
- **Déformation** des pièces : le poids de votre corps déforme la chaise sur laquelle vous êtes assis => les quatre pieds, se déformant avec la structure de la chaise, contactent le sol, même si à vide ce n'était pas le cas. Les quatre roues d'une voiture sont en contact avec le sol grâce aux amortisseurs et aux pneus qui se déforment. Notez qu'un vélo, moto, naturellement isostatiques ont toujours leurs deux roues au sol quelle que soit la forme du sol, et même sans amortisseur et avec roues dures sans pneu !

FIN DU COURS

PARTIE 2 - EXERCICES D'APPLICATION

3. DETERMINATION DE LIAISONS EQUIVALENTES SIMPLES

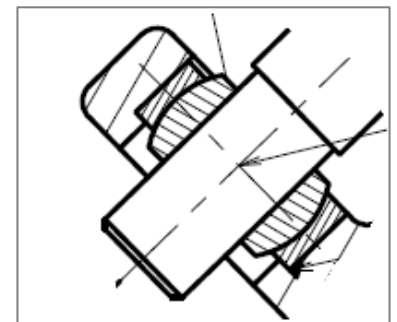
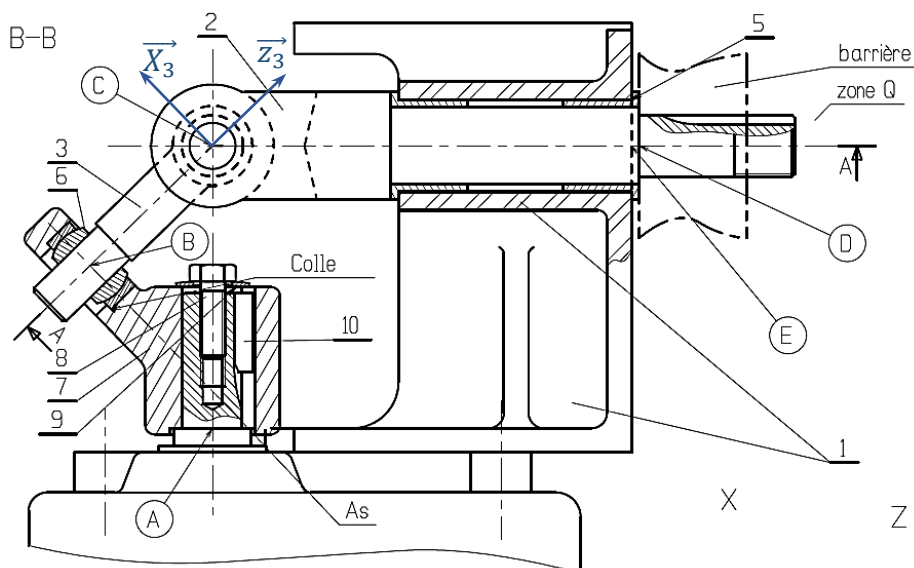
Pour les modèles cinématiques ci-dessous, déterminer la liaison équivalente après avoir colorié le schéma cinématique et fait le graphe des liaisons. Déterminer le degré d'hyperstatisme h quand celui-ci a un sens.



4. MECANISME DE TRANSFORMATION DE MOUVEMENT SINUSMATIC

Le dessin d'ensemble du système de transformation de mouvement Sinusmatic est donné ci-dessous. On s'intéresse au sous-ensemble {croisillon 3, noix 6, arbre d'entrée 7}.

- Surligner les surfaces de contact 3/6, et 6/7
- Faire le graphe des liaisons
- Faire le schéma cinématique de ce sous-ensemble
- Déterminer le degré d'hyperstatisme h
- Déterminer la liaison équivalente 3-6-7.



5. TRAIN D'ATERRISSAGE D'AIRBUS A380 – ETUDE DE MOBILITÉ

Objectif

Estimer par une étude rapide les mobilités et le degré d'hyperstatisme du train d'atterrissage. Déduire un modèle isostatique différent.

Mise en situation

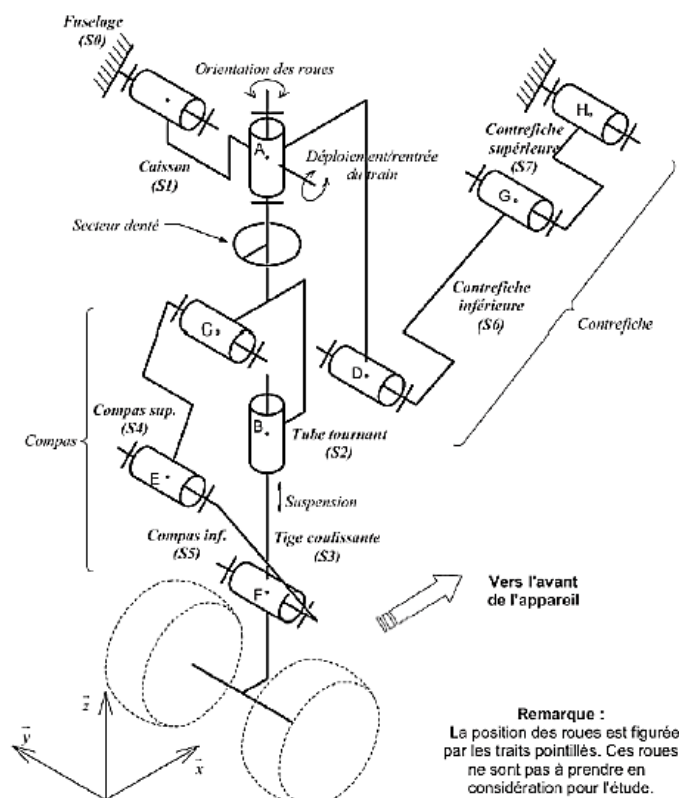
Le système proposé à l'étude est un train d'atterrissage avant d'avions civils conçu et fabriqué par la société Messier-Dowty, société du Groupe SAFRAN. La société est leader mondial de la conception et de la fabrication des systèmes de trains d'atterrissage. Les atterrisseurs Messier-Dowty équipent environ 20 000 appareils et réalisent plus de 35000 atterrissages chaque jour. La société fournit tout ou partie des atterrisseurs d'avions tels que l'A380, l'A350 XWB, le 787 Dreamliner, le Falcon 7x, etc. L'étude proposée porte sur le train d'atterrissage.



Analyse de la structure du système

Le schéma cinématique relatif au train avant est donné. Le caisson (S1) est en liaison pivot avec le fuselage (S0) de l'appareil et permet le déploiement du train. En position sortie, la rotation du tube tournant (S2) par rapport au caisson doit permettre l'orientation des roues pour la direction de l'appareil lors des manœuvres au sol.

La commande de cette rotation est réalisée par une crémaillère agissant sur un secteur denté du tube tournant. Ce dispositif de commande n'est pas représenté sur le schéma cinématique et ne sera pas pris en considération. Afin d'assurer la suspension du train avant, les roues sont montées sur la tige coulissante (S3) en liaison pivot glissant avec le tube tournant. Le compas composé des deux pièces principales que sont le compas supérieur (S4) et le compas inférieur (S5) permet alors de transmettre le mouvement de rotation du tube tournant à la tige coulissante en laissant libre le mouvement de translation. Une contrefiche composée des deux bras (S6) et (S7) sert à reprendre les efforts exercés sur le train et à le maintenir



déployé. Elle est équipée d'un dispositif de verrouillage qui empêche son repli involontaire.

Q1. Tracer le graphe des liaisons de cette modélisation.

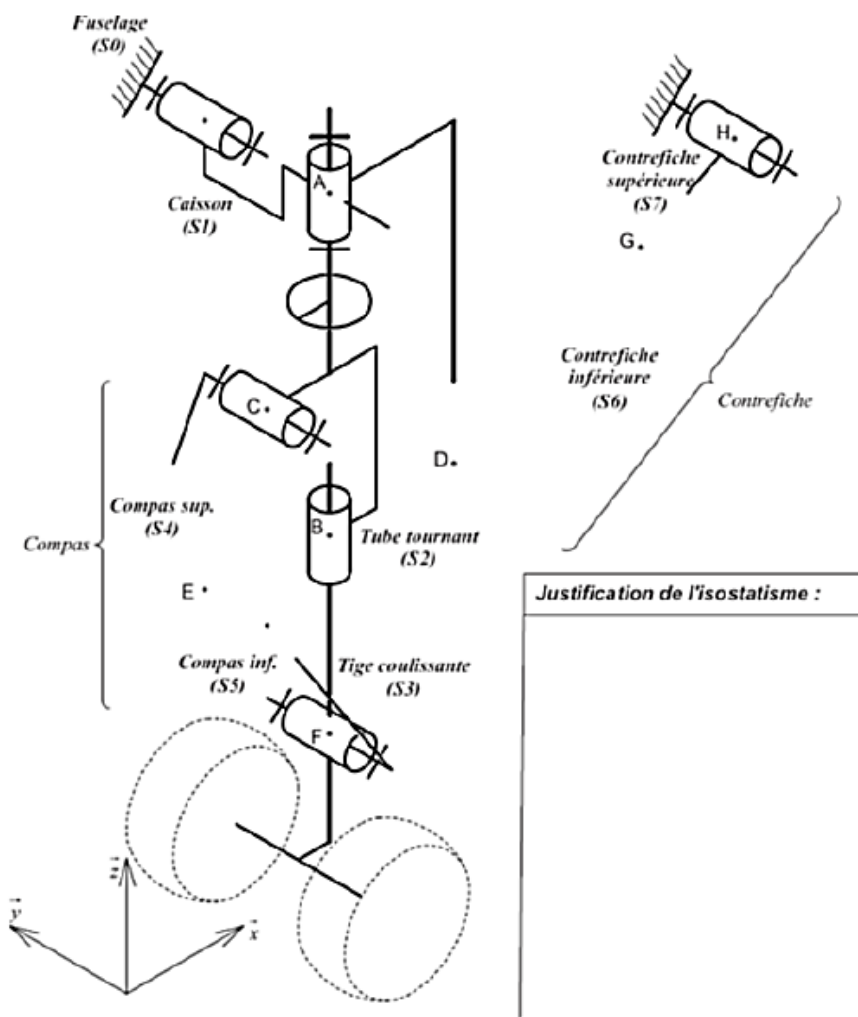
Q2. Donnez le degré d'hyperstatisme pour le sous-ensemble $\{(S0); (S1); (S6); (S7)\}$.

Q3. Donnez le degré d'hyperstatisme de l'ensemble.

Q4. Complétez avec les symboles normalisés des liaisons le document réponse 1 fourni ci-après afin d'obtenir un modèle isostatique en modifiant uniquement les liaisons suivantes :

- la liaison entre le compas supérieur et le compas inférieur ;
- la liaison entre la contrefiche inférieure et le caisson ;
- la liaison entre la contrefiche supérieure et la contrefiche inférieure.

Justifier l'isostatisme du schéma que vous proposez sur le document réponse 1.



6. MÉLANGEUR A ROTORS ENGRENANTS : ETUDE DE LA PRESSE

Objectif

Analyser l'hyperstatisme du modèle retenu pour la structure mécanique de la presse hydraulique d'un mélangeur à rotors engrénants, et justifier certains choix de liaison.

Description

Seule la partie presse (ou fouloir) est étudiée. La partie rotor/broyeur à engrenage n'est pas montrée ici.

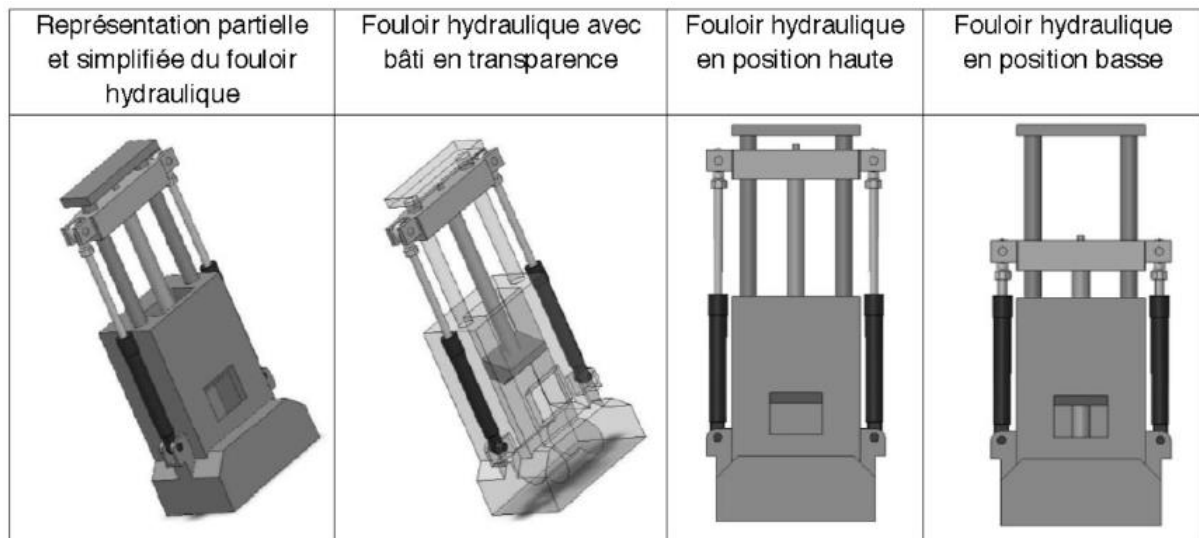


Fig 1 : vues de la presse (ou fouloir) selon 2 positions différentes et en perspective

Voir le schéma cinématique de la figure 5.2. : La partie « presse » est l'ensemble $\{0, 4\}$. Le déplacement du fouloir est effectué par deux vérins hydrauliques, formés respectivement des pièces $\{6, 7\}$, et $\{6', 7'\}$. Les efforts à développer par ces deux vérins étant très importants, la structure mécanique du guidage du fouloir dans le bâti doit être suffisamment rigide.

Q1. On considère l'ensemble E constitué uniquement des solides 0,4 : $E=\{0,4\}$. Déterminer la liaison équivalente de 0/4.

Q2. Faire le graphe des liaisons du mécanisme complet et déterminer son degré d'hyperstatisme h_g par une méthode cinématique.

Q3. Déterminer le degré d'hyperstatisme h_E de l'ensemble E. Conclusion.

Q4. Pourquoi la liaison entre des deux vérins à 4 et 0, en O_6, O_7, O'_6, O'_7 n'a-t-elle pas été réalisée avec des liaisons pivot, voire des encastrement, qui auraient pourtant tout aussi bien assuré la translation de la presse ?

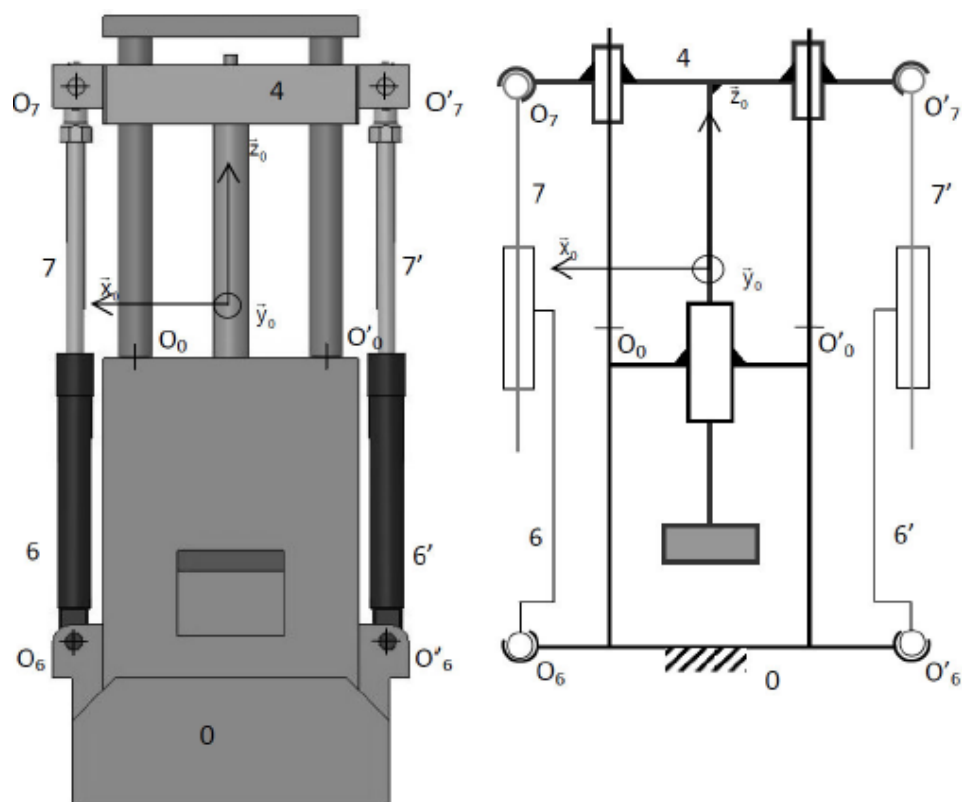
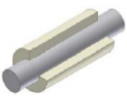
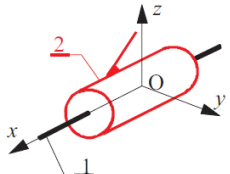
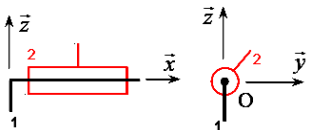
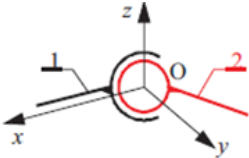
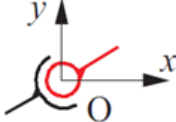
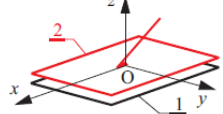
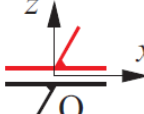
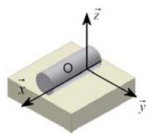
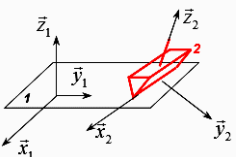
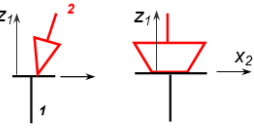
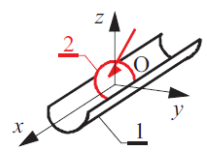
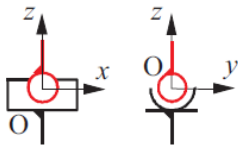
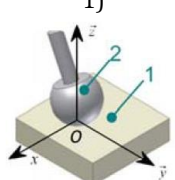
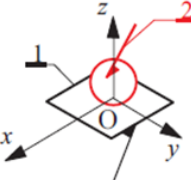
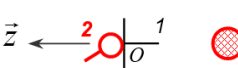
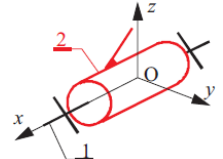
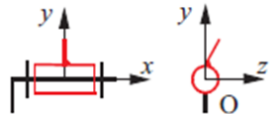
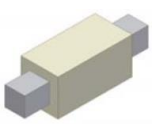
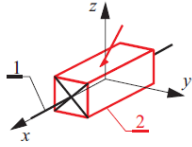
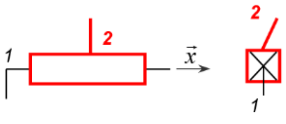
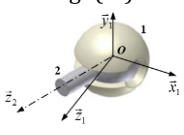
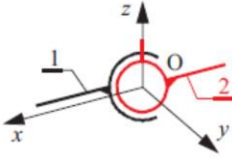
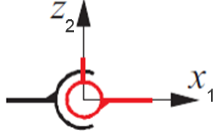
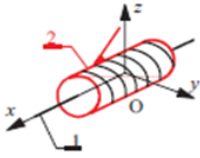
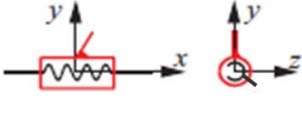
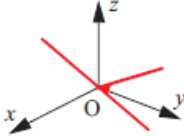
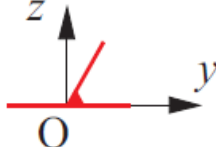


FIGURE 5.2 – Schéma cinématique du guidage du fouloir.

ANNEXE 1 : LIAISONS-TORSEUR CINEMATIQUE-DOMAINE DE VALIDITE

Liaison : nom et illustration	Caract. géométriq.	Schéma spatial (3D)	Schéma plan (2D)	Torseur cinématique
$\mathcal{L}$ pivot glissant (-4) 	Axe $(O, \vec{x})$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \vec{x} \\ V_x \vec{x} \end{Bmatrix}_A$ Dom.de Validité : $\forall A \in$ axe liaison $(O, \vec{x})$
$\mathcal{L}$ sphérique (-3) 	Centre O			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$ Dom.de Validité : $O =$ centre de la liaison
$\mathcal{L}$ appui plan (-3) 	Normale $\vec{z}$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{Bmatrix}_M$ Dom.de Validité : $\forall M$ de l'espace
$\mathcal{L}$ cylindre plan (-2) 	- Normale $\vec{z}$ - Axe $(O, \vec{x})$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x2} \vec{x}_2 + \omega_{z1} \vec{z}_1 \\ V_{x1} \vec{x}_1 + V_{y1} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_O$ Dom.de Validité : $\forall O \in$ plan passant par la ligne de contact et perpendiculaire au plan de la liaison
$\mathcal{L}$ sphère cylindre (-2) 	- Centre O - Axe $(O, \vec{x})$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} \end{Bmatrix}_M$ Dom.de Validité : O centre de la sphère
$\mathcal{L}$ sphère plan (-1) 	- Centre O - Normale $\vec{z}$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{Bmatrix}_A$ Dom.de Validité : $\forall A \in (O, \vec{z})$, droite normale au plan et passant le centre de la sphère
$\mathcal{L}$ pivot (-1) 	Axe $(O, \vec{x})$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ Dom.de Validité : $\forall A \in$ axe liaison $(O, \vec{x})$

$\mathcal{L}$ glissière (-1) 	Direction $\vec{x}$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_x \vec{x} \end{Bmatrix}_M$ Dom.de Validité : $\forall M$ de l'espace
$\mathcal{L}$ sphérique à doigt (-4) 	- centre O - plan de normale $\vec{y}_1$ - axe de doigt $(O, \vec{z}_2)$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_{y1} \vec{y}_1 + \omega_{z2} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$ Dom.de Validité : O centre de la sphère
$\mathcal{L}$ hélicoïdale (-1) 	Axe $(O, \vec{x})$			$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \vec{x} \\ V_x \vec{x} \end{Bmatrix}_A$ $V_x = \frac{\pm p}{2\pi} \cdot \omega_x$ (V en m/s, ω en rad/s, p en m/tr). « -p » si hélice à gauche. Dom.de Validité : $\forall A \in$ axe liaison $(O, \vec{x})$
$\mathcal{L}$ encastrement (-6) 				$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \{0\}$ Dom.de Validité : $\forall M$ de l'espace