DYNAMIQUE DU SOLIDE

PARTIE 1 : INERTIE ET CINETIQUE

NOTION D'INERTIE

OPERATEUR D'INERTIE

TORSEUR CINETIQUE

ENERGIE CINETIQUE

COURS

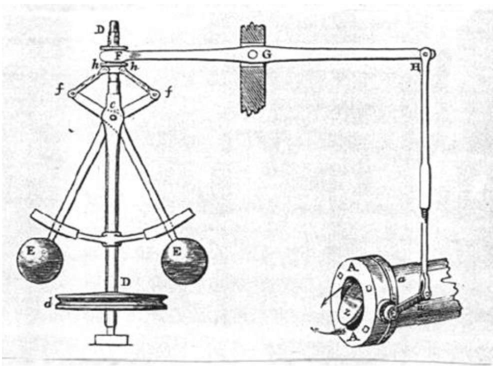
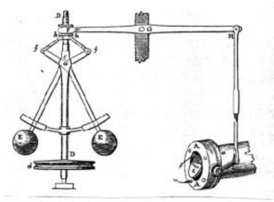


Table des matières

<u>Illustration de la 1ère de couverture</u>

Une équilibreuse de roue de voiture, le régulateur de Watt (largement désuet), un banc de crash test automobile sont des systèmes électromécaniques qui mettent en œuvre les lois de la dynamique.



1. INTRODUCTION

L'inertie représente la résistance qu'oppose un corps solide à sa mise en mouvement.

C'est une caractéristique intrinsèque au corps. Elle se quantifie par deux grandeurs : la masse et le moment d'inertie.

1.1. Masse

La notion de masse pour un solide peut se définir de deux manières :

- Quantité de matière contenue dans un solide : elle représente alors le nombre de particules élémentaires que contient ce corps (surtout celle du noyau, protons et neutrons ayant une masse 2000 fois plus importante que celle des électrons). On note : $M_{corps\_pesante} = \sum(m_{nucléons})$ exprimé en kg.

- Capacité d'un solide à résister à l'accélération : pour une même action mécanique un corps plus massique possède une accélération plus faible. Dans le cas simple où le corps, soumis à une force unique de norme F subit une accélération de norme γ, la masse inerte peut se définir : $M_{corps\_inerte} = \frac{F}{\gamma}$ (F en N, γ en m/s^2, masse en kg).

Equivalence fondamentale

Masse pesante et masse inerte sont égales : $M_{corps\_inerte} = M_{corps\_pesante}$. Cela entraîne le principe fondamental de la dynamique vu en 1ère année de CPGE en cours de science physique : $\sum \vec{F}(ext \to S) = M_{pesante}.\vec{\Gamma}(S/R_g)$. S étant un corps solide et R_g le référentiel galiléen.

1.2. Moment d'inertie

Soit un solide S en rotation autour d'un axe fixe Δ dans le référentiel galiléen.

Le moment d'inertie J_Δ du solide S par rapport à l'axe Δ caractérise la résistance à l'accélération angulaire de S, $\ddot{\theta}$, quand on soumet (S) à une action mécanique unique cause de sa rotation (couple $C(ext \to S)$) : $J_\Delta = \frac{C(ext \to S)}{\ddot{\theta}}$.

$C(ext \to S)$ en Nm, $\ddot{\theta}$ en rad/s^2, J_Δ en $kg.m^2$.

Explication : pour un même couple $C(ext \to S)$, le solide ayant un moment d'inertie plus élevé aura une accélération angulaire plus faible : « on a plus de mal à le mettre en rotation ».

Vous avez vu en 1ère année de CPGE, cours de sciences physiques, que J_Δ permet de calculer l'énergie cinétique d'un corps (S) possédant un mouvement de rotation autour de l'axe Δ :

Premier calcul : moment d'inertie J_Δ d'un solide autour d'un axe fixe Δ.

Exprimons l'énergie cinétique élémentaire $dE_c(M/R_g)$ d'un point M de masse élémentaire dm, animé d'une vitesse $\overrightarrow{V(M,S/R_g)}$:

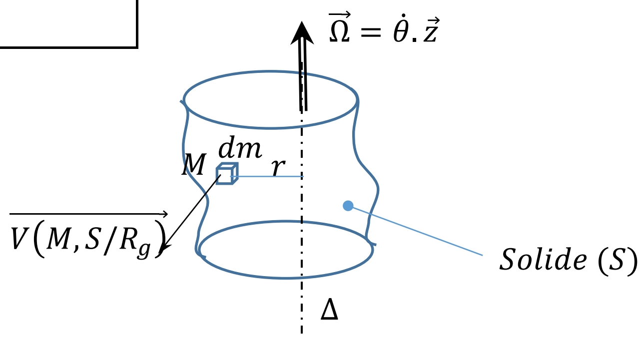
$$dE_c(M/R_g) = \frac{1}{2}.dm.\overrightarrow{V(M,S/R_g)}^2$$

L'énergie cinétique du solide S est : $T(S/R_g) = \int_{(S)} dT(M/R_g)$

$$E_c(S/R_g) = \int_{(S)} \frac{1}{2}.dm.\overrightarrow{V(M,S/R_g)}^2 = \frac{1}{2}.\int_{(S)} (r.\dot{\theta})^2.dm = \frac{1}{2}.\dot{\theta}^2 \int_{(S)} r^2.dm$$

On déduit le moment d'inertie d'un solide (S) en rotation autour d'un axe (Δ) fixe dans le repère galiléen R_g :

$$\boxed{\phantom{J_\Delta = \int_{(S)} r^2.dm}}$$



J_Δ permet aussi le calcul : du moment cinétique, $\sigma_G(S/R_g) = J_\Delta.\dot{\theta}$.
du moment dynamique : $\delta_G(S/R_g) = J_\Delta.\ddot{\theta}$.

Pour un solide en rotation, le moment d'inertie caractérise l'éloignement de sa masse par rapport à l'axe de rotation.

Ainsi pour deux corps de même masse M, celui pour laquelle la masse M est la plus éloignée de l'axe possèdera un moment d'inertie plus important. Il devra subir un moment plus important pour avoir la même accélération angulaire que l'autre.

1.3. Insuffisance du moment d'inertie scalaire

Le moment d'inertie est donc une grandeur scalaire permettant d'appliquer le PFD à un solide en rotation autour **d'un axe fixe dans le référentiel R_g**.

Problème : comment quantifier l'inertie d'un solide animé d'un mouvement quelconque, c'est-à-dire d'un mouvement de rotation dont l'axe instantané est variable au cours du temps ? C'est-à-dire qu'il se déplace dans l'espace, s'incline, accélère…

En première année il a été vu que la vitesse de rotation instantannée est un vecteur, $\vec{\Omega}$ dont les trois composantes varient au cours du temps.

L'opérateur permettant d'obtenir le vecteur moment cinétique en fonction du vecteur rotation instantané est une matrice appelée opérateur d'inertie abordé dans un chapitre ultérieur.

2. CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE

2.1. Cas d'un volume continu

Le centre d'inertie G d'un solide de masse m peut se calculer de la manière suivante :

, ou bien,

Avec $dm = \rho . dV$ où ρ est la masse volumique du solide (S) et dV un élément du volume élémentaire.

2.2. Cas d'un ensemble discret de volumes

Le centre d'inertie de l'ensemble est défini comme le barycentre des centres d'inertie des éléments simples qui le constituent.

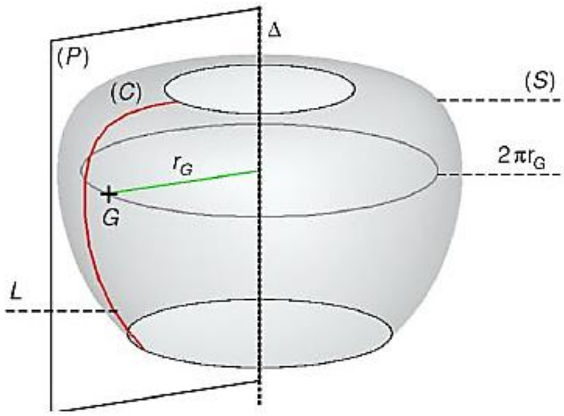
Avec : $M = \sum_i \ m_i$ et $m_i = \rho_i V_i$

2.3. Théorème de Guldin

Les deux théorèmes de Guldin permettent dans quelques cas particuliers de déterminer la position du centre d'inertie d'une ligne plane ou d'une surface plane.

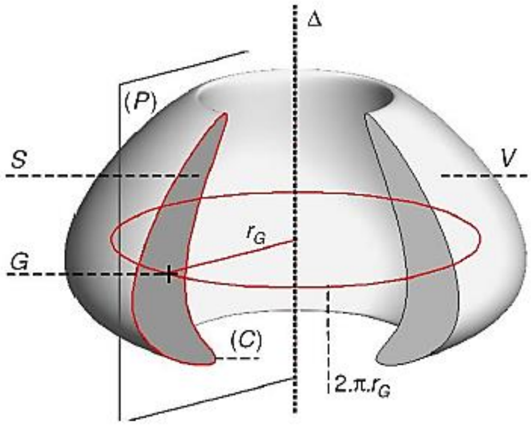
2.3.1. Cas d'une ligne plane

L'aire A de la surface engendrée par une ligne plane qui tourne autour d'un axe fixe situé dans son plan et qui ne la traverse pas, est égale au produit de la longueur l de la ligne par le périmètre du cercle $2\pi . r_G . l$ décrit par son centre d'inertie G :



2.3.2. Cas d'une surface plane

Le volume V engendré par une surface plane qui tourne autour d'un axe situé dans son plan et qui ne la traverse pas, a pour mesure le produit de l'aire A de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie G :



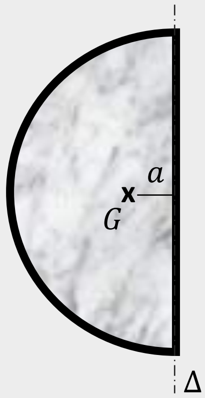
Je me teste : le théorème de Guldin c'est astucieux !

On souhaite déterminer la position du centre d'inertie G d'un demi-disque de rayon R.

On sait par symétrie que G se trouve sur l'axe médian du demi-disque.

Il faut juste déterminer la distance a.

a) Quelle est la forme engendrée par la rotation du demi-disque autour de l'axe passant par « sa base », Δ ? Donnez le volume V de cette forme.
b) Grace au théorème de Guldin déterminer la position de G, a.



3. L'OPERATEUR D'INERTIE

3.1. Définition

Il se note $\bar{\bar{I}}(O,S)$ et se nomme « opérateur d'inertie en O du solide S ». Cette opérateur possède les propriétés suivantes :

- C'est une matrice 3x3 symétrique
- Il dépend de six scalaires constants dans le temps, indépendants du mouvement du solide.
- La base dans laquelle est définie la matrice est orthonormée directe
- La base ainsi que l'origine (notée ici O) sont <u>liées</u> au solide pour que les coefficients de la matrice soient constants dans le temps.

<u>Moments d'inertie</u>

Moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{x})$: $A = \mathrm{I_{xx}} =$

Moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{y})$: $B = \mathrm{I_{yy}} =$

Moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(O,\vec{z})$: $C = \mathrm{I_{zz}} =$

<u>Produits d'inertie</u>

Produit d'inertie de (S) par rapport au plan $(O,\vec{y},\vec{z})$: $D = \mathrm{I_{yz}} =$

Produit d'inertie de (S) par rapport au plan $(O,\vec{x},\vec{z})$: $E = \mathrm{I_{xz}} =$

Produit d'inertie de (S) par rapport au plan $(O,\vec{x},\vec{y})$: $F = \mathrm{I_{xy}} =$

3.2. Démonstration : origine des produits et moments d'inertie

Soit un solide S de centre d'inertie G en mouvement dans le repère galiléen R_g. Son moment cinétique est $\overrightarrow{\sigma_G(S/R_g)}$. Le repère $R_S(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est lié au solide.

Le vecteur rotation instantané de S/R_g est $\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}$.

Pour un élément de masse dm le moment cinétique élémentaire s'écrit :

$\overrightarrow{d\sigma_G(S/R_g)} = \overrightarrow{GM} \wedge dm.\overrightarrow{V(M,S/R_g)} = dm.\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V(M,S/R_g)}$

Exprimons le champ des vecteurs vitesses dusolide S dans R_g :

$\overrightarrow{V(M,S/R_g)} = \overrightarrow{V(G,S/R_g)} + \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{GM}$

Si on se place dans le cas où $\overrightarrow{V(G,S/R_g)} = \vec{0}$:

$\overrightarrow{V(M,S/R_g)} = \overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{GM}$

Donc :

$\overrightarrow{d\sigma_G(S/R_g)} = dm.\overrightarrow{GM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} \wedge \overrightarrow{GM}\right)$

D'après l'égalité de Gibbs (double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w}).\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v}).\vec{w}$)

$\overrightarrow{d\sigma_G(S/R_g)} = dm.\left[\overrightarrow{GM}^2.\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} - \overrightarrow{GM}.\left(\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}\right)\right]$

Soient les composantes du taux de rotation : $\overrightarrow{\Omega(S/R_g)} = \omega_x.\vec{x} + \omega_y.\vec{y} + \omega_z.\vec{z}$

Soient les composantes du point M dans le repère R_S : $\overrightarrow{GM} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$

Le moment cinétique élémentaire devient :

$\overrightarrow{d\sigma_G(S/R_g)} = \ dm.\left[(x^2 + y^2 + z^2).\left(\omega_x.\vec{x} + \omega_y.\vec{y} + \omega_z.\vec{z}\right) - (x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z})\left(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z\right)\right]$

Observons chaque composante du moment cinétique $\overrightarrow{d\sigma_G(S/R_g)}$:

$\overrightarrow{d\sigma_G(S/R_g)}.\vec{x} = \omega_x(y^2 + z^2)dm - \omega_y(xy.dm) - \omega_z(xz.dm)$

$\overrightarrow{d\sigma_G(S/R_g)}.\vec{y} = \omega_y(x^2 + z^2)dm - \omega_x(xy.dm) - \omega_z(yz.dm)$

$\overrightarrow{d\sigma_G(S/R_g)}.\vec{z} = \omega_z(x^2 + y^2)dm - \omega_x(xz.dm) - \omega_y(yz.dm)$

Rangé dans une matrice, cela donne :

$$\overrightarrow{d\sigma_G(S/R_g)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (y^2+z^2)dm & -xy.dm & -xz.dm \\ -xy.dm & (x^2+z^2)dm & -yz.dm \\ -xz.dm & -yz.dm & (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}_{\bar{\bar{I}}(O,S)} . \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}_{\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}}$$

3.3. Propriétés de l'opérateur d'inertie

3.3.1. Repère principal d'inertie

La matrice $\bar{\bar{I}}(O_p, S)$ étant symétrique, elle est diagonalisable. On démontre qu'en un point O_p il existe une base $(\overrightarrow{X_p}, \overrightarrow{Y_p}, \overrightarrow{Z_p})$, toujours attachée au solide (S), dite base principale d'inertie, telle que $\bar{\bar{I}}(O_p, S)$ soit diagonale :

$$\bar{\bar{I}}(O_p, S) = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & B_p & 0 \\ 0 & 0 & C_p \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{X_p}, \overrightarrow{Y_p}, \overrightarrow{Z_p})}$$

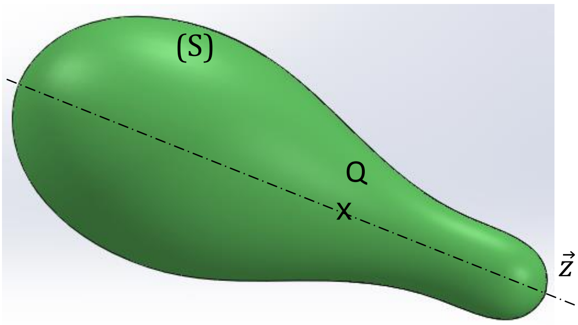
A_p, B_p, C_p sont appelés moments d'inertie principaux.

Si le point considéré O_p est le centre d'inertie G du solide, on parlera de base **centrale** principale d'inertie.

3.3.2. Axe principal d'inertie

Soit un solide (S) : l'axe $(Q, \vec{z})$ est axe principal d'inertie si les produits d'inertie I_{xz} et I_{yz} sont nuls. La matrice d'inertie s'écrit alors :

$$\bar{\bar{I}}(Q, S) = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



$D = I_{yz} = 0$ et $E = I_{xz} = 0$

Si l'axe principal n'est pas $\vec{z}$, mais $\vec{x}$ ou $\vec{y}$, vous déduisez la matrice par permutation circulaire bien sûr…

Interprétation : la notion d'axe principal d'inertie est très utilisée pour l'équilibrage des solides en rotation.

Soit un solide (S) est en pivot d'axe (Δ) avec un bâti (0) : si le centre d'inertie G du solide appartien à (Δ) et que (Δ) est axe principal d'inertie du solide, alors le solide est dynamiquement équilibré. « Equilibré dynamiquement » signifie que (S) ne transmet aucun effort variable au bâti (0) lors de sa rotation à vitesse constante. Autrement dit, le solide n'engendre pas de vibrations lors de sa rotation.

3.3.3. Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

On démontre que l'opérateur d'inertie d'un solide S, exprimé au point P, $\bar{\bar{I}}(P, S)$ permet d'obtenir le moment d'inertie scalaire d'un solide S autour d'un axe quelconque Δ de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ et passant par P, $\Delta = (P, \vec{u})$:

$$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

3.3.4. Théorème de Huygens généralisé

Ce théorème permet de passer de l'opérateur central d'inertie d'un solide exprimé au centre d'inertie G, à l'opérateur en un point A quelconque (ou inversement).

On note a, b, c les coordonées reliant A à G :

$\overrightarrow{GA} = a.\vec{x} + b.\vec{y} + c.\vec{z}$

On a :

💣 Attention, danger : le théorème du Huygens permet de passer de l'opérateur d'inertie en G à l'opérateur d'inertie en un autre point A. Il ne permet pas de passer d'un point quelconque B en un point quelconque A. Il faut toujours « partir de G » pour « aller vers un autre point ».

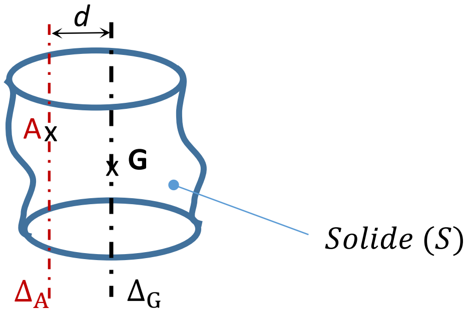
3.3.5. Cas particulier du Théorème de Huygens : axes parallèles

Soit le solide (S) de masse m, dont on connait le moment d'inertie par rapport à un axe donné Δ_G **passant par son centre d'inertie G** : $J_{\Delta G}(S)$.

On souhaite connaître le moment d'inertie de ce solide par rapport à un **autre axe Δ_A parallèle à Δ_G** : $J_{\Delta A}(S)$.

Les axes, parallèles, sont distants de la distance d.

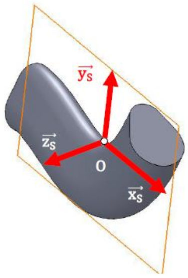
Le nouveau moment d'inertie se déduit de la manière suivante :

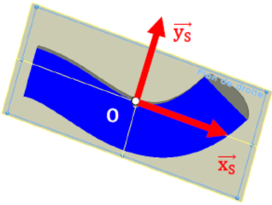


3.3.6. Opérateur d'inertie d'un solide présentant un plan de symétrie matérielle

Un plan de symétrie matérielle, anule deux des trois produits d'inertie. La matrice d'inertie $\bar{\bar{I}}(O,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x_S},\vec{y_S},\vec{z_S})}$, prend la forme ci-après.

Si $(O,\vec{x_S},\vec{y_S})$ plan de symétrie de S $\Rightarrow$ $\Rightarrow \bar{\bar{I}}(O,S)=$



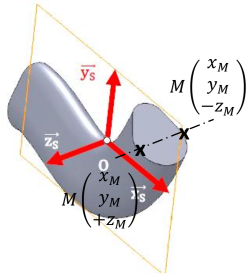


Démonstration

Soit S_1 la partie du solide délimitée par le plan $(O,\vec{x_S},\vec{y_S})$ et z > 0.

Soit S_2 la partie du solide délimitée par le plan $(O,\vec{x_S},\vec{y_S})$ et z < 0.

$D=\int_{(S)} yz\,dm = \int_{(S_1)} yz\,dm + \int_{(S_2)} y(-z)\,dm = 0$

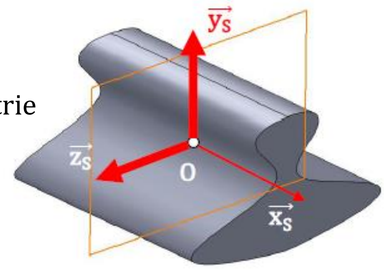


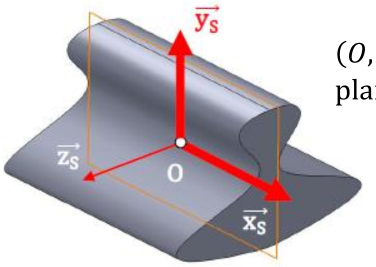
$(O,\vec{y_S},\vec{z_S})$ plan de symétrie de S $\Rightarrow \bar{\bar{I}}(O,S)=$

$(O,\vec{x_S},\vec{z_S})$ plan de symétrie de S $\Rightarrow \bar{\bar{I}}(O,S)=$

3.3.7. Opérateur d'inertie pour un solide présentant deux plans orthogonaux de symétrie matérielle

$(O,\vec{x_S},\vec{z_S})$ est plan de symétrie





$(O,\vec{x_S},\vec{y_S})$ est plan de symétrie

Deux plans de symétrie orthogonaux, annulent les trois produits d'inertie. La matrice d'inertie $\bar{\bar{I}}(O,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x_S},\vec{y_S},\vec{z_S})}$, prend la forme ci-dessous :

$\bar{\bar{I}}(O,S)=$

Démonstration

$(O, \overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{z_S})$ est plan de symétrie $\Rightarrow D = F = 0$

$(O, \overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S})$ est plan de symétrie $\Rightarrow D = E = 0$

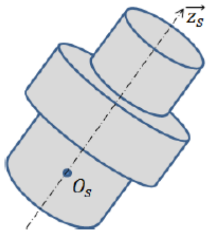
Donc : $D = E = F = 0$

3.3.8. Solide présentant une symétrie de révolution matérielle autour d'un axe

Un axe de révolution, annule les trois produits d'inertie ET entraine l'égalité de deux moments d'inertie. La matrice d'inertie $\bar{\bar{I}}(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})}$, prend la forme ci-dessous :

Si l'axe $(O_S, \overrightarrow{z_S})$ est l'axe de révolution : et

$\bar{\bar{I}}(O,S) =$



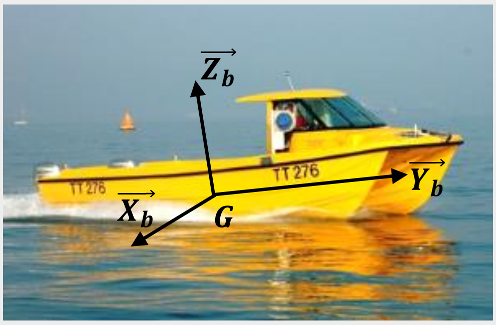
Démonstration

Si l'axe $(O_S, \overrightarrow{z_S})$ est l'axe de révolution, par rotation isométrique on a :

$\int_{(S)}(x^2 + z^2)dm = \int_{(S)}(y^2 + z^2)dm \implies A = B$

✍ Je me teste

1. Déterminer la forme de la matrice d'inertie du bateau (b) dont la photo est donnée. On le considère comme un solide homogène.



2. Faites de même pour le véhicule (v) post-moderne, ci-contre. Même hypothèse. Mettre en place une base et le centre d'inertie.

3.3.9. Opérateur d'inertie pour un point matériel

Soit un point matériel P de masse M : sa matrice d'inertie est nulle <u>au point P</u>.

$$\bar{\bar{I}}(P, point\ P) =$$

3.3.10. Opérateur d'inertie pour un ensemble de solides

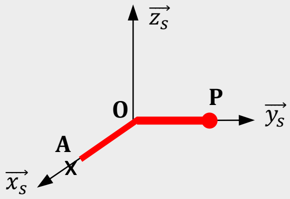
L'opérateur d'inertie d'un ensemble partitionné de n solides $\mathcal{E} = \{S_1, \ldots, S_i, \ldots, S_n\}$ est :

$\boxed{\bar{\bar{I}}(O, \mathcal{E}) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

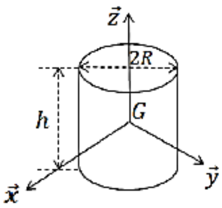
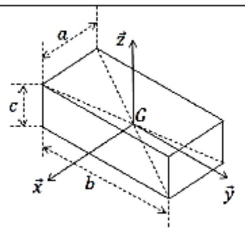
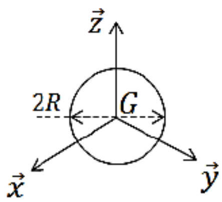
💣 Attention, danger : les opérateurs doivent être exprimés au même point.

Je me teste

Déterminer la matrice d'inertie d'un point matériel P de masse M au point O, puis au point A, tel que défini ci-contre. Les distances sont :
OP = r
OA = a



3.3.11. Opérateurs d'inertie fondamentaux

Cylindre de révolution		$\bar{\bar{I}}(G,S) = \begin{pmatrix} m\frac{R^2}{4}+m\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{R^2}{4}+m\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$
Parallélépipède rectangle		$\bar{\bar{I}}(G,S) = \begin{pmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Sphère		$\bar{\bar{I}}(G,S) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}_{(-,-,-)}$

✍ **Je me teste**

Calcul de la matrice d'inertie d'un cylindre de rayon R, de hauteur H, et de masse M.
Le cylindre (C) est homogène, d'axe $(G,\vec{x})$, où G est le centre d'inertie de (C).
En coordonnées cylindriques on rappelle que l'élément de volume est : $dv = rdrd\theta dz$.

1. Faire un schéma du cylindre avec les axes, et l'élément de volume.
2. Simplifier la matrice d'inertie en observant la géométrie particulière du solide.
3. Définir le domaine d'intégration volumique avec des inégalités encadrant les variables r, z, θ.
4. Calculer les termes de l'opérateur d'inertie en G en fonction de ρ, R, H en écrivant que $dm = \rho.dv$.
5. Eliminer la masse volumique ρ et écrivez finalement la matrice en fonction de M, R et H.
6. Soit le point A, centre de la base du cylindre. On a $\overrightarrow{GA} = -\frac{H}{2}\vec{x}$. Déterminer l'opérateur d'inertie de (C) au point A (théorème de Huygens).

Calcul de la matrice d'inertie d'un cylindre creux de hauteur H, et de masse M (tube creux).
Rayon intérieur : R_1 Rayon extérieur : R_2

7. Dérouler la méthode précédemment énoncée et trouver la matrice d'inertie.

4. LE TORSEUR CINETIQUE

4.1. Notion de cinétique

La cinétique, théorie partielle de la mécanique, fait appel aux notions de longueur, de temps, et de masse. Elle est le prolongement de la cinématique puisque son élaboration ne demande que l'introduction d'une nouvelle notion : celle de masse.

La cinétique est utile pour l'étude et les applications du Principe Fondamental de la dynamique et du théorème de l'énergie puissance.

Dans ce cours la masse sera invariante dans le temps (on parle alors de masse conservative).

4.2. Le torseur cinétique

4.2.1. Cas d'un élément ponctuel

Pour un élément M de masse m de vitesse $\vec{V}(M/R)$ relativement à un référentiel (R) on définit le torseur cinétique ponctuel du point M en mouvement dans R :

$$\{\mathcal{C}(M/R)\} = {}_{Q}\begin{Bmatrix} \vec{p}(M/R) \\ \overrightarrow{\sigma_Q}(M/R) \end{Bmatrix}$$

$\vec{p}(M/R)$ est la quantité de mouvement : $\vec{p}(M/R) = m.\vec{V}(M/R)$; unité $kg.m/s$

$\overrightarrow{\sigma_Q}(M/R)$ est le moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma_Q}(M/R) = \overrightarrow{QM} \wedge m.\overrightarrow{V(M/R)}$; unité $kg.m^2/s$

Note : $\vec{p}(M/R)$ est aussi appelé résultante cinétique.

Remarque : on remarquera que le moment cinétique est le moment de la quantité de mouvement par rapport au point Q.

4.2.2. Cas d'un ensemble mécanique discret $(\mathcal{D})$

On considère un ensemble mécanique $(\mathcal{D})$ constitué d'un ensemble discret d'éléments matériels $m_1, m_2, \dots, m_n$, auxquels on associe les masses m_i telles que ma masse totale est : $m = m_1 + \cdots + m_n$.

Si les éléments de $(\mathcal{D})$ sont tels que <u>les distances mutuelles entre chacun d'eux demeurent invariables</u> alors l'ensemble mécanique est appelé solide invariable (ou plus simplement solide).

On définit pour $(\mathcal{D})$ sa masse m et son centre d'inertie G.

Le torseur cinétique de $(\mathcal{D})$, $\{\mathcal{C}(\mathcal{D}/R)\} = {}_Q\begin{Bmatrix} \vec{p}(\mathcal{D}/R) \\ \overrightarrow{\sigma_Q}(\mathcal{D}/R) \end{Bmatrix}$, a pour composantes :

Quantité de mouvement : $\vec{p}(\mathcal{D}/R) = \sum m_i.\vec{V}(m_i/R) = m.\vec{V}(G/R)$

Moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma_Q}(\mathcal{D}/R) = \sum \overrightarrow{QM_i} \wedge (m_i.\vec{V}(m_i/R))$

4.2.3. Cas d'un ensemble continu solide (S)

On considère un ensemble continu S, soit un solide quelconque S homogène.

Le torseur cinétique de (S), $\{\mathcal{C}(S/R)\} = {}_Q\begin{Bmatrix} \vec{p}(S/R) \\ \overrightarrow{\sigma_Q}(S/R) \end{Bmatrix}$, a pour composantes :

$\vec{p}(S/R) = \int_{M\in S} \vec{V}(M/R)\,.\,dm_M$

$\overrightarrow{\sigma_Q}(S/R) = \int_{M\in S} \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}(M/R)\,.\,dm_M$

Ouverture/transition : dans la pratique il serait fastidieux de calculer ceci. Le paragraphe permet le calcul simple du torseur cinétique d'un solide S. Vive l'opérateur d'inertie !

4.2.4. Calcul du torseur cinétique d'un solide S

$$\{\mathcal{C}(S/R)\} = {}_Q\begin{Bmatrix} \vec{p}(S/R) \\ \overrightarrow{\sigma_Q}(S/R) \end{Bmatrix}$$

Résultante cinétique, on montre aisément à partir de la définition intégrale :

$$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

Moment cinétique, on montre (à partir de la définition intégrale mais moins aisément) :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_Q}(S/R) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Où $\bar{\bar{I}}[Q,S]$ est l'opérateur d'inertie du solide (S) au point Q.

Finalement le torseur cinétique de S par rapport au repère R s'écrit :

$$\boxed{\{\mathcal{C}(S/R)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{p}(S/R) = m.\vec{V}(G,S/R) \\ \overrightarrow{\sigma_Q}(S/R) = \bar{\bar{I}}[Q,S].\vec{\Omega}(S/R) + m.\overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{V(Q,S/R)} \end{matrix} \right\}_Q}$$

4.2.5. Cas particuliers du calcul du torseur cinétique

- Point Q fixe dans le repère de laboratoire : $\overrightarrow{V(Q,S/R)} = \vec{0}$, donc

- Si Q=G, centre d'inertie du solide S : $\overrightarrow{QG} = \vec{0}$, donc

- Formule de Koenig :

$$\overrightarrow{\sigma_Q}(S/R) = \bar{\bar{I}}[G,S].\vec{\Omega}(S/R) + m.\overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{V(G,S/R)}$$

La formule de Koenig permet d'obtenir le moment cinétique en un point quelconque, à partir des « caractéristiques » au centre d'inertie G : opérateur d'inertie et vitesse en G.

Démonstration de la formule de Koenig

Au point G on a le moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma_G}(S/R) = \bar{\bar{I}}[G,S].\vec{\Omega}(S/R)$

Or le moment cinétique étant le moment du torseur cinétique on peut écrire le changement de point entre G et Q :

$\overrightarrow{\sigma_Q}(S/R) = \overrightarrow{\sigma_G}(S/R) + \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{p(S/R)}$

$\overrightarrow{\sigma_Q}(S/R) = \overrightarrow{\sigma_G}(S/R) + \overrightarrow{QG} \wedge m\overrightarrow{V(G,S/R)}$

D'où :

$\overrightarrow{\sigma_Q}(S/R) = \bar{\bar{I}}[G,S].\vec{\Omega}(S/R) + m.\overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{V(G,S/R)}$

✍ Je me teste… et c'est pas si difficile

Soit un cylindre plein (C) de rayon R et masse M, d'axe $(G,\vec{x})$, roulant sans glisser sur le sol (R_g). Le point de contact sol/cylindre dans le plan d'étude $(\vec{y},\vec{z})$ est I.

La vitesse d'avancement du cylindre par rapport à R_g est : $\overrightarrow{V(G,C/R_g)} = V.\vec{y}$

a) Faire un dessin de la situation étudiée.
b) Calculer le vecteur rotation instantané : $\vec{\Omega}(C/R_g)$
c) Donner la forme de l'opérateur d'inertie du cylindre en G, $\bar{\bar{I}}[G,C]$, après avoir effectué les simplifications nécessaires conséquence des différentes symétries naturelles du solide étudié. Ne pas donner le contenu des termes de la matrice.
d) Déduire le moment cinétique en G : $\overrightarrow{\sigma_G}(C/R)$ en fonction de M, V et R.
e) Ecrire le torseur cinétique du cylindre (C) au point G.
f) Déduire le moment cinétique du cylindre en I : $\overrightarrow{\sigma_I}(C/R)$
g) Ecrire le torseur cinétique du cylindre (C) au point I.

5. L'ENERGIE CINETIQUE

5.1. Définition

L'énergie cinétique E_c (notée aussi T, parfois W) d'un ensemble mécanique (D) en mouvement par rapport à un repère de référence (R) est :

$$\underbrace{E_c(S/R)}_{J\ (Joule)} = \frac{1}{2}\int_{M\in S}\Big(\underbrace{\overrightarrow{V(M/R)}}_{m/s}\Big)^2 \underbrace{dm_M}_{kg}$$

L'énergie cinétique est l'énergie que possède un corps massique en mouvement. On l'appelle aussi « l'énergie de mouvement ».

Remarque : le Joule s'exprime, dans le système MKSA en kg.m^2.s^{-2}

5.2. Cas d'un solide (S)

Soit un solide (S) de masse M, animé d'un mouvement dans le repère R, pour lequel on définit les torseurs cinématique et cinétique :

Torseur cinématique de S au point A : $\{V(S/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \overrightarrow{V(A,S/R)}\end{Bmatrix}$

Torseur cinétique de S au point A : $\{C(S/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{p}(S/R)\\ \overrightarrow{\sigma_A(S/R)}\end{Bmatrix}$

On démontre que l'énergie cinétique s'exprime en fonction du comoment des torseurs cinétiques et cinématiques :

Soit :

Remarque 1 : Le comoment est indépendant du point de réduction des torseurs.

Remarque 2 : Il faut écrire les torseurs au même point pour effectuer le comoment, sinon cela n'a pas de sens !

5.3. Cas d'un ensemble de solides

Pour un ensemble E constitué des solides $S_1, \dots, S_i, \dots, S_n$ en mouvement dans un repère (R), l'énergie cinétique est :

5.4. Mouvement de translation dans le référentiel galiléen

Si le solide (S) de masse m possède un mouvement **de translation** de vitesse V par rapport au repère (R), son énergie cinétique est :

Où $\vec{V} = \overrightarrow{V(A,S/R)} = \overrightarrow{V(M,S/R)} = \overrightarrow{V(G,S/R)}$: tous les points M du solide (S) ont même vecteur vitesse par rapport à (R) à un instant t, car (S) est en translation dans (R).

<u>Démonstration</u>

Ecrivons les torseurs cinématique et cinétique de manière à calculer l'énergie cinétique.

Torseur cinématique de S au point A :

$$\{V(S/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) = \vec{0} \\ \overrightarrow{V(A,S/R)} = \vec{V} \end{Bmatrix}$$

Torseur cinétique de S au point A :

$$\{C(S/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{p}(S/R) = m\vec{V} \\ \overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = \bar{\bar{I}}[A,S].\underbrace{\vec{\Omega}(S/R)}_{\vec{0}} + m\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A,S/R)} \end{Bmatrix}$$

Calculons l'énergie cinétique :

$$2E_c(S/R) = \{V(S/R)\} \otimes \{C(S/R)\} = \overbrace{\vec{\Omega}(S/R)}^{\vec{0}}\,.\,\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} + \overrightarrow{V(A,S/R)}.\vec{\mathrm{p}}(S/R) = \vec{V}.\mathrm{m}\vec{V}$$

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\vec{V}^2$$

5.5. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Si le solide (S) de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation Δ, est animé d'une vitesse angulaire $\omega_{S/R}$ par rapport à (R), son énergie cinétique est :

$$\boxed{\phantom{E_c(S/R) = \frac{1}{2} J \omega^2}}$$

<u>Démonstration</u>

Ecrivons les torseurs cinématique et cinétique de manière à calculer l'énergie cinétique.

L'axe de rotation Δ est $(O,\vec{z})$.

Torseur cinématique de S au point O de l'axe de rotation :

$$\{V(S/R)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) = \omega_{S/R}\vec{z} \\ \overrightarrow{V(O,S/R)} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Torseur cinétique de S au point A :

$$\{C(S/R)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{\mathrm{p}}(S/R) = m\overrightarrow{V(G,S/R)} \\ \overrightarrow{\sigma_O(S/R)} = \bar{\bar{I}}[O,S].\vec{\Omega}(S/R) + m\overrightarrow{OG} \wedge \underbrace{\overrightarrow{V(O,S/R)}}_{\vec{0}} \end{Bmatrix} =$$

$$\{C(S/R)\} = {}_O\begin{Bmatrix} m\overrightarrow{V(G,S/R)} \\ \bar{\bar{I}}[O,S].\,\omega_{S/R}\vec{z} \end{Bmatrix}$$

Calculons l'énergie cinétique :

$$2E_c(S/R) = \{V(S/R)\} \otimes \{C(S/R)\} = \vec{0}.\,m\overrightarrow{V(G,S/R)} + \left(\omega_{S/R}\vec{z}\right).\bar{\bar{I}}[O,S].\,\omega_{S/R}\vec{z}$$

$$2E_c(S/R) = \left(\omega_{S/R}\vec{z}\right).\bar{\bar{I}}[O,S].\,\omega_{S/R}\vec{z}$$

$$2E_c(S/R) = \left(\omega_{S/R}\vec{z}\right).\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & J_\Delta(S) \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})}.\left(\omega_{S/R}.\vec{z}\right) =$$

$$2E_c(S/R) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{S/R} \end{pmatrix}_{R_S}.\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & J_\Delta(S) \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{S/R} \end{pmatrix}_{R_S}$$

$$2E_c(S/R) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{S/R} \end{pmatrix}_{R_S} . \left[-E\omega_{S/R}.\overrightarrow{x_S} - D\omega_{S/R}.\overrightarrow{y_S} + J_\Delta(S)\omega_{S/R}.\overrightarrow{z_S}\right]$$

$$2E_c(S/R) = J_\Delta(S).\left(\omega_{S/R}\right)^2$$

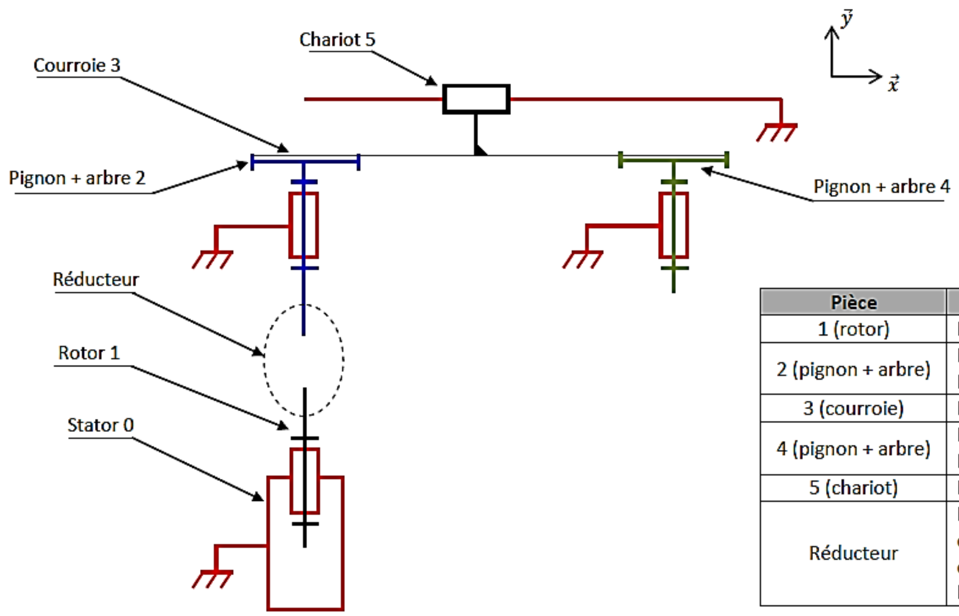
✍ Je me teste

Reprenez le cylindre précédent, pour lequel vous avez calculé le torseur cinétique : cylindre plein (C) de rayon R et masse M, d'axe $(G, \vec{x})$, roulant sans glisser sur le sol R_g au point I dans le plan d'étude $(\vec{y}, \vec{z})$. Vitesse d'avancement du cylindre par rapport à R_g: $\overrightarrow{V(G, C/R_g)} = V.\vec{y}$

a) Calculer le torseur cinématique de (C)/R_g , $\{V(C/R_g)\}$, au point G et au point I.
b) Rappeler le torseur cinétique $\{\mathcal{C}(C/R_g)\}$ au point G et au point I.
c) Calculer l'énergie cinétique $E_c(C/R_g)$ de deux manières différentes.
d) Remarquer que, quel que soit le point par lequel on passe, on obtient le même résultat !

6. INERTIE EQUIVALENTE D'UNE CHAÎNE DE COMPOSANTS MECANIQUES

Prenons l'exemple de la transmission de puissance mécanique de la cordeuse de raquette : un moteur électrique {0,1} entraîne un réducteur. L'arbre de sortie du réducteur entraîne un pignon 2 sur lequel engrène une chaîne 3. Le chariot tensionneur de corde 5 est fixé sur la chaîne. La rotation du pignon 2 est donc transformée en translation du chariot 5.



Pièce	Caractéristiques
1 (rotor)	Moment d'inertie autour de $(A,\vec{y})$: J_1
2 (pignon + arbre)	Moment d'inertie autour de $(A,\vec{y})$: J_2 Rayon du pignon : R
3 (courroie)	Masse négligée
4 (pignon + arbre)	Moment d'inertie autour de $(B,\vec{y})$: J_4 Rayon du pignon : R
5 (chariot)	Masse M
Réducteur	Moment d'inertie des pièces mobiles du réducteur ramené sur l'arbre d'entrée 1 : $J_{réd}$ Rapport de réduction : r

Chacun des composants possède une « une inertie » : masse pour un composant translatant, moment d'inertie pour un composant tournant.

Calculons l'énergie cinétique totale $E_c(E/0)$ de l'ensemble (E) formé par la réunion des composants en mouvement, E = {1,2,3,4,5,réducteur} :

Le mécanisme possède une seule mobilité utile donc il existe des relations entre les différentes caractéristiques cinématiques. Pour une étude dynamique **Il est souvent intéressant d'exprimer l'énergie cinétique du système matériel complet en fonction d'une seule de ces caractéristiques cinématiques**.

- On peut exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble en fonction de la vitesse de l'entrée donc de l'arbre moteur, ici le rotor 1.

OU

- On peut exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble en fonction de la vitesse de la sortie donc ici du chariot 5 l'arbre moteur.

Cela est possible car l'ensemble est cinématique lié.

6.1. Inertie équivalente ramenée à l'arbre d'entrée

Exprimons toutes les vitesses utiles en fonction de la vitesse de l'arbre d'entrée, $\omega_{1/0}$.

L'énergie cinétique est donc :

Le facteur nommé $J_{eqmoteur}$, homogène à un moment d'inertie, apparait comme étant l'inertie de l'ensemble E rapporté à l'axe de rotation de 1/0 puisque :

6.2. Inertie équivalente ramenée à la sortie (mouvement de translation ici)

De la même manière que précédemment, exprimons toutes les vitesses utiles en fonction de la vitesse de la sortie, soit la vitesse de translation du chariot : $V_{5/0}$.

On obtient après somme et factorisation de la vitesse $V_{5/0}$:

Le facteur nommé $M_{eqchariot}$, homogène à une masse, apparait comme étant l'inertie de l'ensemble E rapporté à la translation du chariot 5/0 :

6.3. Intérêt de l'inertie équivalente

Nous verrons dans les chapitres qui suivent que l'on peut résoudre un problème de dynamique grâce au Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) ou au Théorème de l'Energie Puissance (=TEP, théorème de l'énergie cinétique dérivé temporellement).

Pour résoudre dynamiquement un problème mécanique constitué d'une chaîne de composants liés cinématiquement, il faudrait faire plusieurs isolements successifs et appliquer plusieurs fois le PFD ou le TEP.

Grâce à l'inertie équivalente un seul isolement sera nécessaire et une seule équation seront nécessaires : isolement de l'ensemble mobile et résolution. Cela est possible car désormais on peut calculer l'inertie de cet ensemble mobile (moment d'inertie équivalent ou masse équivalente) rapportée à un composant unique.

FIN DU COURS DE CINÉTIQUE