DYNAMIQUE DU SOLIDE

PARTIE 2 : THEOREME DE L'ENERGIE PUISSANCE

COURS

Table des matières

Illustration 1ère de couverture

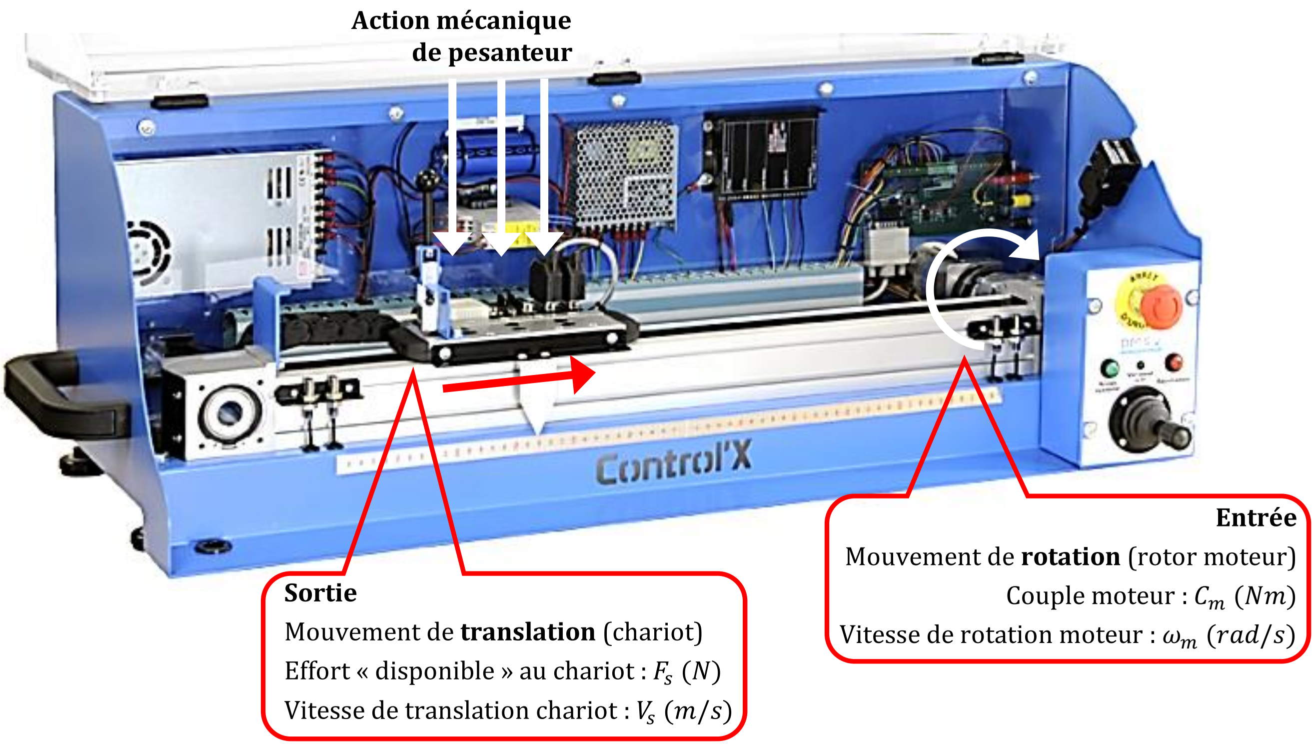
Ascenseur rotatif de l'écluse de Falkirk en Ecosse. Le théorème de l'énergie puissance permet le dimensionnement simple de la motorisation.

1. PROBLÉMATIQUE : ÉQUATION DE MOUVEMENT D'UN SYSTEME

1.1. Exemple du pilotage du chariot uni-axe Control'X.

Le système Control'X pilote un axe de déplacement linéaire asservi, pour lequel la position du solide (chariot) à transporter doit être connue à chaque instant et doit suivre une loi le plus précisément et rapidement possible.

Le chariot est guidé en translation et mis en mouvement par un système poulie/courroie.



L'étude de l'asservissement de position nécessite la connaissance de la relation entre le couple fourni par le moteur et :

- la position, la vitesse et l'accélération du chariot
- l'effort de sortie (s'exerçant sur le chariot)
- les actions mécaniques extérieures au système
- les propriétés inertielles des pièces en mouvement.

Cette relation est appelée équation de mouvement de la chaîne de transmission de puissance.

1.2. Equation de mouvement et utilisation

Définition

L'équation de mouvement (ou loi de mouvement) d'un mécanisme à une mobilité utile est la loi décrivant le mouvement des pièces du mécanisme.

Cette loi relie la grandeur mécanique du mouvement moteur aux grandeurs mécaniques du mouvement de sortie en fonction des actions mécaniques extérieures appliquées au mécanisme.

La connaissance de l'équation de mouvement permet de :

- déterminer la fonction de transfert des blocs correspondants lors de l'étude de l'asservissement d'un système ;
- déterminer les capacités nécessaires de l'actionneur connaissant les propriétés souhaitées du mouvement récepteur (dimensionnement) ;
- déterminer les caractéristiques du mouvement de sortie pour un actionneur donné (analyse).

Comment la loi de mouvement s'obtient-elle ?

La connaissance de l'équation de mouvement s'obtient par :

- l'application du théorème de l'énergie-puissance (TEP)

ou

- l'application du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD).

L'application du théorème de l'énergie-puissance est plus simple et moins calculatoire que l'application du PFD si l'objectif est d'obtenir une loi de mouvement.

2. LE THEOREME DE L'ENERGIE PUISSANCE

2.1. Cas d'un solide unique (S)

Enoncé du théorème de l'énergie puissance pour **un solide unique**

A tout instant, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide (S) est égale à la puissance galiléenne développée par les actions mécaniques **extérieures** sur ce solide. On écrit :

2.2. Cas d'un ensemble de solide (E)

Enoncé du théorème de l'énergie puissance pour un ensemble de solides

Soit E un ensemble de solides $S_1, S_i \dots S_n$ en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g : $E = \{S_1, \dots, S_n\}$.

A tout instant, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble de solides E est égale à la somme :

- de la puissance développée par les actions mécaniques extérieures à E dans son mouvement par rapport à R_g ,

et

- des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de E (= puissances des AM intérieures)

On écrit :

Remarque : le théorème de l'énergie puissance est appelé théorème de la puissance cinétique en sciences physique.

Attention : le théorème de l'énergie puissance est parfois appelé, à tort, théorème de l'énergie cinétique. C'est une erreur : le théorème de l'énergie puissance est la dérivée temporelle du théorème de l'énergie cinétique. Le TEP s'écrit à un instant donné, il est instantané, alors que le TEC s'écrit entre deux configurations différentes pris par le système isolé à deux instants distincts.

La notion d'énergie cinétique a été définie dans le cours précédent portant sur la cinétique du solide.
Il faut maintenant définir la notion de puissance.

3. NOTION DE PUISSANCE

3.1. Introduction physique

3.1.1. Idée originelle de la puissance

La définition originelle de la puissance est l'énergie dépensée où transmise par unité de temps : $P = \frac{dE}{dt}$. E est en Joules, t en secondes, P en Watts.

L'idée au départ est de quantifier la performance d'un système vis-à-vis de l'énergie qu'il transmet, absorbe, etc. Ainsi un système A est plus performant qu'un système B, non s'il converti plus d'énergie, mais s'il produit la même énergie en une durée moindre.

Prenons le cas de l'énergie mécanique dont la quantification s'effectue par le calcul du travail.

Le travail d'une force $\vec{F}$ dont on déplace le point d'application de A vers B est : $W = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$.

Le travail du poids pour un corps de masse M est ainsi : $W = Mgh$ où h est l'altitude.

Imaginons deux personnes A, B, de même masse, 70 kg, qui montent 4 étages d'un immeuble par les escaliers, soit 12 m. Si A effectue la montée en 20s, et B en 25s, A aura été plus performant.

La puissance dépensée par A est : $P_A = \frac{70\times 9{,}81\times 12}{20} = 410\ W$

La puissance dépensée par B est : $P_A = \frac{70\times 9{,}81\times 12}{25} = 330\ W$

La personne A aura été plus puissante que B lors de cette montée.

Quelques ordres de grandeurs de puissance

Individu moyen aérobie	100 W	Moteur de voiture moyenne	74 kW
Individu moyen anaérobie (max)	600W	Moteur de petit scooter	3 kW
Sportif haut niveau aérobie	500 W	Tranche de centrale nucléaire	1300 MW
Sportif haut niveau anaérobie (max)	1000 W	Ampoule à filament	80 W
Soulever une masse de 1 kg sur 1m en 1s	10 W	Ordinateur individuel	100 W

3.1.2. Calcul simple

Prenons le cas du travail d'une force $\vec{F}$ subissant un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dx}$. Le travail est : $dW = \vec{F}.\overrightarrow{dx}$.

La puissance instantanée de la force $\vec{F}$ est donc : $P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.\overrightarrow{dx}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$

Nous parlerons dans ce paragraphe de la puissance d'une action mécanique et nous mettrons en évidence ce fait : La puissance d'une action mécanique est le produit d'une $grandeur\ de\ type\ force$ avec une $grandeur\ de\ type\ vitesse$.

3.2. Définition

3.2.1. Cas d'une force

Soit un point M de vitesse $\overrightarrow{V_{M/R}}$ par rapport à un repère R, et sur lequel « agit » une force $\overrightarrow{F_{(M)}}$. On appelle puissance développée par la force $\overrightarrow{F_{(M)}}$ agissant sur M l'expression :

$$\boxed{\mathcal{P}(\overrightarrow{F_{(M)}}/R) \ = \ \overrightarrow{F_{(M)}}.\overrightarrow{V_{M/R}}}$$

3.2.2. Cas général d'une action mécanique s'exerçant d'un milieu sur un système

Soit une action mécanique d'un milieu j sur un système $\mathcal{D}$ (déformable ou non). Cette action mécanique est définie en tout point $M \in \mathcal{D}$ à l'aide d'une force élémentaire $\overrightarrow{F_{(M)}}$ de moment nul en M (glisseur). Le mouvement de $\mathcal{D}$ par rapport au repère R est connu. Le puissance mécanique développée par cette action dans le mouvement de $\mathcal{D}$ par rapport à R est :

$$\boxed{\mathcal{P}(j \rightarrow \mathcal{D}/R) \ = \int_{M \in \mathcal{D}} \overrightarrow{V_{M/R}}.\ \overrightarrow{dF_{(M)}}}$$

Le champ de forces $\overrightarrow{dF_{(M)}}$ peut être dû à la pesanteur, l'action d'un fluide, l'action d'un solide sur une surface ou une ligne, une action électrique.

3.3. Cas d'un solide

Le mouvement d'un solide S (un système $\mathcal{D}$ peut être considéré comme un solide s'il est indéformable) par rapport au repère R est connu et défini par le torseur cinématique :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \ _A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}(S/R) \\ \overrightarrow{V(A,S/R)} \end{Bmatrix}$$

Le torseur associé à l'action mécanique (d'origine quelconque) du milieu j sur le solide S est noté

$$\{\mathcal{F}(j \to S)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(j \to S) \\ \overrightarrow{M_A(j \to S)} \end{Bmatrix}$$

On montre que la puissance développée par le torseur d'action mécanique $\{\mathcal{F}(j \to S)\}$ dans le repère R est (les deux torseurs mis en jeu doivent être réduits au même point) :

Avec les éléments de réduction, cela donne :

Et, de manière plus pragmatique encore :

$$\boxed{\underbrace{P(j \to S/R)}_{W} = \underbrace{\vec{\Omega}(S/R)}_{rad/s}.\underbrace{\overrightarrow{M_A(j \to S)}}_{Nm} + \underbrace{\overrightarrow{V(A,S/R)}}_{m/s}.\underbrace{\vec{R}(j \to S)}_{N}}$$

💣 danger : attention à réduire les deux torseurs au même point !

3.4. Cas particuliers à connaître

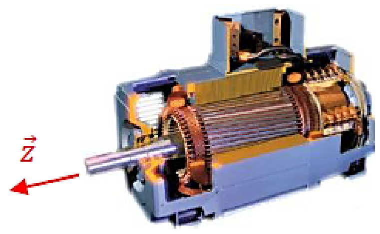
3.4.1. Puissance développée par le stator d'un moteur sur le rotor

$$P_{stator \to rotor/\mathcal{R}} = \{\tau_{stator \to rotor}\} \otimes \{\mathcal{V}_{rotor/\mathcal{R}}\}$$

où $\{\tau_{stator \to rotor}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{stator \to rotor}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A,stator \to rotor}} = C_m \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$

et $\{\mathcal{V}_{rotor/\mathcal{R}}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{rotor/\mathcal{R}}} = \omega_{rotor/\mathcal{R}} \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A,rotor/\mathcal{R}}} = ?? \end{Bmatrix}$

D'où $\boxed{P_{stator \to rotor/\mathcal{R}} = C_m \cdot \omega_{rotor/\mathcal{R}}}$.



$\mathcal{R}$ est le référentiel attaché au stator

3.4.2. Puissance du poids

L'action de la pesanteur sur le solide (S) est un glisseur appliqué en son centre d'inertie G : $\{F(pes \to S)\} = \left\{ \begin{matrix} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$

Le torseur cinématique de S/Rg en G est : $\{V(S/R_g)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R_g) \\ \vec{V}(G,S/R_g) \end{matrix} \right\}_G$

La puissance est le comoment des deux torseurs, le résultat est immédiatement :

Remarque : il suffit donc de calculer le produit scalaire $m\vec{g}.\vec{V}(G,S/R_g)$ en fonction du paramétrage du problème.

3.4.3. Puissance développée par l'action d'un fluide sur le piston d'un vérin

$$P_{fluide\to piston/\mathcal{R}} = \{\tau_{fluide\to piston}\}\otimes\{\mathcal{V}_{piston/\mathcal{R}}\}$$

où $\{\tau_{fluide\to piston}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_{fluide\to piston}} = p\cdot S\cdot\vec{z} \\ \overrightarrow{M_{A,fluide\to piston}} = \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$

et $\{\mathcal{V}_{piston/\mathcal{R}}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{piston/\mathcal{R}}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A,piston/\mathcal{R}}} = V\cdot\vec{z} \end{matrix} \right\}_A$

D'où $\boxed{P_{fluide\to piston/\mathcal{R}} = p\cdot S\cdot V = F_{fluide}\cdot V}$.

$\mathcal{R}$ est le référentiel attaché au corps

3.4.4. Puissance hydraulique

L'énergie hydraulique est l'énergie mise en jeu lors du déplacement ou de l'accumulation d'un fluide incompressible telle que l'huile, l'eau douce ou l'eau de mer. Ce déplacement produit un travail mécanique, donc de la puissance.

$P_e\ (W) \longrightarrow$ Système hydraulique $\longrightarrow P_s\ (W)$

Débit volumique : $Q_v\ (m^3/s)$

La puissance hydraulique absorbée par un système, traversé par un fluide de débit Q_v, et dont la chute de pression entre l'entrée et la sortie est $p_e - p_s$, s'écrit :

m^3/s

$$\boxed{P_{hyd} = -Q_v(p_e - p_s)}$$

W Pa

Si $p_e > p_s, P_{hyd} < 0$: c'est le cas des moteurs hydrauliques et vérins pour lesquels la pression chute de l'entrée vers la sortie.
Si $p_e < p_s, P_{hyd} > 0$: c'est le cas des pompes pour lesquelles la pression en aval est supérieure à celle en amont.

Le débit Q_v (m^3/s) s'exprime en fonction de la vitesse de déplacement du fluide V (m/s) à travers une section S (m^2) :

$$Q_v = V \times S$$

Il est aussi égal au volume de fluide écoulé vol (m^3) par unité de temps :

$$Q_v = \frac{dvol}{dt}$$

La chute de pression $\Delta p = p_e - p_s$ est aussi appelée perte de charge.

3.5. Puissance développée par les actions mutuelles entre deux solides

3.5.1. Définition

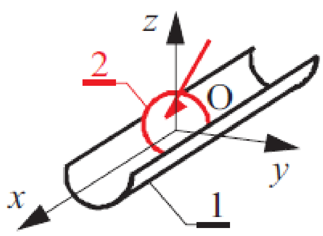
On appelle puissance des inter-efforts, la puissance développée par les actions mutuelles entre deux solides.
Considérons deux solides 1 et 2 en mouvement par rapport à un repère R. La puissance développée par les actions mutuelles entre les solides 1 et 2 pour une loi physique quelconque est :

Cette relation montre que la puissance développée par un torseur d'inter-effort est indépendante du repère de référence R, seul intervient le mouvement de 1/2. On pourra donc noter simplement $P(1 \leftrightarrow 2)$ sans faire mention du repère.

3.5.2. Cas particulier des liaisons parfaites

Une liaison entre deux solides 1 et 2 est dite énergétiquement parfaite si : $P(1 \leftrightarrow 2) = 0$.

<u>Exemple 1 : Liaison sphère cylindre d'axe $(O, \vec{x})$ et de centre O</u>



Torseur cinématique : $\{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) \\ V.\vec{x} \end{Bmatrix}$

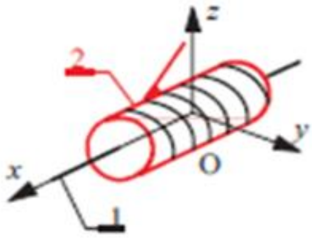
Torseur des AM transmissibles : $\{\mathcal{F}(1 \to 2)\} = {}_O\begin{Bmatrix} Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

La puissance des inter-efforts dans la liaison s'écrit :

$$P(1 \leftrightarrow 2) = \{\mathcal{F}(1 \to 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \otimes {}_O\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) \\ V.\vec{x} \end{Bmatrix}$$

$$P(1 \leftrightarrow 2) = (Y.\vec{y} + Z.\vec{z}).V.\vec{x} + \vec{0}.\vec{\Omega}(2/1) = 0$$

<u>Exemple 2 : liaison hélicoïdale d'axe $(O,\vec{x})$ de pas réduit</u> $p^* = \frac{p}{2\pi}$ (en rad/s)



Torseur cinématique : $\{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \omega.\vec{x} \\ V.\vec{x} \end{Bmatrix}$

Avec : $V = p^*.\omega$ (m/s ; m/rad ; rad/s)

Torseur des AM transmissibles : $\{\mathcal{F}(1 \to 2)\} = {}_O\begin{Bmatrix} X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ L.\vec{x} + M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{Bmatrix}$

Avec : $L = -p^*.X$ (Nm ; m/rad ; N)

La puissance des inter-efforts dans la liaison s'écrit :

$$P(1 \leftrightarrow 2) = \{\mathcal{F}(1 \to 2)\} \otimes \{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ L.\vec{x} + M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{Bmatrix} \otimes {}_O\begin{Bmatrix} \omega\vec{x} \\ V\vec{x} \end{Bmatrix}$$

$$P(1 \leftrightarrow 2) = (X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}).V\vec{x} + (L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}).\omega\vec{x}$$

$$P(1 \leftrightarrow 2) = VX + L\omega = (p^*\omega)X + (-p^*X)\omega = 0$$

Je me teste

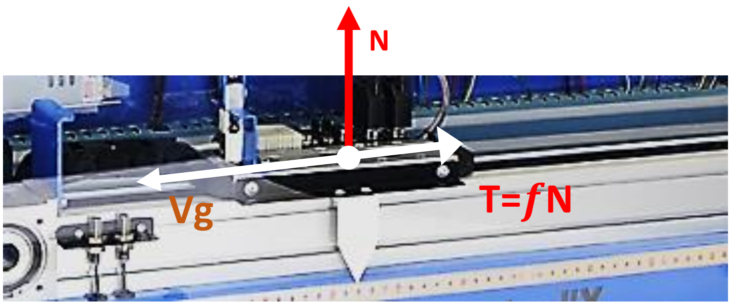
Démontrer que la puissance des inter-efforts est nulle pour les liaisons : pivot, glissière, appui plan, sphérique, sphère/plan.

3.5.3. Puissance des actions de contact avec frottement <u>et glissement</u>

C'est le cas typique d'un chariot en liaison glissière sur son bâti (Control'X, Cordeuse, pont roulant).

On rappelle qu'il y a glissement entre le bâti et le chariot si la vitesse de glissement n'est pas nulle. Elle se note :

$\overrightarrow{V_{glissement}} = \overrightarrow{V(A, chariot/bâti)} = V_g.\vec{x}$. Où $\vec{x}$ est la direction du déplacement.



On rappelle que les lois de Coulomb modélisant le frottement imposent :

La vitesse $\overrightarrow{V(A, chariot/bâti)}$ est opposée à l'effort tangentiel $\overrightarrow{T(bati \to chariot)} = T.\vec{x}$

La puissance de l'action du bâti sur le chariot est :

$P(bâti \to chariot/R) = \{\mathcal{F}(bâti \to chariot)\} \otimes \{\mathcal{V}(chariot/bati)\}$

$$P(bâti \rightarrow chariot/R) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} T\vec{x} + N\vec{z} \\ \overrightarrow{M_A}(bâti \rightarrow chariot) \end{Bmatrix}} \otimes \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -V_g\vec{x} \end{Bmatrix}}$$

$$\boxed{P(bâti \rightarrow chariot/R) = -V_g.T}$$

Si f est le coefficient de frottement chariot/bâti, il vient :

$$\boxed{P(bâti \rightarrow chariot/R) = -f.N.V_g}$$

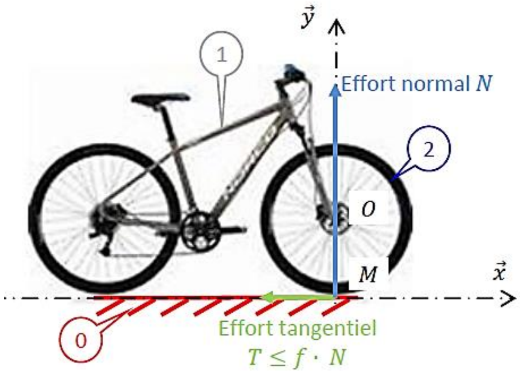
Si l'effort normal est la conséquence unique du poids mg du chariot :

$$\boxed{P(bâti \rightarrow chariot/R) = -f.mg.V_g}$$

3.5.4. Cas du roulement sans glissement

C'est le cas classique d'une roue de véhicule roulant sur le sol. Le contact est modélisé ponctuel.

On rappelle qu'il y a roulement sans glissement de 2/0 si la vitesse de glissement entre 2 et 0 au point de contact M est nulle : $\overrightarrow{V_{glissement}} = \overrightarrow{V(M, roue2/sol0)} = \vec{0}$.



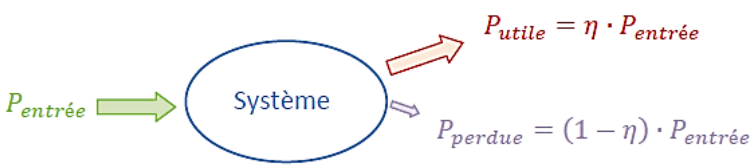
$$P(sol \rightarrow roue/R) = \{\mathcal{F}(sol \rightarrow roue)\} \otimes \{\mathcal{V}(roue/sol)\}$$

$$P(sol \rightarrow roue/R) = \underset{M}{\begin{Bmatrix} T\vec{x} + N\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \otimes \underset{M}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega(roue/sol)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

$$P(sol \rightarrow roue/R) = (T\vec{x} + N\vec{z}).\vec{0} + \overrightarrow{\Omega(roue/sol)}.\vec{0}$$

3.5.5. Cas d'une puissance « perdue » quantifiée par un rendement

Pour un système tel que réducteur, glissière, ou pivot dont le rendement η est donné, la puissance mécanique « perdue », c'est-à-dire convertie en puissance calorifique est :



FIN DU COURS SUR LE THEOREME DE L'ENERGIE PUISSANCE

✍ Je me teste… le TEP dans un cas simple

Une voiture de masse m se déplace à la vitesse $v(t)$.
Alors que la voiture est lancée, on ralenti en coupant la commande d'accélération. La voiture décélère. L'effort de l'air sur la voiture (trainée) est proportionnel au carré de la vitesse : $F_t = K.v(t)^2$.
On considère la voiture en « roue libre » sans frein moteur, ni freinage commandé par le conducteur. Seul l'effort de l'air s'oppose au déplacement.

1. Faire le bilan des puissances extérieures.
2. Faire le bilan des puissances intérieures.
3. Appliquer le TEP et déduire la loi de mouvement de la voiture (équation différentielle entre $v(t)$, $\dot{v}(t)$…
4. Résoudre cette équation différentielle et trouver l'évolution de la vitesse $v(t)$. La vitesse initiale est notée V_i. A quelle instant T_2 la vitesse est-elle réduite de moitié ?
5. Tracer l'allure de la loi $v(t)$.

6. Faire la même étude pour le véhicule en roue libre mais dans une pente descendante d'angle α. Mêmes conditions de ralentissement.