DYNAMIQUE DU SOLIDE

PARTIE 3 : PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

COURS

Table des matières

1. ENONCE DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

1.1. Enoncé du principe fondamental de la dynamique

A chaque instant t et pour tout système matériel (S), le torseur des actions mécaniques extérieures à (S) noté $\{\mathcal{F}(\bar{S} \to S)\}$ est égal au torseur dynamique de S dans le repère galiléen, noté $\{\mathcal{D}(S/R_g)\}$:

1.2. Théorèmes généraux

Le principe fondamental de la dynamique, énoncé précédemment sous forme de torseur, se décline en deux théorèmes énoncés sous forme vectorielle pour un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G.

Théorème de la résultante dynamique :

Théorème du moment dynamique :

1.3. Autres écritures du principe fondamental de la dynamique

On donne, juste pour information, les deux cas particuliers ci-dessous dont l'appellation est plutôt utilisée en sciences physiques et dynamique du point.

1.3.1. Théorème de la quantité de mouvement

Il se décline du théorème de la résultante dynamique :

$$\overrightarrow{R(\bar{S} \to S)} = \left[\frac{d\overrightarrow{p(S/R)}}{dt}\right]_{R_g}$$

Où $\vec{p}(S/R)$ est la quantité de mouvement du solide (S) dans la repère (R).

1.3.2. Théorème du moment cinétique

Il s'agit de la déclinaison du théorème du moment dynamique pour un cas particulier.

Si on écrit le théorème du moment dynamique en G, centre d'inertie de l'ensemble isolé, ou en un point fixe dans le repère galiléen, le théorème du moment dynamique devient :

$$\overrightarrow{M_G(\bar{S} \to S)} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_G(S/R_g)}}{dt}\right]_{R_g}$$

En G, ou en un point fixe par rapport à R_g.

1.4. Utilisation du PFD

Le principe fondamental de la mécanique permet :

- de déterminer les actions de liaison dans un système,
- de déterminer l'équation de mouvement d'une pièce mécanique connaissant les actions extérieures appliquées,
- de déterminer la (ou les) équations du mouvement globale d'un mécanisme donné (lien entre A.M. d'entrée et mouvement de sortie).

Il faut maintenant définir le torseur dynamique.

2. LE TORSEUR DYNAMIQUE

2.1. Cas de l'élément ponctuel M

Pour un élément M de masse m, d'accélération $\overrightarrow{\Gamma(M,R)}$ relativement à un référentiel R, on définit le torseur dynamique :

Où :

$\overrightarrow{A(M/R)}$ est la quantité d'accélération et vaut : $\overrightarrow{A(M/R)} =$

$\overrightarrow{\delta_Q(M/R)}$ est le moment dynamique en un point Q : $\overrightarrow{\delta_Q(M/R)} =$

2.2. Cas d'un ensemble mécanique discontinu (D)

On considère un ensemble mécanique (D) constitué d'un ensemble discret d'éléments matériels $M_1, M_2, \dots, M_n$, de masse $m_1, m_2, \dots, m_n$. On définit aussi pour (D), sa masse m et son centre d'inertie G. Les distances relatives des différents éléments sont constantes.

Le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_g)\}$ a pour résultante et moment :

$$\overrightarrow{A(D/R)} = \sum_i m_i.\overrightarrow{\Gamma(M_i,R)} = m.\overrightarrow{\Gamma(\boldsymbol{G},R)}$$

$\overrightarrow{\delta_Q(D/R)} = \sum_i \overrightarrow{QM_i} \wedge \left(m_i.\overrightarrow{\Gamma(M_i,R)}\right)$

2.3. Cas d'un ensemble continu solide (S)

On considère un ensemble continu (S).
Le torseur dynamique $\left\{\mathcal{D}\left(S/R_g\right)\right\}$ a pour résultante et moment :

$\overrightarrow{A(S/R)} = \int_{M\in S} \overrightarrow{\Gamma(M,R)}.dm$
$\overrightarrow{\delta_Q(S/R)} = \int_{M\in S} \overrightarrow{QM} \wedge \overrightarrow{\Gamma(M,R)}.dm$

On n'effectue jamais ces calculs intégraux : on utilise les résultats du paragraphe suivant découlant des définitions locales intégrales.

2.4. Calcul pratique du torseur dynamique pour un solide continu

2.4.1. Calcul de la résultante dynamique (quantité d'accélération)

Théorème : dans un référentiel quelconque (R), la quantité d'accélération totale d'un solide (S) est la même qu'aurait son centre d'inertie G affecté de la masse totale m de (S).

Démonstration : assez aisée à partir de la définition intégrale précédente.

2.4.2. Calcul du moment dynamique

Après calculs effectués à partir de la définition intégrale précédente, il vient :

Démonstration : pas aisée à partir de la définition intégrale.

<u>Remarque très importante</u> : $\overrightarrow{V(Q/R)}$ est la vitesse absolue du point Q dans (R), c'est-à-dire la vitesse du point géométrique Q par rapport à (R). Ce n'est pas, comme il est

habituel de faire en mécanique du solide, la vitesse de Q appartenant à (S) par rapport à (R).

Dans certains cas, on peut avoir : $\overrightarrow{V(Q/R)} \neq \overrightarrow{V(Q,S/R)}$

2.4.3. Bilan du torseur dynamique

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{A(M/R)} = m.\overrightarrow{\Gamma(\boldsymbol{G},S/R)} \\ \overrightarrow{\delta_Q(M/R)} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_Q(S/R)}}{dt}\right)_R + \overrightarrow{V(Q/R)} \wedge m.\overrightarrow{V(\boldsymbol{G},S/R)} \end{matrix} \right\}_Q$$

2.4.4. Cas particuliers

- Si Q est un point fixe dans le mouvement de (S) / (R) le moment dynamique s'écrit :

- Si Q est le centre d'inertie G du solide (S), le moment dynamique s'écrit :

Démonstration des deux cas particuliers précédents : évidente !

- Si le solide S de centre d'inertie G possède un <u>mouvement de translation</u> dans le référentiel R le moment dynamique <u>exprimé en $\boldsymbol{G}$</u> est nul :

Démonstration : pas évidente mais facile. Il y a juste à écrire : ça vient tout seul !

- Si le solide S est en rotation autour d'un axe $\Delta = (A, \vec{u})$ fixe dans le repère (R) :

2.5. Propriété du torseur dynamique

Comme tout torseur, le torseur dynamique permet d'écrire entre deux points différents les moments dynamiques grâce à la résultante :

Je me teste

Reprenons le cylindre roulant sans glisser sur le sol, étudié lors du cours de cinétique.

Soit un cylindre plein (C) de rayon R et masse M, d'axe $(G,\vec{x})$, roulant sans glisser sur le sol (R_g). Le point de contact sol/cylindre dans le plan d'étude $(\vec{y},\vec{z})$ est I.

Le cylindre roule maintenant sur un sol en descente de pente $\tan\alpha$. Il est entraîné par son poids propre. La vitesse d'avancement du cylindre par rapport à R_g est : $\overrightarrow{V(G,C/R_g)} = V.\vec{y}$.

Le torseur cinétique a été calculé lors du cours de cinétique :

$$\{\mathcal{C}(C/R_g)\} = {}_G\begin{Bmatrix} MV.\vec{y} \\ -\frac{1}{2}MVR.\vec{x} \end{Bmatrix}$$

a) Calculer la quantité d'accélération du cylindre.
b) Calculer le moment dynamique en G.
c) Ecrire le torseur dynamique.

d) Calculer le moment dynamique au point I de deux manières différentes.
e) Ecrire le théorème du moment dynamique en un point judicieux et trouver la loi de mouvement.
f) Trouver la loi de mouvement par le théorème de l'énergie puissance.

3. LES CAS PARTICULIERS DU *PFD* : *PFS* POSSIBLE

Les cas suivants permettent d'appliquer le PFS, car le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/R_g)\}$ est nul.

- (S) immobile, ou en mouvement de translation rectiligne uniforme dans R_g.
- Inertie ou masse faible entrainant le torseur $\{\mathcal{D}(S/R_g)\}$ négligeable devant le torseur des AM extérieures $\{\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S)\}$.
- Vitesses et accélérations faibles entrainant, là aussi, le torseur $\{\mathcal{D}(S/R_g)\}$ négligeable devant le torseur des AM extérieures $\{\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S)\}$.

4. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE OU THEOREME DE L'ENERGIE PUISSANCE ?

Le théorème de l'énergie-puissance ne donne pas d'information supplémentaire à ce que fournit le PFD. Cependant la recherche de l'équation de mouvement d'un système à une seule mobilité utile sera nettement plus commode et rapide par l'utilisation du théorème de l'énergie-puissance que du PFD qu'il faudrait appliquer plusieurs fois.

On préconisera l'utilisation du PFD (ou du PFS) pour la détermination des inconnues de liaisons.

FIN DU COURS : PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE