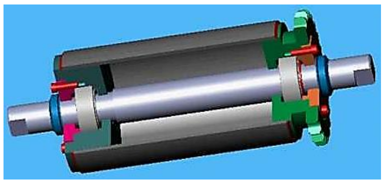
Equilibrage d'un solide en rotation

Objectifs
Découvrir la notion d'équilibrage statique d'un solide
Découvrir la notion d'équilibrage dynamique d'un solide
Réaliser l'équilibrage dynamique d'un rotor déséquilibré

Durée : 2 heures sans permutation



Démarche ingénieur

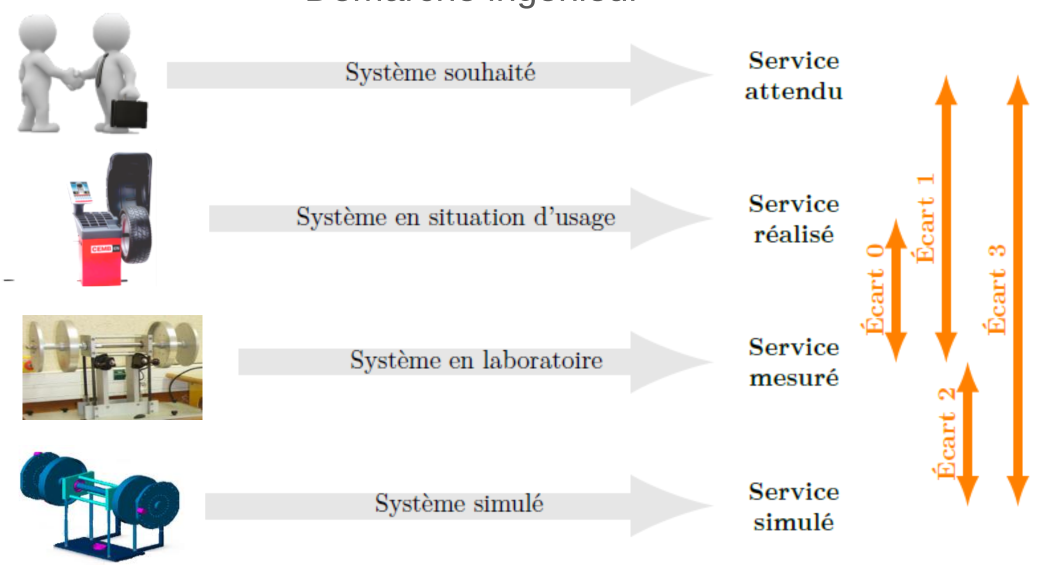


FIGURE 1 – Démarche de l'ingénieur centrée sur la mesure des écarts.

Objectif : minimiser les écarts

AVERTISSEMENT

VOUS DEVEZ DEPLACER TOUT DOCUMENT NUMERIQUE MODIFIABLE DANS UN DOSSIER PERSONNEL AVANT OUVERTURE ET MODIFICATION.

Préparation à faire chez soi avant la séance de TP

- Bien lire tout le sujet
- Bien s'imprégner de la notion d'équilibrage d'un solide tournant
- Faire le travail préparatoire sur copie double

Revoir les notions suivantes

- Définition du centre d'inertie et calcul
- Matrice d'inertie : simplification avec les éléments de symétrie, théorème de Huygens, matrice d'inertie d'une masse ponctuelle

Vous disposez

- Sujet
- Tachymètre optique
- Corde à lancer
- Balance de précision
- Deux documents numériques type « Excel »
- Masses additionnelles 6, 10, 20, 30, 40, 60 g (et même 50g si nécessaire, par combinaison subtile ; voir un peu plus loin)

Remarque : démonter/ranger avec soin les masses après chaque séance !

Vous devez rendre

- Rédaction sur votre cahier de Travaux Pratiques

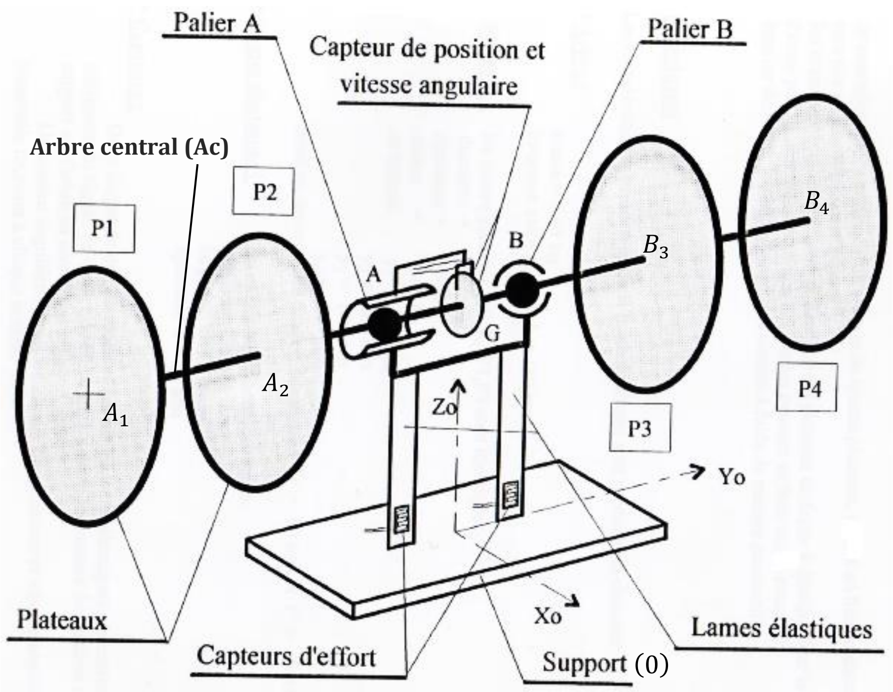
INTRODUCTION : NOTION D'EQUILIBRAGE D'UN SOLIDE EN ROTATION

Le déséquilibre des pièces en rotation provoque l'apparition de vibrations, et présente plusieurs inconvénients:
- une perte du rendement dans la transmission de l'énergie car la déformation des pièces (même si elle n'est pas visible à l'œil) consomme une part d'énergie de déformation,
- des contraintes naissent dans les pièces en rotation et dans les paliers fixes, soumettant ces parties à une sollicitation de fatigue, et des détériorations potentielles,
-les actions dans les paliers sont d'intensité et de directions fluctuantes, ce qui nuit à une lubrification établie, et par conséquent à des résistances à la rotation accrues. Les conséquences sont multiples : une usure prématurée des paliers ou des roulements, et un abaissement supplémentaire du rendement,
-la précision du mouvement est altérée par la déformation de la pièce et de son support, ce qui peut devenir inadmissible dans le cas des guidages des machines de précision,
-le bruit, lorsque la fréquence des vibrations est dans le spectre d'audition.

Les domaines concernés par l'équilibrage sont :

-dans le domaine de l'automobile: équilibrage des roues, de l'arbre moteur, de la turbine des turbocompresseurs
-dans l'industrie du papier où les cylindres pour guider la bande, pour glacer le papier, pour imprimer, sont nombreux
-dans le domaine des machines-outils où la précision des trajectoires de l'outil par rapport à la pièce est nécessaire à la qualité de la géométrie des surfaces usinées
-dans le domaine de la production d'énergie électrique, avec l'équilibrage des turbo-alternateurs
-tout autre domaine où la rotation des pièces, souvent à haute vitesse entraine une nuisance énoncée précédemment (électroportatif grand public, moteur d'aspirateur…).
-pour finir sur une note humoristique, on n'équilibre pas un tambour de machine à laver… devinez pourquoi.

PRESENTATION DE L'EQUILIBREUSE ROTODYN DU LABORATOIRE

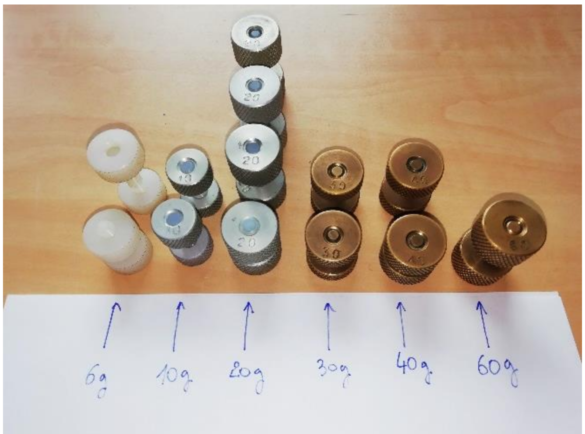


Masses additionnelles disponibles : 6g, 10, 20, 30, 40, 60g.

50g est possible par la combinaison suivante :

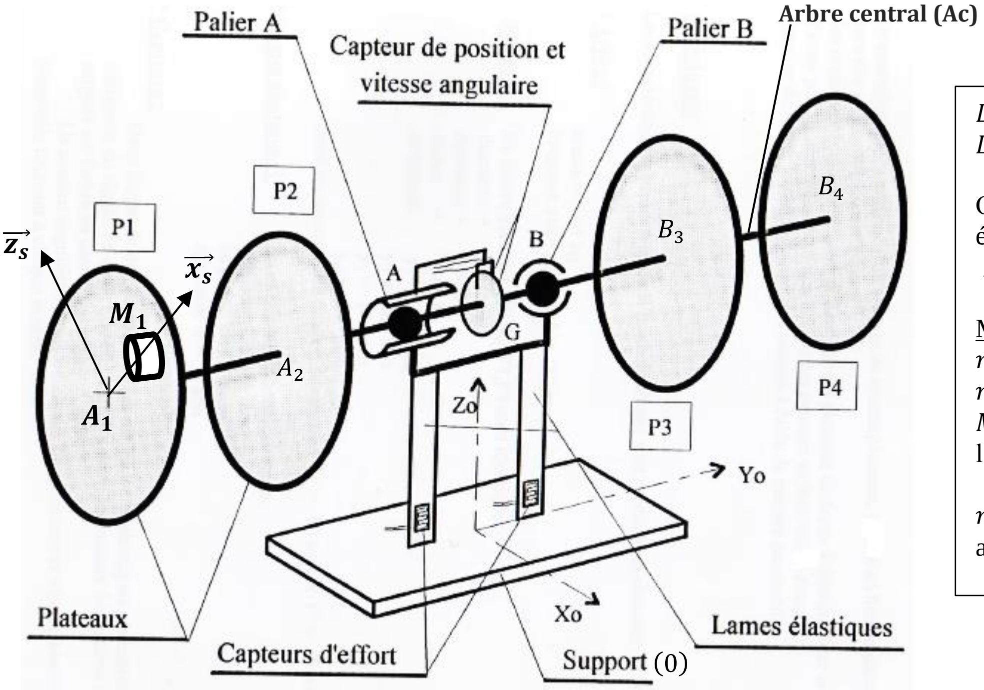
- Une « demi » 40g
- Une « demi » 30g
- Une « demi » 20g (aluminium)
- Une tige filetée en laiton longue (34 mm)

Vérifier avec la balance si nécessaire au cours de la séance.



1ère PARTIE : PRELIMINAIRE THEORIQUE

Cette partie se fait individuellement. Elle ne nécessite pas de matériel. Elle a été préparée avant la séance de TP… chez vous.



$L_1 = GA_1 = GB_4$
$L_2 = GA_2 = GB_3$

On note l'ensemble tournant équilibré :
$E_{te} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, A_c\}$

Masses :
m_{Pi} = masse de plateau P_i
m_A = masse de l'arbre central A_c
$M_T = \Sigma m_{Pi} + m_A$ = masse de l'ensemble E_{te}

m_i = masse d'une masse additionnelle au point M_i

L'ensemble tournant constitué des 4 plateaux et de l'arbre central est en pivot par rapport au bâti (0) selon l'axe $(G, \overrightarrow{y_0})$.
G est le centre d'inertie de l'ensemble tournant équilibré E_{te} constitué des 4 plateaux et de l'arbre central. G est situé sur l'axe de la pivot $E_{te}/0$. En raison de la symétrie évidente de E_{te} : $\overrightarrow{A_1G} = \overrightarrow{GB_4} = L_1.\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{A_2G} = \overrightarrow{GB_3} = L_2.\overrightarrow{y_0}$

On fixe une masse ponctuelle additionnelle m_1 au point M_1 sur le plateau (P_1) située au rayon $r_1 = A_1M_1$, avec $\overrightarrow{A_1M_1} = r_1.\overrightarrow{x_s}$.
On définit ainsi le repère lié au nouvel ensemble tournant muni de m_1 : $(G, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_{0s}}, \overrightarrow{z_s})$

1. Déterminer la position du centre d'inertie G_E de l'ensemble tournant muni de la masse additionnelle ($E = E_{te} \cup m_1$), dans le repère $(G, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$: $\overrightarrow{GG_E} = X_{G_E}.\overrightarrow{x_s} + Y_{G_E}.\overrightarrow{y_s} + Z_{G_E}.\overrightarrow{z_s}$ où les coordonnées $X_{G_E}, Y_{G_E}, Z_{G_E}$ sont à calculer.

On souhaite ramener le centre d'inertie G_E de l'ensemble E sur l'axe de rotation. Pour cela on ajoute une masse m_2 au point M_2 située à : $\overrightarrow{GM_2} = r_2.\overrightarrow{x_s} + Y_{m2}.\overrightarrow{y_{0S}} + Z_{m2}.\overrightarrow{z_S}$. Le nouveau centre d'inertie est G_E'.

2. Déterminer les deux relations nécessaires pour que le nouveau centre d'inertie G_E' soit sur l'axe de rotation $(G, \overrightarrow{y_{0s}})$.

Rappel d'une généralité (voir le cours de cinétique) : on rappelle que la matrice d'inertie d'une masse ponctuelle m située en M est nulle dans le repère centré en M : $\bar{\bar{I}}(M, m) = [0]$.

3. Donner **<u>l'allure</u>** de la matrice d'inertie $\bar{\bar{I}}(G, E_{te})$, de l'ensemble tournant équilibré.

4. Déterminer **<u>l'allure</u>** de la matrice d'inertie de la masse m_1 au point G : $\bar{\bar{I}}(G, m_1)$ dans la base $(\overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_{0s}}, \overrightarrow{z_s})$.

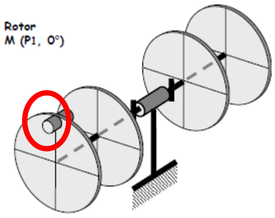
5. Déterminer la matrice d'inertie de la masse m_1 : $\bar{\bar{I}}(G, m_1)$ dans la base $(\overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_{0s}}, \overrightarrow{z_s})$. Aide : utilisation du théorème de Huygens bien sûr !

6. Déduire la matrice du nouvel ensemble tournant $E = E_{te} \cup m_1$: $\bar{\bar{I}}(G, E)$.

7. Généralité : reportez-vous à votre cours de cinétique du solide, et rappeler la condition pour qu'un axe $(O, \vec{y})$ soit axe principal d'inertie d'un solide (S).

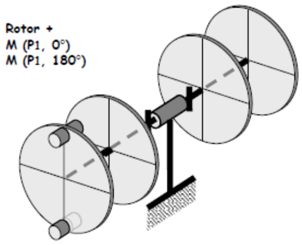
2ème PARTIE : EXPERIMENTATION – DÉCOUVERTE

Découverte de l'équilibrage statique



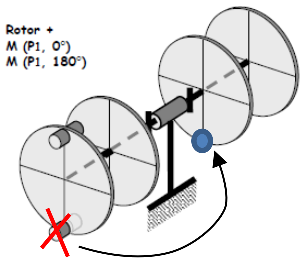
Placer une masse de 40g sur le plateau 1comme illustré ci-contre.

8. Le rotor est-il en équilibre indifférent (= quelle que soit sa position) ?



Placer une masse de 40g diamétralement opposée sur le plateau P1.

9. Le rotor est-il en équilibre indifférent (= quelle que soit sa position) ?



Démonter la dernière masse de 40g et placez-la diamétralement opposée à la première mais sur un autre plateau (P3 par exemple).

10. Le rotor est-il en équilibre indifférent (= quelle que soit sa position) ?

Conclusion : vous venez de réaliser l'équilibrage <u>statique</u> du rotor.

Equilibrage statique : définition – réalisation pratique

<u>Définition</u> <u>d'un solide statiquement équilibré</u>
Un solide en liaison pivot dans son bâti est statiquement équilibré si son équilibre statique est indépendant de sa position angulaire.

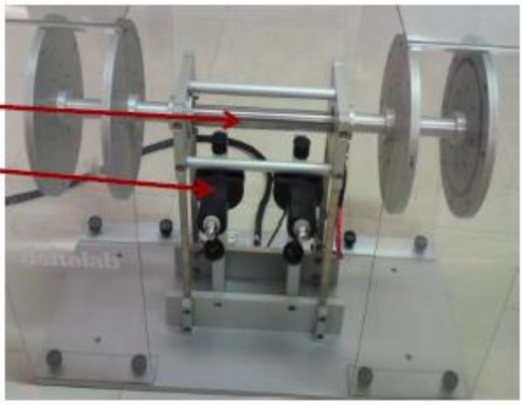
<u>Conclusion, **règle pratique** d'équilibrage statique d'un solide en rotation</u>
Pour qu'un solide tournant soit statiquement équilibré, le centre d'inertie de l'ensemble tournant doit appartenir à son axe de rotation avec le bâti.

<u>Réalisation technologique</u>
On place une « masse additionnelle » qui permet au nouvel ensemble tournant d'avoir son centre d'inertie sur l'axe de rotation. Le problème est de savoir **où** mettre en place cette nouvelle masse !

Découverte de l'équilibrage dynamique

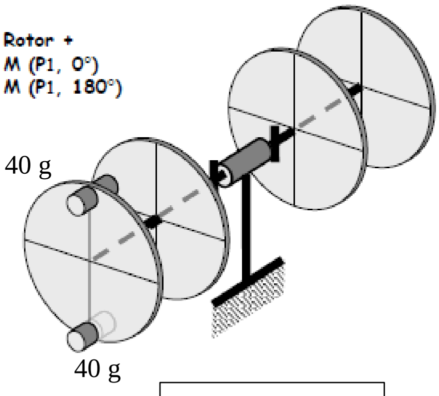
Pour lancer le rotor à haute vitesse il faut suivre les quatre étapes ci-dessous.

1. Enrouler la corde autour de l'arbre.
2. Brider le montage en tournant les poignées
3. Tirer la corde pour faire tourner l'arbre.
4. Débrider

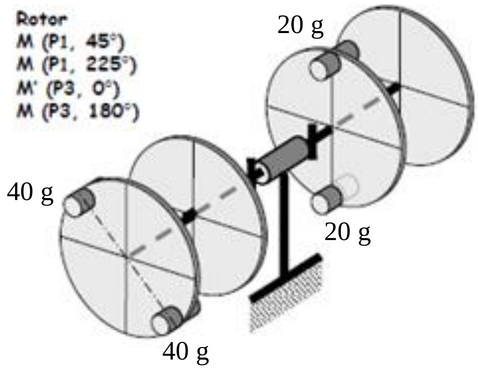


Surtout ne pas oublier la séquence de verrouillage-déverrouillage-verrouillage, etc. Bridez toujours l'équilibreuse avant le lancer.

On vous propose ci-dessous deux montages statiquement équilibrés.
Faire chaque montage : vérifier chaque fois qu'il est statiquement équilibré puis lancer le rotor avec la corde. Observer.



Montage n°1



Montage n°2

11. Lors de la rotation du rotor, que constatez-vous pour le montage n°2 ?

<u>Définition d'un solide dynamiquement équilibré</u>
Un solide en liaison pivot dans son bâti est dynamiquement équilibré si les actions mécaniques transmises du bâti au solide par la liaison pivot sont indépendantes du temps, quand il tourne à vitesse constante.

Condition de réalisation d'un équilibrage dynamique

Le PFD appliqué au solide (S) en rotation permet d'obtenir le torseur des actions mécaniques du bâti (0) sur l'ensemble tournant transmis par la liaison pivot d'axe $(O,\vec{y})$.

$$\{F(0 \rightarrow S)\} = \left\{\begin{matrix} X & L \\ 0 & 0 \\ Z & N \end{matrix}\right\}_{G\,(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})}$$

On montre que les composantes X, Z, L, N sont indépendantes du temps si et seulement si :

- Le centre d'inertie G_s de (S) appartient à l'axe de la pivot $(O,\vec{y})$ = équilibrage statique

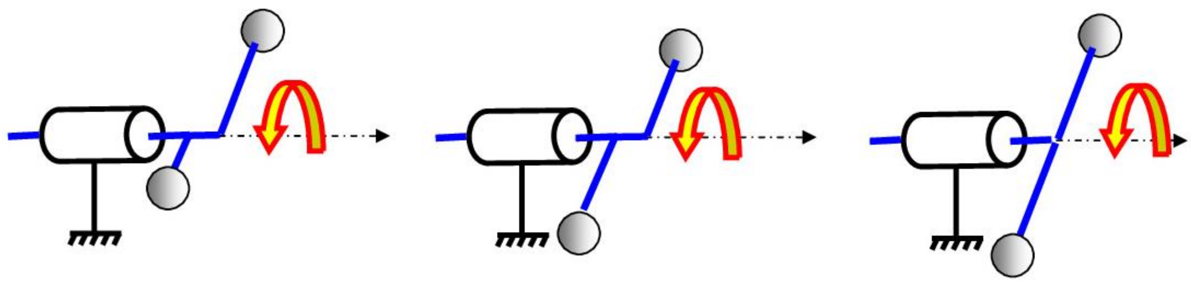
ET

- L'axe de la pivot $(O,\vec{y})$ est axe principal d'inertie du solide (S).

Le solide (S) en pivot avec (0) est alors dynamiquement équilibré.

<u>Remarque</u> : on remarque que la condition d'équilibrage statique est nécessaire (mais pas suffisante) à l'équilibrage dynamique.

<u>Illustration de l'équilibrage d'un solide en rotation</u>



Cas n°1 Cas n°2 Cas n°3

12. Quel cas illustre : un solide non équilibré, un solide statiquement équilibré, un solide dynamiquement équilibré

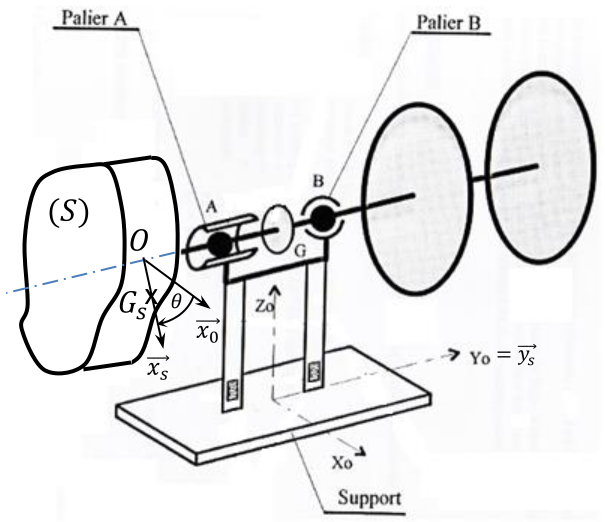
3ème PARTIE : RESOLUTION – REALISATION D'UN EQUILIBRAGE DYNAMIQUE

Explication théorique

Nous nous proposons ici de justifier par la théorie le principe de l'équilibrage énoncé précédemment.
Le solide déséquilibré (S), de masse M_s est positionné angulairement par rapport au bâti (O) avec l'angle $\theta = (\vec{x_0},\vec{x_s}) = (\vec{z_0},\vec{z_s})$.
Son centre d'inertie G_s est tel que : $\overrightarrow{OG_s} = \rho\vec{x_s}$; $\overrightarrow{AB} = a\vec{y_0}$; $\overrightarrow{OA} = c\vec{y_0}$.

La matrice d'inertie de (S) est : $\bar{\bar{I}}(G,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x_s},\vec{y_s},\vec{z_s})}$

(S) est lancé à la vitesse constante $\omega = \dot{\theta}$.



La liaison sphère cylindre en A transmet les AM : $\{F(0 \to S)^{SC}\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}}_{(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})}$

La liaison sphérique en B transmet les AM : $\{F(0 \to S)^{Sph}\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}}_{(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})}$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à (S) au point A, donne le résultat final suivant. Les composantes d'action mécanique sur l'arbre sont :

$X_B = -\frac{\omega^2}{a}[F.\cos\theta + D.\sin\theta]$

$Z_B = \frac{\omega^2}{a}[-D.\cos\theta + F.\sin\theta] + \frac{M_{tot}.g.c}{a}$

$X_A = -M_s\rho\omega^2.\cos\theta - X_B$

$Z_A = M_S\rho\omega^2\sin\theta - Z_B + M_{tot}g$

$Y_A = 0$

13. Déterminer les conditions (simples !) pour que les quatre actions mécaniques soient indépendantes du temps (constantes quoi !). L'équilibre dynamique sera alors réalisé.
14. Conclusion littérale : centre d'inertie et axe de rotation…etc.

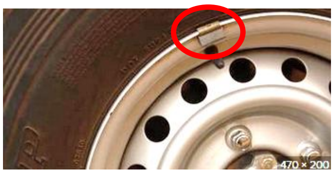
<u>Rappel : axe principal d'inertie</u>

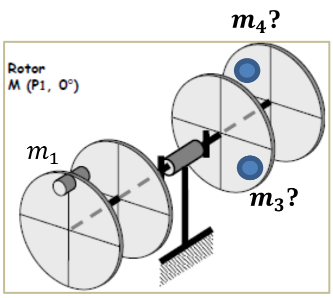
Soit un solide (S) de matrice d'inertie au point O : $\bar{\bar{I}}(O,S) = \begin{bmatrix} I_{Ox} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{xy} & I_{Oy} & P_{yz} \\ P_{xz} & P_{yz} & I_{Oz} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})}$

L'axe $(O,\overrightarrow{\boldsymbol{x_S}})$ est axe principal d'inertie si $P_{xy} = P_{xz} = 0$. Vous déduirez les deux autres axes possibles, la place des indices est logique…

Réalisation d'un équilibrage dynamique

On montre que deux masses ponctuelles suffisent à équilibrer dynamiquement un solide en rotation.
C'est ce que fait un mécanicien automobile quand il équilibre une roue. Il colle deux masselottes en plomb à l'intérieur de la jante, mais surtout pas sur le même plan.



En ce qui nous concerne nous allons traiter un problème d'équilibrage dynamique simple sur l'équilibreuse du laboratoire.

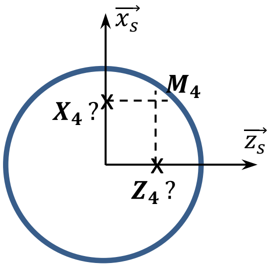
Le déséquilibre du rotor sera juste provoqué par une masse $m_1 = 10g$ excentrée au point M_1 au rayon $r_1 = 4cm$, sur le plateau P1.

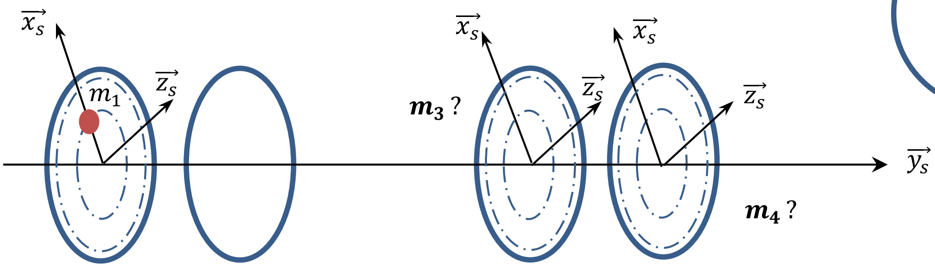
L'équilibrage sera réalisé avec deux masses m_3 au point M_3 et m_4 au point M_4 que vous placerez sur les plateaux P3 et P4. La position des trois masses est donc définie :

$\overrightarrow{GM_1} = r_1\overrightarrow{x_s} - L_1\overrightarrow{y_0}$

$\overrightarrow{GM_3} = X_3\overrightarrow{x_s} + L_2\overrightarrow{y_0} + Z_3\overrightarrow{z_s}$

$\overrightarrow{GM_4} = X_4\overrightarrow{x_s} + L_1\overrightarrow{y_0} + Z_4\overrightarrow{z_s}$





Il faut donc déterminer : la valeur des masses, et leur position angulaire par rapport au point M_1, c'est-à-dire la position sur chaque plateau P3, P4 : X_3, Z_3, X_4, Z_4.

<u>Condition n°1 : équilibrage statique - centre d'inertie ramené sur l'axe de la pivot $(G, \overrightarrow{x_0})$</u>
De manière analogue au calcul préparatoire fait chez vous, le calcul du barycentre puis condition sur l'axe, donne :

$m_3X_3 + m_4X_4 = -m_1r_1 \qquad (1)$

$m_3Z_3 + m_4Z_4 = 0 \qquad (2)$

<u>Condition n°2 : $(G, \overrightarrow{y_0})$ axe principal d'inertie.</u>
La matrice d'inertie de l'ensemble tournant muni des trois masses s'écrit :

$$\bar{\bar{I}}(G,E) = \begin{bmatrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_s},\overrightarrow{y_s},\overrightarrow{z_s})}$$

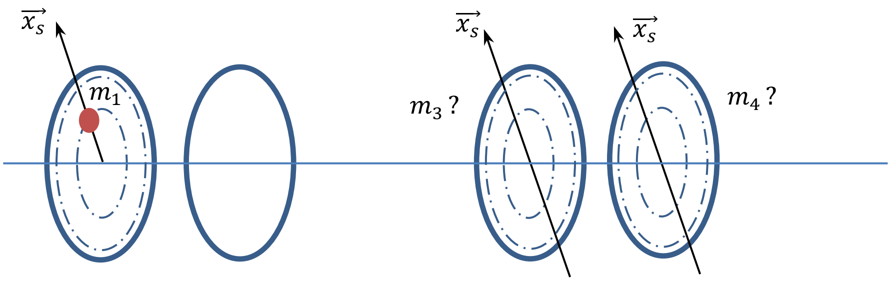
15. Traduire la condition n°2 en fonction des composantes nécessaires de la matrice.

$\bar{\bar{I}}(G,E)$ est la somme des matrices d'inertie : de E_{te}, de la masse m_1, de la masse m_3, de la masse m_4 : $\bar{\bar{I}}(G,E) = \bar{\bar{I}}(G,E_{te}) + \bar{\bar{I}}(G,m_1) + \bar{\bar{I}}(G,m_3) + \bar{\bar{I}}(G,m_4)$.

16. Démontrer les deux égalités ci-dessous, conséquences de la condition n°2.
    Aide : Huygens évidemment…

$L_2m_3X_3 + L_1m_4X_4 = L_1m_1r_1$ (3)
$L_2m_3Z_3 + L_1m_4Z_4 = 0$ (4)

17. Résoudre le système en considérant m_3 et m_4 connues. Vous donnerez donc les expressions de X_3, X_4, Z_3, Z_4. Regrouper (2),(4), puis (1),(3) peut aider… Regarder le signe de X_3 et X_4. Où se situent les masses m_3 et m_4 ?



Vous disposez maintenant de l'expression de position des masses m_3 et m_4.
Vous devez choisir la valeur de ces masses, et la position.
Vous ne disposez que des masses : 6g 10g 20g 30g 40g 60g. 50g est possible aussi par combinaisons des masses, voir début du sujet.
Seuls deux rayons sont possibles ±4cm et ±8cm. Il faut trouver une combinaison de ces variables qui « fonctionne ». Pour cela ouvrir le document « *calculs equilibrage - eleve* ».

18. Procéder à tâtons en modifiant les valeurs de m_3 et m_4 et trouver une solution réaliste.

19. Mettre en œuvre la solution… vérifier le bon équilibrage.

Epilogue

20. Pour vous rendre compte de la valeur des efforts transmis aux paliers : ouvrir le document « *calcul effort equilibreuse – eleve* ». Saisir les dimensions. Masse de 6g. Lancer le rotor avec la masse de 6g sur le plateau P1 et noter la vitesse (se munir du tachymètre optique). Laisser verrouillés les verrous bleus. Saisir la vitesse angulaire. Noter l'effort X_{A_maxi} pour la vitesse du rotor de l'équilibreuse. Idem pour le régime maxi d'un moteur de voiture (5000 tr/min), puis pour un moteur très hautes performances (F1, MotoGP, 16000 tr/min). Que constatez-vous ?

FIN DU SUJET