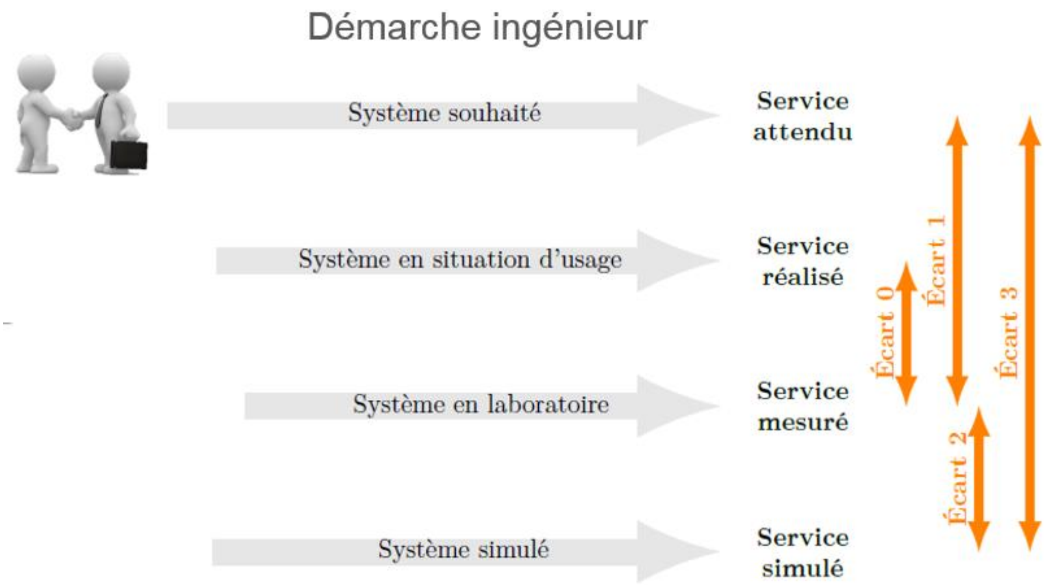
Gyromètre de mesure de vitesse angulaire : théorie et simulation

Objectifs

- Découvrir les phénomènes gyroscopiques : stabilisation et couple
- Ecrire les équations de gyroscopie simplifiée à partir du PFD
- Confronter théorie et simulation numérique pour le cas d'un gyromètre de mesure de vitesse.
- Stabiliser le modèle 3D du gyromètre en l'amortissant avec de la dissipation visqueuse

Vous devez préparer la partie théorique avant la séance de TP.

Durée du TP : 2 heures sans permutation



Objectif : minimiser les écarts

AVERTISSEMENT

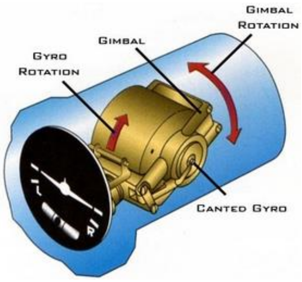
VOUS DEVEZ DEPLACER TOUT DOCUMENT NUMERIQUE MODIFIABLE DANS UN DOSSIER PERSONNEL AVANT TOUTE OUVERTURE ET MODIFICATION.

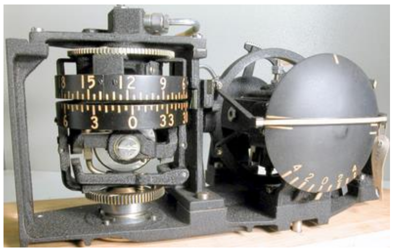
Contexte

L'effet gyroscopique (couple et stabilisation) sont utilisés dans de multiples domaines :

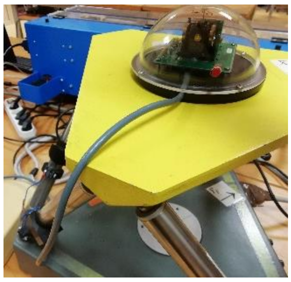
Jeu d'enfant

Gyroscope pour horizon artificiel d'avion





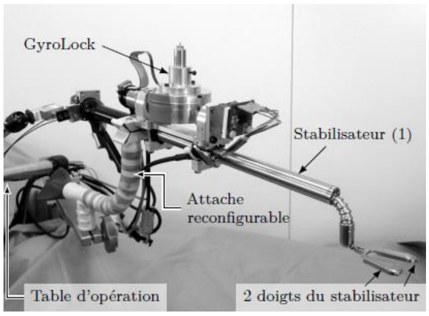
Gyromètre de la plateforme 6 axes du laboratoire de SII



Contre braquage à moto pour la prise de courbe

Stabilisation de la moto et de tous véhicules deux-roues

Gyrolock de stabilisateur cardiaque
(Epreuve de concours, CCS 2022)

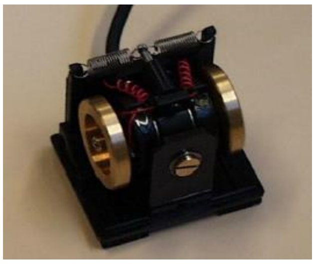


Parmi les six exemples ci-dessus,

- trois sont une application de la stabilisation gyroscopique : la toupie, le gyroscope d'avion, la stabilisation d'un deux-roues ;
- trois sont une application du couple gyroscopique : gyromètre, contre braquage à moto, gyrolock

Les deux phénomènes n'ont pas les mêmes conséquences technologiques même s'ils sont liés et sont les conséquences des équations de la dynamique. Disons que stabilisation gyroscopique et couple gyroscopique sont cousins germains.

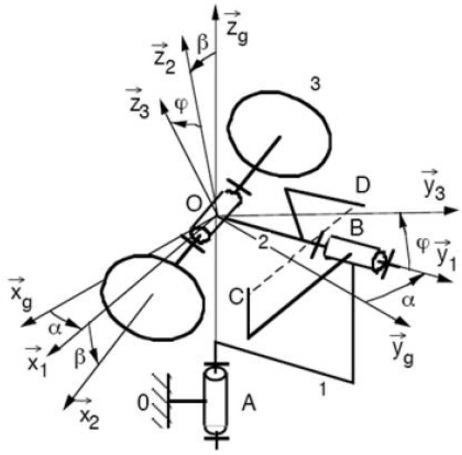
Nous nous intéressons ici au <u>couple</u> gyroscopique. Nous prendrons comme support d'étude le gyromètre de la plateforme 6 axes.



Le gyromètre est un capteur de vitesse angulaire.

Vitesse angulaire (rad/s) → Gyromètre → Indication : angle d'inclinaison (rad)

Fonctionnement du gyromètre



On donne le schéma cinématique et l'illustration ci-dessous.
Le rotor 3 est lancé à haute vitesse, ω_{rot} dans le stator 2 selon l'axe $\overrightarrow{x_{23}}$ (plus de 6000 tr/min).
Le stator 2 est en pivot dans le support 1 selon l'axe $\overrightarrow{y_{12}}$ orthogonal au précédent.
Enfin le support 1 est en pivot par rapport au sol 0 galiléen, selon l'axe $\overrightarrow{z_{g01}}$.
Il est important de comprendre que la gyroscopie en général se comprend comme la mise en rotation des trois axes de l'espace. Il s'agit d'un phénomène dynamique tridimensionnel.

<u>Le couple gyroscopique se constate ainsi</u> :
La rotation de 1/0 d'un angle α conjuguée à la rotation continue de 3/2 selon deux axes orthogonaux entraîne l'apparition d'un couple selon le troisième axe : couple de 3 sur 2 transmis par la liaison pivot 3/2.
Ici la conséquence va être la rotation de 2/1. La présence de ressorts de rappels fait que 2/1 ne tourna pas continuellement mais juste d'un petit angle β.

Pour une vitesse de rotor constante, l'inclinaison β est liée à la vitesse $\dot{\alpha}$. On peut donc connaître la vitesse $\dot{\alpha}$ par mesure de β.

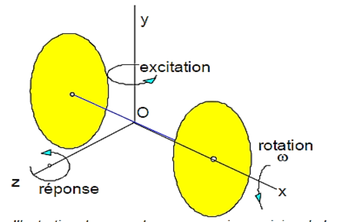
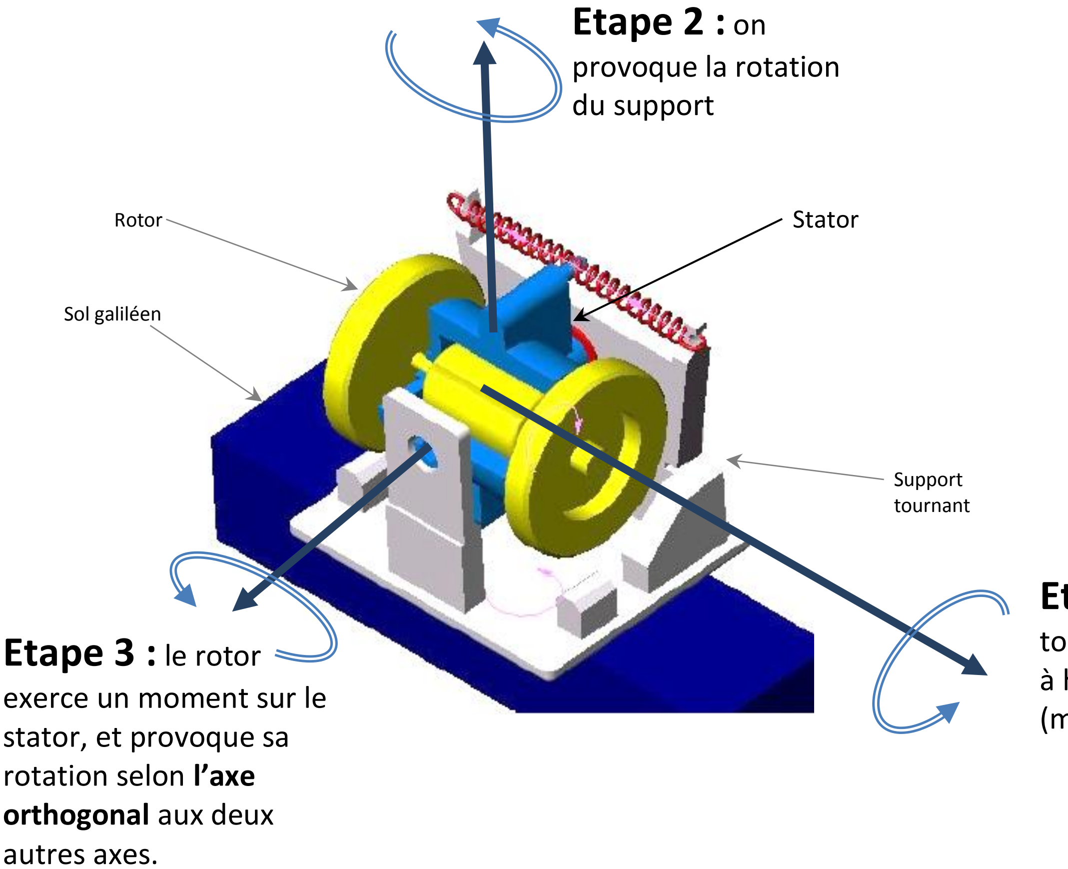


Illustration du « couple » gyroscopique origine de la réponse autour de Z



Objectif du TP

1ère partie théorique (préparatoire chez soi) :
Il s'agit de déterminer la relation entre β et $\dot{\alpha}$: $\beta = f(\dot{\alpha})$ par application du PFD.

2ème partie (laboratoire 2h) : simulation Méca3D, affinage du modèle, comparaison des résultats théorique et simulé.

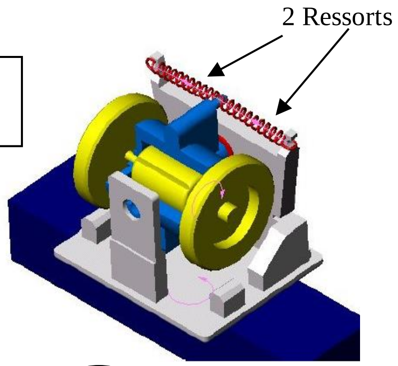
Démonstration expérimentale du phénomène

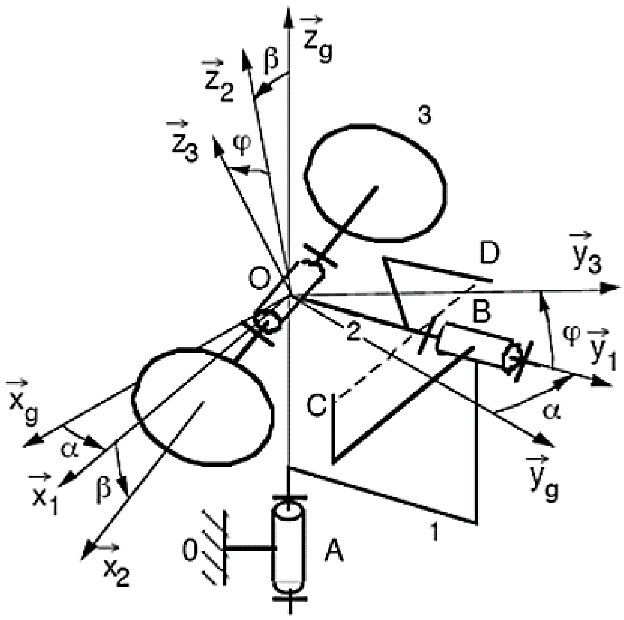
Demandez au professeur de faire une démonstration de l'effet gyroscopique au laboratoire le jour du TP. S'il n'est pas disponible, commencez l'étude théorique, il viendra plus tard.

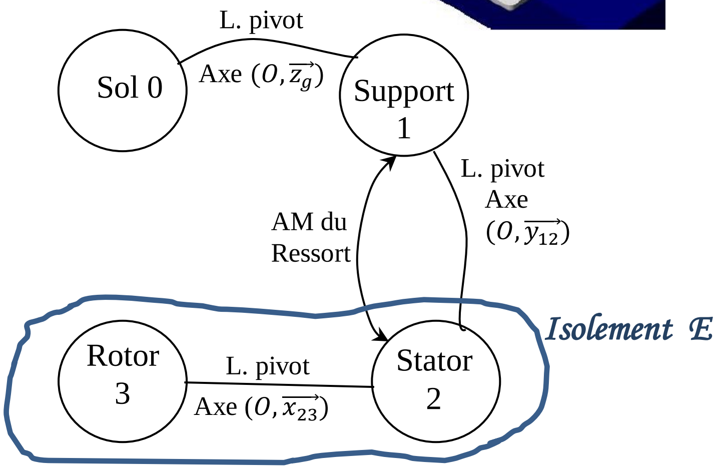
PARTIE 1 : MODÈLE PHYSIQUE
APPLICATION DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE
Cette partie doit être préparée chez vous avant la séance.

Modèle cinématique.

Remarque : un ressort de rappel est placé entre C et D.

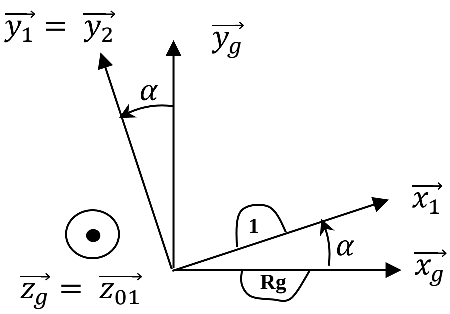


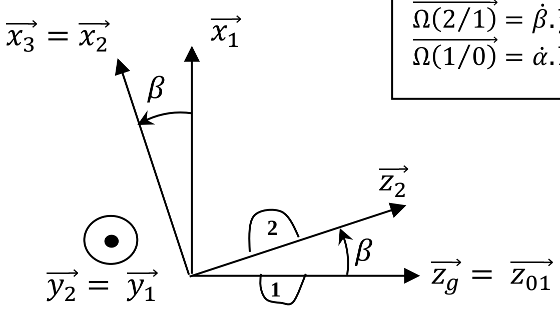




Remarque : un ressort de rappel est placé entre C et D.

$\overrightarrow{\Omega(3/2)} = \omega_{rot}.\vec{x_{23}}$
$\overrightarrow{\Omega(2/1)} = \dot{\beta}.\vec{y_{21}}$
$\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha}.\vec{z_{g01}}$





Hypothèses :

- *H1* : Moment d'inertie et masse de 1 et 2 négligés devant l'inertie de 3
- *H2* : Angle β petit $\Rightarrow \cos\beta \sim 1$ et $\sin\beta \sim \beta$
- *H3* : Vitesse $\dot{\beta}$ faible, voire nulle car le stator se stabilise angulairement selon un angle fixe.
- *H4* : Vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ constante.
- *H5* : Poids négligés (ou, disons, sans influence sur la dynamique du mécanisme)
- *H6* : produit $\dot{\alpha}\beta$ négligeable devant ω_{rot} (ordre de grandeur ω_{rot} : plusieurs milliers de tr/min)

Note : il est important de voir que le point O, centre d'inertie du rotor 3, est fixe dans le référentiel galiléen.

On va appliquer le théorème du moment dynamique à l'ensemble rotor-stator nommé E={2,3}, au point O selon l'axe $\overrightarrow{y_{12}}$. Il s'énonce ainsi :

$$\overrightarrow{M_O}(\overline{E} \to E).\overrightarrow{y_{12}} = \overrightarrow{\delta_O}(E/R_g).\overrightarrow{y_{12}}$$

Il faut donc calculer les moments extérieurs à E en O, et le moment dynamique de E en O.

<u>Bilan des actions mécaniques extérieures appliquées à ***E***</u>

Comme le montre le graphe des liaisons, ***E*** est soumis à deux actions mécaniques extérieures.

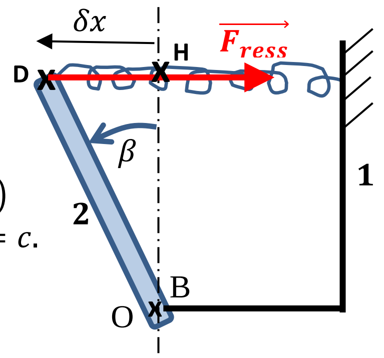
- AM provenant de 1, transmise par la liaison pivot 1/2
- AM provenant des deux ressorts

Les moments extérieurs sont donc :

$$\overrightarrow{M_O}(\overline{E} \to E).\overrightarrow{y_{12}} = \overrightarrow{M_O}(1 \to E).\overrightarrow{y_{12}} + \overrightarrow{M_O}(ressorts \to E).\overrightarrow{y_{12}}$$

$\overrightarrow{M_O}(1 \to E).\overrightarrow{y_{12}} = 0$ car liaison pivot 1/2 d'axe $(O, \overrightarrow{y_{12}})$

$\overrightarrow{M_O}(ressorts \to E).\overrightarrow{y_{12}} = 2 \times \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F_{ress}} \to E).\overrightarrow{y_{12}}$



- **Calculer le moment** de la force de rappel du ressort $M_O(\overrightarrow{F_{ress}} \to 2)$

Pour ce calcul <u>très simple</u>, comme l'angle β est faible, on a $HB \approx BD = c$.
On rappelle aussi que la force de rappel du ressort est :
$F_{ress} = k.\delta x$ où k est la raideur du ressort.
Donner le résultat $M_O(\overrightarrow{F_{ress}} \to 2)$ en fonction exclusive de k, c, β.

<u>Calcul du moment dynamique</u> : $\overrightarrow{\delta_O}(E/R_g).\overrightarrow{y_{12}}$

On donne l'opérateur d'inertie du rotor :

$$\bar{\bar{I}}(O,3) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_{23}},\_,\_)}$$

E étant la réunion des deux solides 2 et 3 : $\overrightarrow{\delta_O}(E/R_g) = \overrightarrow{\delta_O}(3/R_g) + \overrightarrow{\delta_O}(2/R_g)$

- Pourquoi la matrice d'inertie $\bar{\bar{I}}(O,3)$ a-t-elle une allure si simple : diagonale avec deux moment d'inertie identique ?

- Pourquoi peut-on écrire : $\overrightarrow{\delta_O}(\boldsymbol{E}/R_g) = \overrightarrow{\delta_O}(\boldsymbol{3}/R_g)$?

- Pourquoi peut-on calculer le moment dynamique en écrivant simplement :
  $\overrightarrow{\delta_O}(3/R_g) = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}(3/R_g)}{dt}\right]_{R_g}$?

- Pourquoi peut-on calculer le moment cinétique en écrivant simplement :
  $\overrightarrow{\sigma_O}(3/R_g) = \bar{\bar{I}}(O,3) . \overrightarrow{\Omega}(3/R_g)$

- Calculer $\overrightarrow{\sigma_O}(3/R_g)$. Faîtes la simplification conséquence des hypothèses *H3* et *H6*.

- Calculer $\overrightarrow{\delta_O}(3/R_g).\overrightarrow{y_{12}}$. Faîtes la simplification conséquence des hypothèses *H3* et *H6*.

Ecriture du théorème du moment dynamique: $\overrightarrow{M_O}(\overline{E} \to E).\overrightarrow{y_{12}} = \overrightarrow{\delta_O}(E/R_g).\overrightarrow{y_{12}}$

- D'après le théorème du moment dynamique déduire l'expression de β en fonction exclusive des paramètres : ω_{rot} , A, k, c, $\dot{\alpha}$.

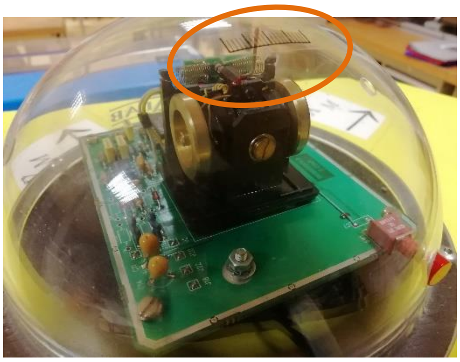
Application numérique.
On veut mesurer une vitesse de rotation selon l'axe vertical, $\dot{\alpha}$, de 7,5°/s.
Le moteur électrique fait tourner le rotor à 7160 tr/min.

raideur 1 seul ressort (N/m) k=	17
Mt inertie (kg.m²) A =	
vit excitation (rad/s) $\dot{\alpha}$ =	
vitesse rotor (rad/s) ω_{rot} =	
bras de levier ressort (m) c =	0,012

- Sous SolidWorks, ouvrir le « *rotor* ». Déterminer son moment d'inertie A.

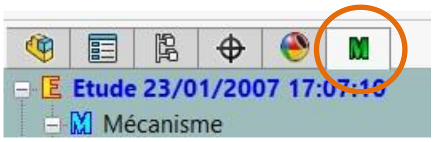
On donne l'angle béta : $\beta = -\omega_{rot} \frac{A}{2.k.c^2} .\dot{\alpha}$

- Calculer l'angle d'inclinaison β.



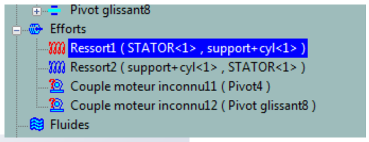
PARTIE 2
SIMULATION SOUS SOLIDWORKS/MECA 3D

Déplacer tout le dossier « DAO_gyro_eleve » dans un dossier personnel.
Ouvrir l'assemblage « Ensemble_global ».
Ouvrir Meca3D (onglet au-dessus de l'arbre de construction SW)

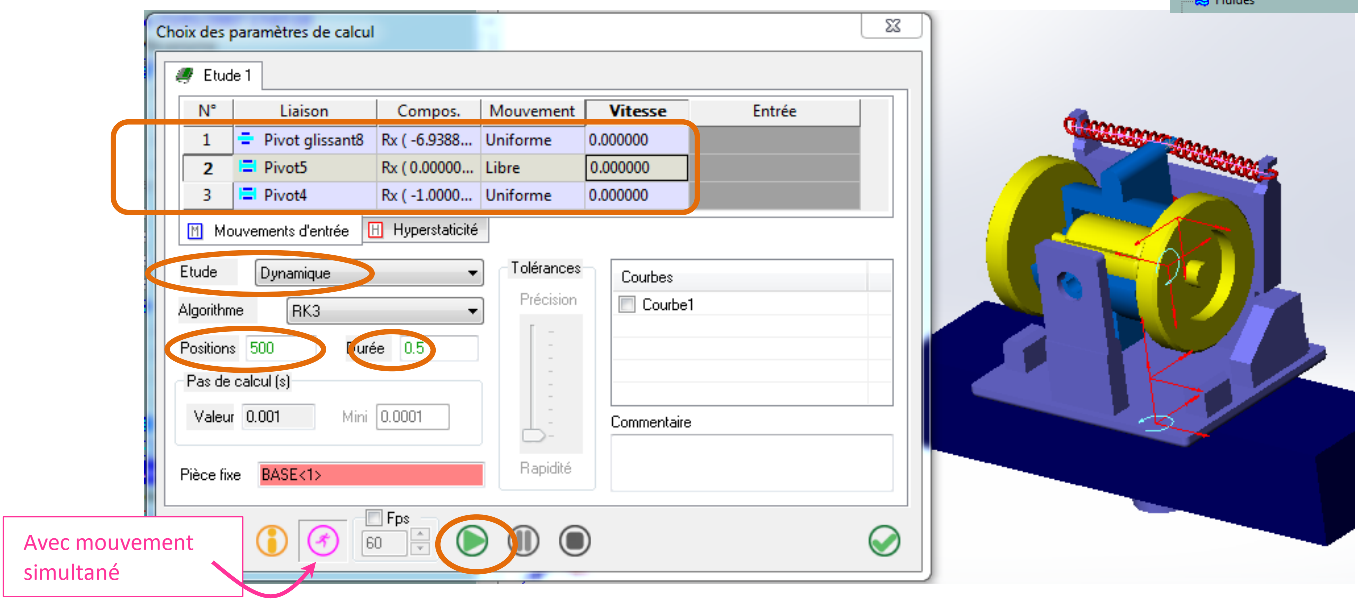


Première simulation : paramètres de base

💻 Saisissez la raideur de chaque ressort (clic droit sur chaque ressort, etc)

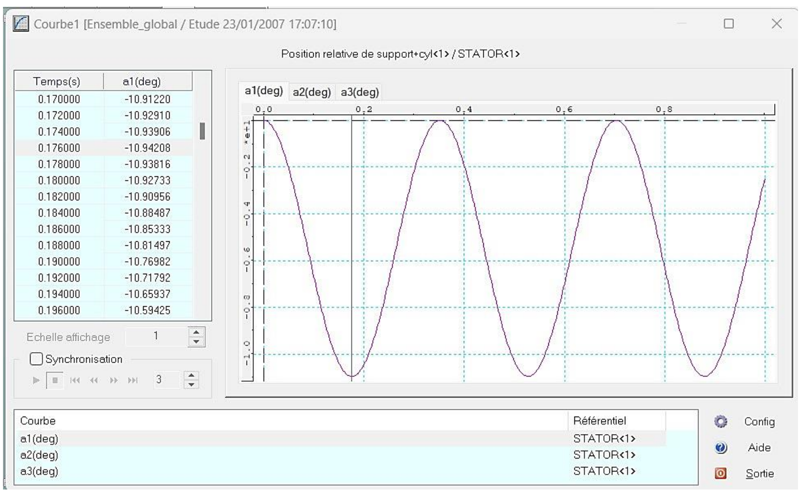


💻 Lancer une analyse avec étude dynamique comme décrite ci-dessous.



La liaison pivot stator/support doit être laissée « libre ».
Vous devez saisir la vitesse du rotor (7160 tr/min) et la vitesse $\dot{\alpha}$ (7,5 °/s = celle qui est évaluée par le gyromètre autour de l'axe vertical).
Durée de la simulation : 2s.
Attention : les unités doivent être tr/min dans cette fenêtre Méca3D.
Lancer la simulation avec animation simultanée pour voir les différents mouvements du gyroscope.

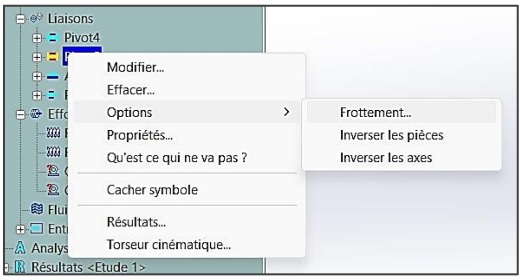
💻 Afficher l'angle β_{sim}.
Vous observez que cette simulation n'est pas exploitable, car dans la réalité l'angle se stabilise.

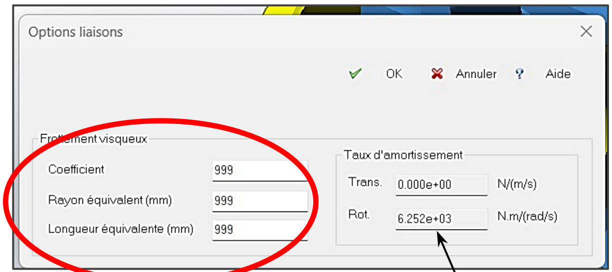


Il faut ajouter du frottement visqueux sur la pivot du stator/support.

Deuxième simulation : stabilisation du mouvement du stator

Il manque donc l'amortissement visqueux ou sec nécessaire à tout mouvement pour dissiper l'énergie : brassage de l'air, lubrification des paliers…
Nous allons modéliser la dissipation par un frottement visqueux dans la pivot stator/support. Cela est possible dans Méca3D.
Clic droit sur la liaison pivot concernée puis option/frottement.





Valeurs à saisir

Coeff de frottement visqueux f_v conséquence des valeurs saisies.

Le coefficient de frottement visqueux f_v (Nms/rad) que vous connaissez bien, est calculé par M3D selon l'expression suivante :

$f_v = 2\pi . {R_{eq}}^3 . L_{eq} . \mu$

Les unités nécessaires pour la saisie dans M3D sont : R_{eq} et L_{eq} en mm, μ en Ns/m³. Cela donnera un coefficient f_v en Nms/rad. Oui, les unités ne sont pas homogènes, mais c'est comme ça, c'est Solidworks !

<u>Mais avant de saisir les valeurs nécessaires, quel coefficient f_v choisir pour le modèle ?</u>
Nous allons le choisir de manière optimale, pour avoir un coefficient d'amortissement ξ juste nécessaire pour ne pas voir d'oscillations, soit $\xi = 1$.
L'équation différentielle du mouvement du stator/support est :

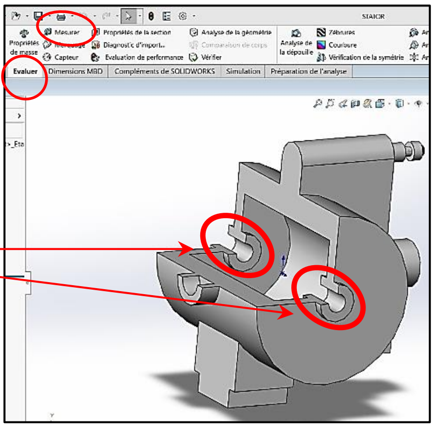
$J_{yy}\frac{d^2\beta}{dt^2} + f_v\frac{d\beta}{dt} + K_{rot} = 0$, après identification => amortissement $\xi = \frac{f_v}{2\sqrt{J_{yy}.K_{rot}}}$

J_{yy} est le moment d'inertie de l'ensemble {rotor, stator} selon l'axe $(O, \overrightarrow{y_1})$
K_{rot} est la raideur en rotation conséquence des deux petits ressorts (raideur 17N/m) :
$K_{rot} = 4{,}90.10^{-3}\ Nm/rad$

Détermination des valeurs dimensionnelles à saisir

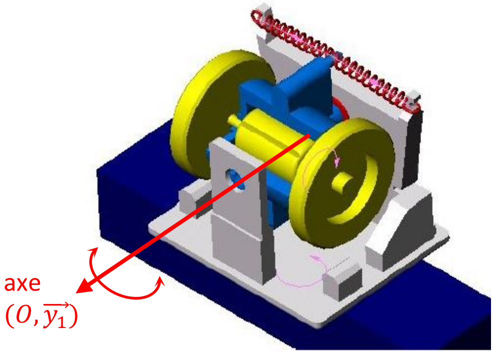
Pour déterminer les dimensions « équivalentes » R_{eq} et L_{eq}, ouvrir la pièce « stator » et mesurer la longueur de guidage du rotor et le rayon, avec l'outil « évaluer »/« mesurer ».

Sur ces surfaces cylindriques, la pivot avec le rotor est réalisée.

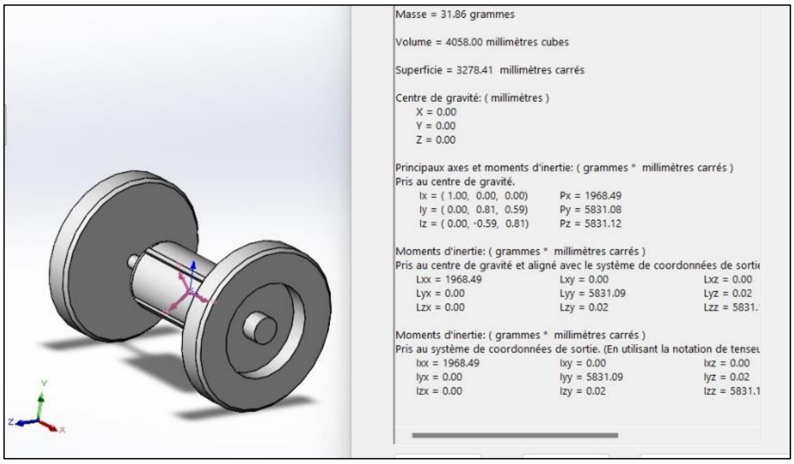


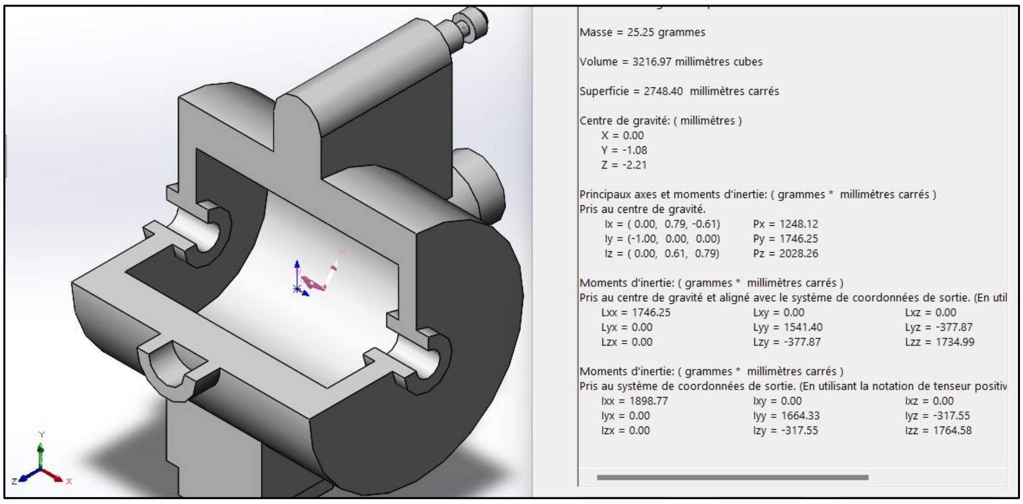
Détermination des valeurs inertielles à saisir

Il faut déterminer le moment d'inertie de l'ensemble {stator, rotor} selon l'axe $(O, \vec{y_1})$



Voici les relevés Solidworks des propriétés de masse (vous pouvez aussi les afficher avec SW) :





Déterminer le moment d'inertie de l'ensemble {stator, rotor} selon l'axe $(O, \overrightarrow{y_1})$:
$J_{yy}(rotor),\ J_{yy}(stator),\ J_{total}$.

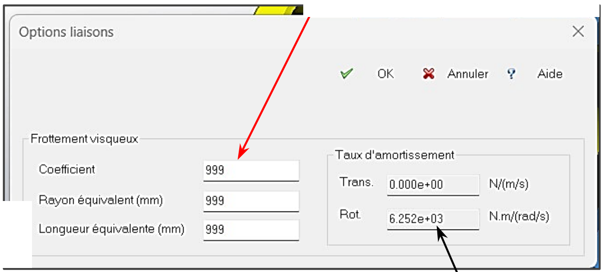
Attention les bases SW ne sont pas forcément les bases du modèle d'étude théorique.

Déduction de la valeur de f_v nécessaire
✍ déduire la valeur de f_v pour avoir $\xi = 1$.

Déduction de la valeur de μ nécessaire à saisir dans Méca3D
✍ déduire la valeur de μ.

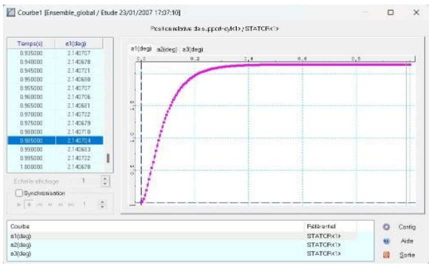
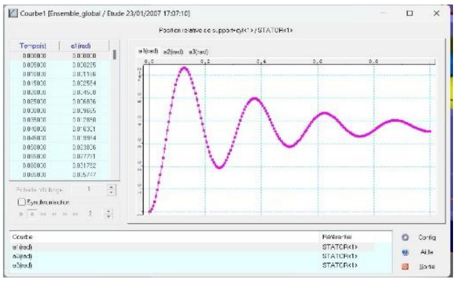
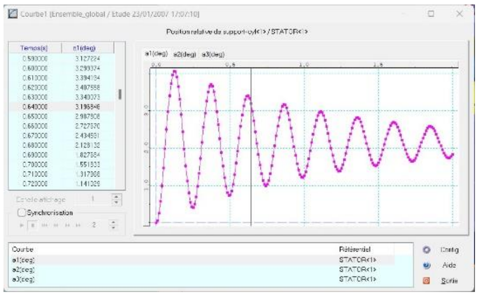
Valeur de μ à saisir
(Ns/m3)

Valeurs à saisir



Coeff de frottement
visqueux f_v conséquence
des valeurs saisies.

💻 Lancer la simulation
Selon la justesse de vos calculs vous obtenez ce genre de réponse :

Ajuster la valeur de μ pour être bien amorti (mais pas trop !).
Si le stator oscille encore c'est que l'amortissement est mal réglé car dans la réalité le gyro n'oscille pas.

Notez l'angle d'inclinaison simulé β_{sim}.

Conclusion

- Comparer β_{th} et β_{sim}.
- Concluez

FIN DE L'ACTIVITÉ PRATIQUE