

Dynamique

Partie 1 : cinétique

TRAVAUX DIRIGÉS

Table des matières

1. OPERATEURS D'INERTIE DE SOLIDES SIMPLES.....	1
1.1. Le parallélépipède	1
1.2. La sphère	1
1.3. Le tube.....	2
2. ELEMENTS D'INERTIE D'UN VILEBREQUIN	2
3. ELEMENTS CINETIQUES D'UNE EOLIENNE.....	3
4. VERIN ELECTRIQUE DE LA PLATEFORME 6 AXES	4

1. OPERATEURS D'INERTIE DE SOLIDES SIMPLES

1.1. Le parallélépipède

Le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est attaché à un parallélépipède (P) rectangle homogène de centre O, de masse volumique ρ , de masse m et dont les côtés sont parallèles aux axes. Les dimensions sont respectivement : l suivant $\vec{x}$, L suivant $\vec{y}$, h suivant $\vec{z}$.

Q1. Déterminer l'opérateur d'inertie de P en O.

Q2. Déterminer l'opérateur d'inertie de P au point A de coordonnées dans R : $A\left(-\frac{l}{2}, -\frac{L}{2}, -\frac{h}{2}\right)$.

1.2. La sphère

Le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est attaché à une sphère (S) de centre O, de masse volumique ρ , de masse m , et de rayon R.

Q1. Déterminer l'opérateur d'inertie de (S).

1.3. Le tube

Soit un cylindre creux, ou tube, (T), de rayon intérieur R_1 et rayon extérieur R_2 , de centre O, de masse volumique ρ , de masse m , de longueur L et d'axe $(O, \vec{y})$. Le repère attaché à (T) est $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

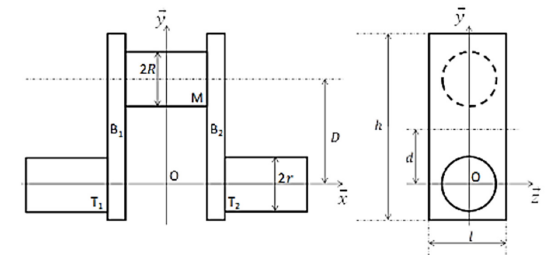
Q1. Déterminer l'opérateur d'inertie de (T) en O.

Q2. Observez l'expression du moment d'inertie du tube selon son axe de révolution $(O, \vec{y})$: le résultat est contre intuitif n'est-ce pas ? Saurez-vous lever ce paradoxe...

2. ELEMENTS D'INERTIE D'UN VILEBREQUIN

Objectif

L'objectif est de calculer la position du centre d'inertie et le moment d'inertie d'un vilebrequin de micromoteur, étape préliminaire à un calcul de dynamique.



Mise en situation

On considère un vilebrequin de micromoteur d'avion de modélisme. On attache le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au vilebrequin (S) composé de deux tourillons T_1 et T_2 identiques, de deux bras B_1 et B_2 identiques, et d'un maneton M. Les masses sont notés respectivement : m_T , m_B , m_M . Les bras sont des parallélépipèdes. Les dimensions sont données ci-dessous.

Questionnaire

Q1. Déterminer la position du centre d'inertie G de S.

Q2. Donner l'allure de l'opérateur d'inertie $\bar{I}[O, S]$ exprimé dans R.

Q3. Exprimer le moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$. Vous vous reporterez à l'annexe 1.

3. ELEMENTS CINETIQUES D'UNE EOLIENNE

Objectif

Déterminer les moments et les énergies cinétiques des pièces d'une éolienne qui seront utiles pour une étude de dynamique ultérieure.

L'éolienne est composée :

- du fût 1 de centre d'inertie A et d'opérateur d'inertie :

$$\bar{I}[A, 1] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

- de l'hélice 2, de centre d'inertie G_2 et d'opérateur d'inertie :

$$\bar{I}[G_2, 2] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Paramétrage :

- $\vec{AG}_2 = L \cdot \vec{X}_1$
- Liaison pivot 1/0 : $\vec{Z}_0 = \vec{Z}_1$; $\alpha = (\vec{X}_0, \vec{X}_1) = (\vec{Y}_0, \vec{Y}_1)$
- Liaison pivot 2/1 : $\vec{X}_1 = \vec{X}_2$; $\beta = (\vec{Y}_1, \vec{Y}_2) = (\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$

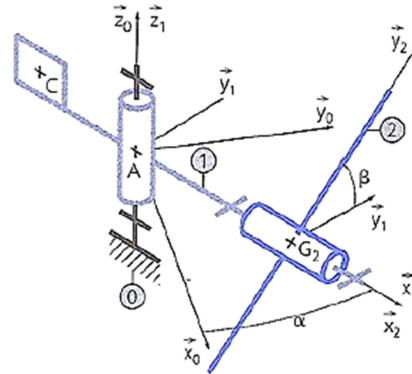
Q1. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_A(1/0)$.

Q2. Calculer l'énergie cinétique de 1/0 : $E_c(1/0)$

Q3. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_{G_2}(2/0)$.

Q4. Déterminez le torseur cinématique $\{V(2/0)\}$ en G_2 .

Q5. Calculer l'énergie cinétique de 2/0 : $E_c(2/0)$

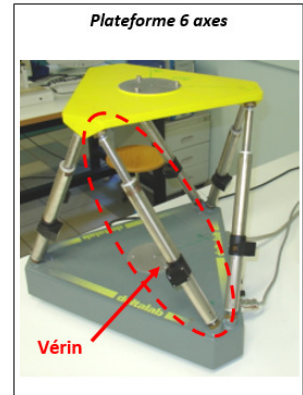


4. VERIN ELECTRIQUE DE LA PLATEFORME 6 AXES

Objectif

La plateforme 6 axes est munie de 6 vérins électriques.

Pour une étude de dynamique il est nécessaire de connaître l'inertie interne de chaque vérin. On se propose de calculer l'inertie équivalente de l'ensemble mobile {réducteur, vis, tige,...} d'un vérin, ramené au rotor moteur, puis à la tige.



Nomenclature à partir des documents constructeur

Rep	Pièce	Masse ou moment d'inertie	Valeur (kg.mm ²)
2	Corps		
	Rotor moteur	J_{rm}	$3,6 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$
	Rotor génératrice tachymétrique	J_{gt}	$3,9 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$
22	Réducteur épicycloïdal (réduction $i = \frac{1}{20}$)	J_{22} (ramené rotor)	Non connu
5	Vis de déplacement (pas : $p=6,35 \text{ mm}$)	J_5	$6,5 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$
10	Accouplement réducteur/vis	J_{10}	Non connu
4	Tige de vérin	M_4	50 g
9	Ecrou	M_9	Non connu
20	Roue de potentiomètre (25 dents)	J_{20}	$1,0 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$
19	Vis sans fin (1 filet)	J_{19}	Non connu
30	Masse additionnelle éventuelle	M	

Le rotor moteur animé de la vitesse ω_{mot} , attaque le réducteur dont la sortie est encastrée sur la vis de déplacement 5 tournant à ω_5 .

La vis 5 entraîne l'écrou 9 en matière plastique solidaire de la tige de vérin 9, qui se déplace à la vitesse V_4 .

Toutes les vitesses sont prises par rapport au corps 2.

Le capteur angulaire potentiométrique est entraîné par un engrenage roue/vis sans fin. Le rotor du capteur angulaire est solidaire de la roue dentée : l'ensemble tourne à la vitesse ω_{20} .

La génératrice tachymétrique, non visible sur le dessin est intégrée au moteur : son rotor est solidaire du rotor moteur.

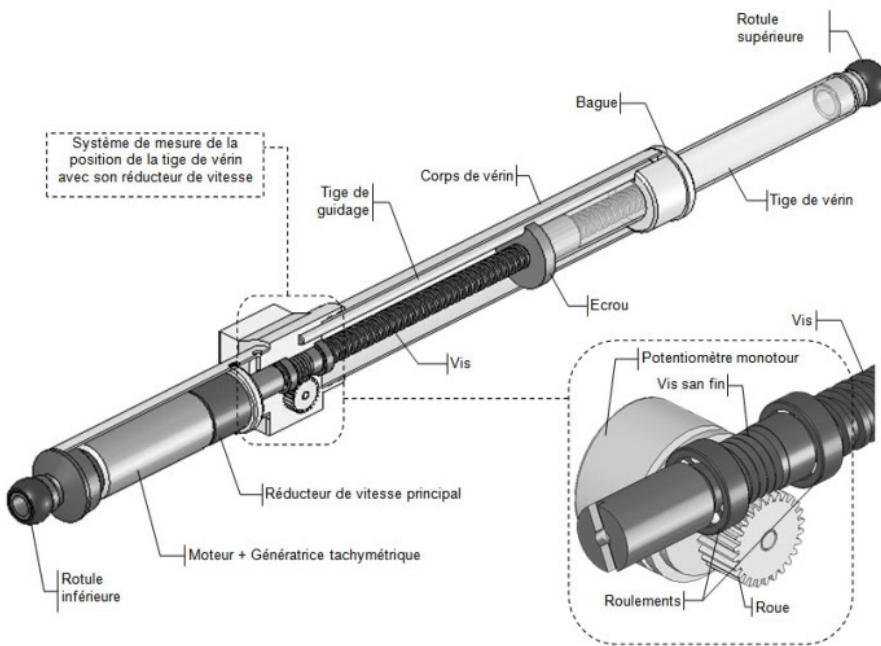
Q1. Calculer littéralement l'énergie cinétique de chaque pièce mobile : $E_{c_{rm}}$, $E_{c_{gt}}$, E_{c_5} , etc. On ne tiendra pas compte des pièces dont l'inertie n'est pas connue.

Q2. Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble : $E_{c_{tot}}$.

Q3. Dédire l'expression littérale du moment d'inertie de l'ensemble mobile rapporté au rotor moteur : J_{eq-rot} .

Q4. Calculer l'inertie équivalente du même ensemble mobile rapporté à la tige : M_{eq-tig} .

Q5. Application numérique : Faire l'application numérique détaillée pour évaluer M_{eq-tig} , mais aussi la contribution des différentes inerties. Si la masse additionnelle est $M=1\text{kg}$, peut-elle être négligée ?



ANNEXE 1 : OPERATEURS D'INERTIE FONDAMENTAUX

Cylindre de révolution		$\bar{I}(G, S) = \begin{pmatrix} m\frac{R^2}{4} + m\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{R^2}{4} + m\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(-, -, \vec{z})}$
Parallélépipède rectangle		$\bar{I}(G, S) = \begin{pmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Sphère		$\bar{I}(G, S) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}_{(-, -, -)}$