Dynamique

Partie 3 : Principe Fondamental de la Dynamique

TRAVAUX DIRIGÉS





Table des matières

1. REGULATEUR CENTRIFUGE DE MOTEUR PNEUMATIQUE 2
2. MOTEUR OPEN ROTOR : MODELE DYNAMIQUE DU CALAGE DES AUBES 4
3. ECHELLE EPAS 7
4. FAUTEUIL ROULANT MOTORISÉ 9
5. VEHICULE CLEVER 14
6. VITESSE ABSOLUE DE GIRATION D'UN AVION : ETUDE D'UN GYROMETRE 21

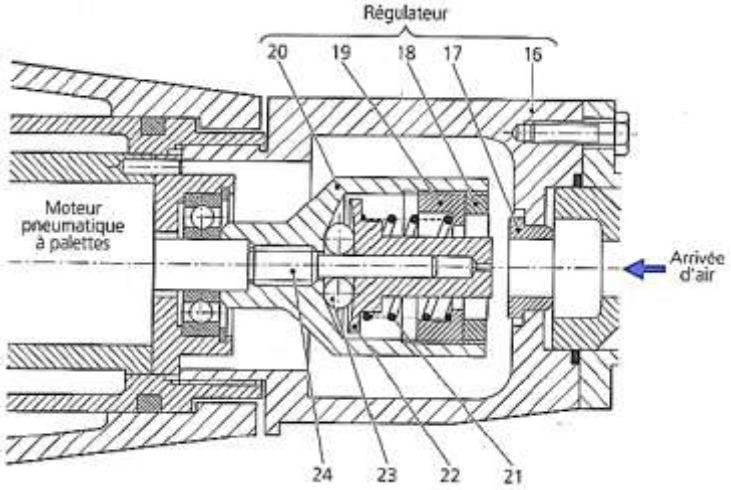
1. REGULATEUR CENTRIFUGE DE MOTEUR PNEUMATIQUE

Objectif

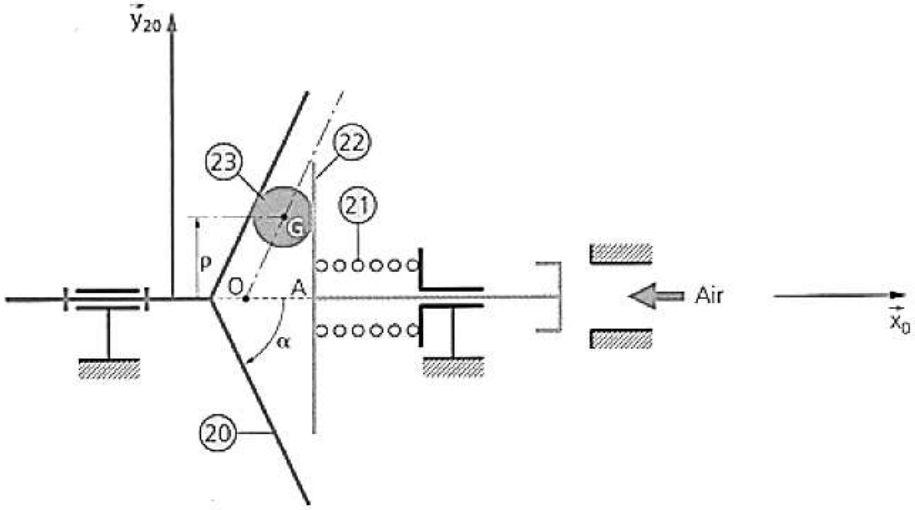
Le but est de proposer un modèle dynamique à l'aide du PFD permettant d'estimer la position de la pièce contrôlant le débit d'air dans un moteur pneumatique.

Mise en situation

Le système mécanique étudié est un dispositif utilisé pour réguler la fréquence derotation d'un moteur à palettes fournissant l'énergie à une scie pneumatique. Lorsquela fréquence de rotation du moteur augmente, les billes 23 vont s'écarter, provocant la translation de 22, donc une restriction du débit d'air à travers 17. En régime stabilisé,on souhaite connaître la relation entre la fréquence de rotation de l'ensemble et la positionaxiale du plateau 22. La pièce 20 est une cuvette conique de demi-angle au sommet α.



Réalité



Modèle cinématique

Paramétrage

r : rayon bille ; m : masse d'une bille ; nbr de billes = 4

$$\overrightarrow{OA} = (x + r).\overrightarrow{x_0}$$

$$\{\mathcal{F}_{ressort \to 22}\} = \begin{Bmatrix} -(kx + F_0).\overrightarrow{x_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Liaisons parfaites. Poids négligé devant les autres actions de contact.

L'action de l'air est négligée.

La fréquence de rotation est notée $\overrightarrow{\Omega(20/0)} = \omega.\overrightarrow{x_0}$, ωconstant.

Questions

Question 1. Dans le cas du mouvement stabilisé (x=constante), déterminer la relation entre F_0, x, k et la résultante$\overrightarrow{R_{23 \to 22}}$.

Question 2. Déterminer la relation entre x, α et le rayon de giration ρ du centre d'inertie G d'une bille.

Question 3. En appliquant le théorème de la résultante dynamique à une bille, déterminer la relation entre F_0, x, k, α, et ω en régime stabilisé.

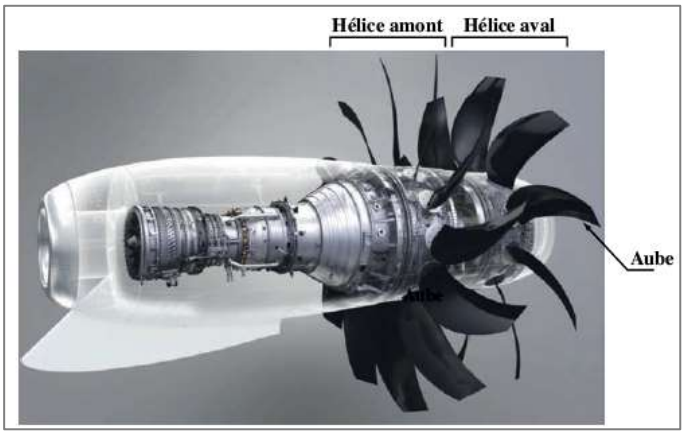
2. MOTEUR OPEN ROTOR : MODELE DYNAMIQUE DU CALAGE DES AUBES

L'Open Rotor est un moteur hybride entre turboréacteur et turbopropulseur (moteur « à hélice »). Il s'agit d'un turboréacteur non caréné. Cette technologie, en cours de mise au point par l'entreprise Safran, pourrait voir le jour sur les avions de ligne dès 2030.

Turboréacteur « classique »



Moteur Open Rotor : sujet de l'étude



Objectif global de l'étude

Déterminer la modèle de comportement dynamique de la commande en rotation des aubes. Il s'agit de la rotation des aubes autour de leur axe propre, longitudinal $(O, \overrightarrow{x_2})$.

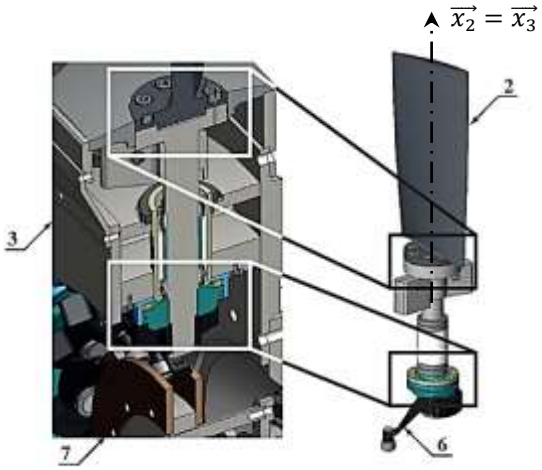


Figure 14 – Système de transformation de mouvement pour le calage des aubes

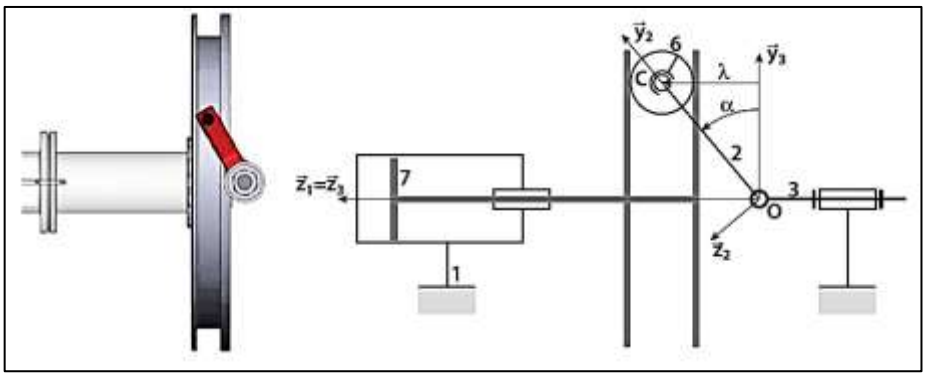


Figure 15 : système d'adaptation de mouvement
(à gauche : vue volumique **;** à droite : paramétrage cinématique adopté pour l'étude analytique)

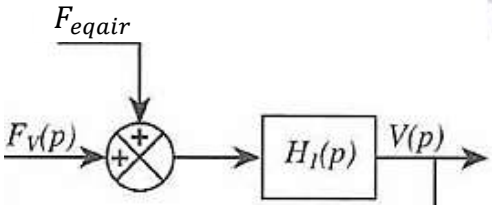
Fonctionnement de la commande

Le système de transformation est présenté sur la Figure 14. La figure 15 montre le schéma cinématique paramétré du mécanisme. Sur la tige du vérin est fixé un poussoir 7 muni d'une gorge dans laquelle des galets-excentriques 6 en liaison pivot avec les aubes permettent de modifier l'angle propre des aubes 2 (rotation 2/3 autour de l'axe $(O, \overrightarrow{x_2})$).

Le vérin est alimenté par de l'air sous pression, exerçant ainsi une force sur le piston selon la direction $\overrightarrow{z_1}$. Cette force est communiquée à la tige 7.

Résultat à établir

On donne ci-contre une partie du schéma bloc de la commande asservie des aubes.



On cherche donc à déterminer la fonction de transfert $H_1(p)$ associée au comportement mécanique du système d'orientation des aubes. V(p) est la vitesse de déplacement de la tige de vérin 7 par rapport 1 ($\dot{\lambda}$).

Comme le schéma bloc le montre, la vitesse de la tige est fonction de la force exercée par l'air sur l'aube (F_{eqair}) et de la force hydraulique dans le vérin (F_v).

Notations – Paramètres - Données

$\overrightarrow{OC} = L_2.\overrightarrow{y_2}$ avec L_2 = 30 cm
$\lambda = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{z_1}$
$\alpha = (\overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{y_2})$ de plage de variation : $-35° \leq \alpha \leq +35°$
$\theta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_3}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_3})$, liaison pivot 3/1 d'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$

m_T la masse de la tige du vérin et du poussoir

$I[O,2]$ la matrice d'inertie d'une aube complète au point O :

$$I[O,2] = \begin{bmatrix} A_{O2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{02} & 0 \\ 0 & 0 & C_{02} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$$

L'action mécanique de l'air sur l'aube est modélisée par un torseur :

$$\{\mathcal{F}(air \rightarrow aube)\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{F_{eqair}} \\ \overrightarrow{C_{air}} \end{matrix} \right\}_O$$

On note C_{airx} la composante de ce vecteur suivant la direction $\overrightarrow{x_2}$: $C_{airx} = \overrightarrow{C_{air}}.\overrightarrow{x_2}$; F_{eqair} la grandeur homogène à une force, dont l'expression sera à déterminer en fonction de C_{airx}.

Contact considéré ponctuel entre le galet 6 et le plateau 7.

Hypothèses

- La valeur de l'accélération maximale de l'avion est suffisamment faible pour pouvoir négliger les effets d'inertie induits sur le comportement mécanique des pièces du système étudié ici. On pourra donc considérer que le référentiel associé au bâti de l'avion 1 est galiléen ;
- On néglige les quantités d'inertie, et donc cinétiques, des galets ;
- Les liaisons sont supposées parfaites ;
- Chaque hélice comporte 10 aubes.

- Le modèle cinématique adopté est précisé par le schéma cinématique de la Figure 15, ainsi que les données géométriques et les paramètres de mouvement.
- Pesanteurs négligées par rapport aux actions mécaniques inertielles
- Vitesse angulaire du rotor $\dot{\theta}$, constante : $\omega_{rot} = \dot{\theta}$

Question 1

Déterminer $\vec{\Omega}(2/1)$.

Déterminer $\overrightarrow{\sigma_0}(E/1)$ le moment cinétique en O de l'ensemble E={2,6} dans son mouvement par rapport à 1.

Question 2

Déterminer $\overrightarrow{\delta_0}(E/1).\overrightarrow{x_2}$, la projection sur la direction $\overrightarrow{x_2}$, du moment dynamique en O de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à 1.

Question 3

A partir du Principe Fondamental de la Dynamique utilisé judicieusement, déterminer l'équation dynamique de l'ensemble (E) selon son axe propre, c'est-à-dire la relation entre : l'angle $\alpha(t)$, ses dérivées temporelles nécessaires, ω_{rot}, et les composantes d'action mécanique nécessaires.

Le théorème utilisé, l'axe de projection, et le point éventuel seront clairement précisés.

Linéariser l'expression trouvée en considérant la plage de variation de α faible.

Question 4

A partir du Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à l'ensemble 7 {Tige du vérin, Poussoir}, déterminer l'équation dynamique scalaire du mouvement de translation de 7.

Question 5

Combiner les deux équations et déterminer, sous la forme proposée ci-dessous, l'équation dynamique du mouvement associée à la chaine de transmission de puissance étudiée, et préciser les expressions des termes : M_{eq}, K_{eq} et F_{eqair}.

$$M_{eq}\ddot{\lambda} + K_{eq}\lambda = F_v + F_{eqair}$$

Question 6

Appliquer la transformation de Laplace à l'équation précédente et déterminer l'expression de la fonction de transfert $H_1(p)$ telle que : (p)=$H_1(p)$ $[Fv(p)$+$Feqair(p)]$, où la variable du domaine symbolique V(p) correspond à $\mathcal{L}[\dot{\lambda}(t)]$.

3. ECHELLE EPAS

Objectif

Le but est de proposer l'aide du PFD les lois de mouvement reliant les efforts des vérins et les accélérations souhaitées lorsque l'échelle se soulève ; cela dans le but de dimensionner les vérins.

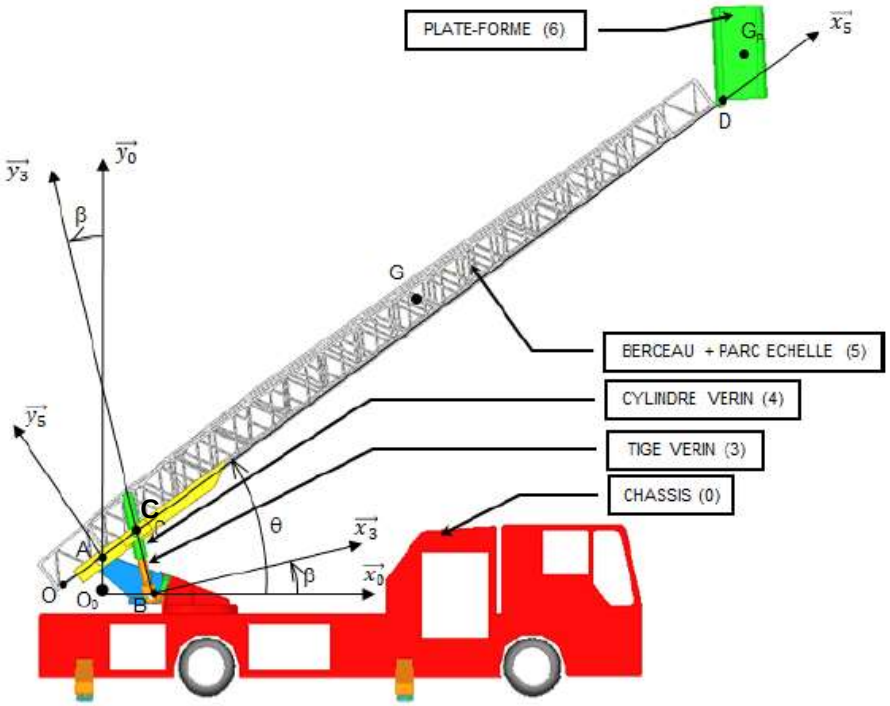
Mise situation

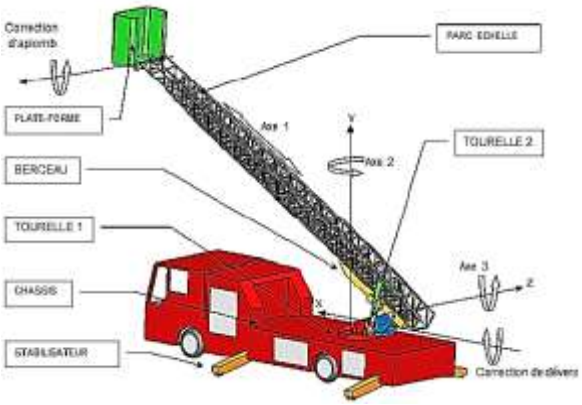
Le parc échelle d'un camion de pompier est illustré ci-dessous.



Le camion est un E.P.A.S. (Echelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle). Ce système conçu et commercialisé par la société CAMIVA.

Il permet de déplacer une plate-forme pouvant recevoir deux personnes et un brancard le plus rapidement possible et en toute sécurité pour intervenir sur des situations délicate située en hauteur (immeuble, arbre…).





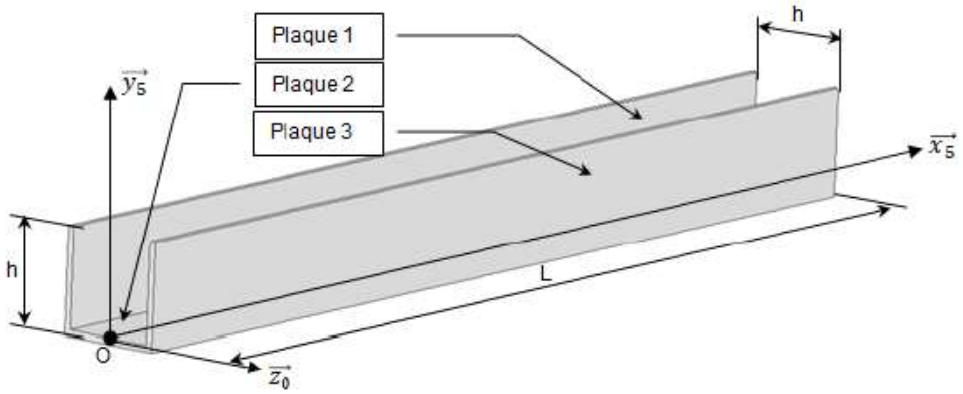
Paramétrage

- Repère $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ lié au châssis (0)
- Repère $R_5(A, \overrightarrow{x_5}, \overrightarrow{y_5}, \overrightarrow{z_5})$ lié à l'ensemble berceau+parc échelle (5)
- $\overrightarrow{O_0A} = d.\overrightarrow{y_0}$;$\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_5})$; $\overrightarrow{AC} = c.\overrightarrow{x_5}$; $\overrightarrow{AD} = H.\overrightarrow{x_5}$
- Repère $R_3(B, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_0})$ lié au vérin {3,4}
- $\overrightarrow{O_0B} = b.\overrightarrow{x_0}$; $\beta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3})$; $\overrightarrow{BC} = R.\overrightarrow{y_3}$

Nous étudierons le pivotement de l'échelle autour de l'axe Z (axe motorisé n°3). Le pivotement est possible grâce aux deux vérins {3,4}.
On tiendra compte du fait que la plateforme (6) reste toujours horizontale.

Géométrie du parc échelle

Dans une première approche, on modélisera le parc échelle par un assemblage de troisplaques rectangulaires homogènes d'épaisseur négligeable, de longueur L et de largeur h. Chaque plaque a une masse notée m.



Q1. Montrez que le vecteur position $\overrightarrow{OG}$ du centre de gravité G du parc échelle est tel que : $OG = \frac{L}{2}\overrightarrow{x_5} + \frac{h}{3}\overrightarrow{y_5}$.

Choix des vérins

On notera la matrice d'inertie du parc échelle (5) au point G dans la base B_5 extraite du repère R_5 :

$$\bar{\bar{I}}(G,5) = \begin{bmatrix} I_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gz} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_5},\overrightarrow{y_5},\overrightarrow{z_0})}$$

Le parc échelle a une masse notée $3m$ et une longueur notée L. Le parc échelle est solidaire du berceau avec $\overrightarrow{OA} = d.\overrightarrow{x_5}$.

Pendant le redressement ou l'abaissement, la plate-forme (6) reste toujours horizontale.

Sa masse une fois chargée sera notée M et son centre de gravité est le point G_P tel que : $\overrightarrow{DG_P} = \lambda.\overrightarrow{x_0} + \mu.\overrightarrow{y_0}$.On notera la matrice d'inertie de la plateforme (6) chargée, au point G_P, son centre de gravité, dans la base B_0 :

$$\bar{\bar{I}}(G_P,6) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})}$$

La masse du berceau (5) sera négligée devant les autres masses. Il est incliné parrapport à l'horizontal d'un angle θ fonction du temps.

Les masses des deux vérins {3,4} seront négligées devant les autres masses. Ils devront exercerun effort, modélisé par un glisseur de résultante $\vec{R} = R.\overrightarrow{y_3}$, permettant le pivotementselon l'angle θ.

Q2. Justifier l'allure de l'opérateur d'inertie $\bar{\bar{I}}(G,5)$ du parc échelle 5.

Q3. Déterminez l'expression littérale du moment dynamique en A de l'ensemble {parc échelle, berceau} par rapport au châssis (0) : $\overrightarrow{\delta_A(5/0)}$.

Q4. Déterminez l'expression littérale du moment dynamique en A de la plateforme (6) par rapport au châssis (0) : $\overrightarrow{\delta_A(6/0)}$.

Q5. Déterminez l'expression littérale de l'effort R que devra fournir l'ensemble des deux vérins sur le berceau, en fonction des masses, des paramètres géométriques etde l'angle θ et de ses dérivées. Indiquer clairement les sous-ensembles isolés, les actions mécaniques prises en compte et les théorèmes utilisés.

4. FAUTEUIL ROULANT MOTORISÉ

Objectif

Proposer un modèle dynamique du fauteuil motorisé à l'aide du PFD afin de valider le choix de la motorisation pour satisfaire les exigences du cahier des charges.

Mise en situation

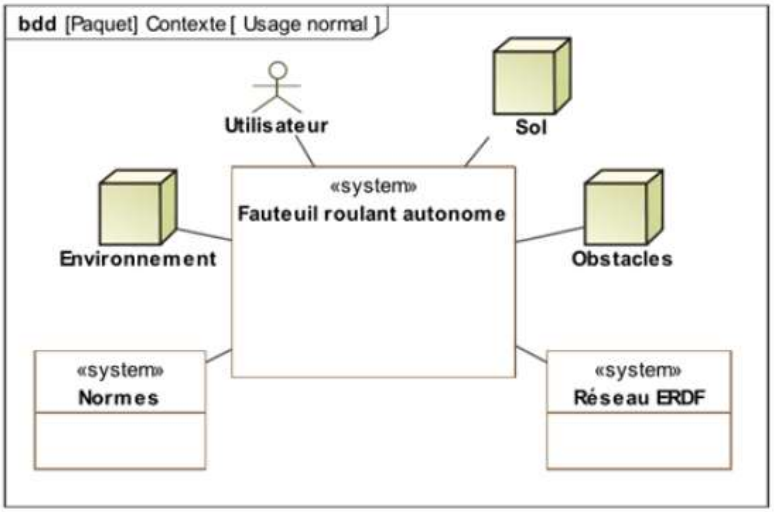
Le fauteuil pour personne à mobilité réduite étudié est motorisé par deux roues ez-Wheel (prononcer « easywheel »).

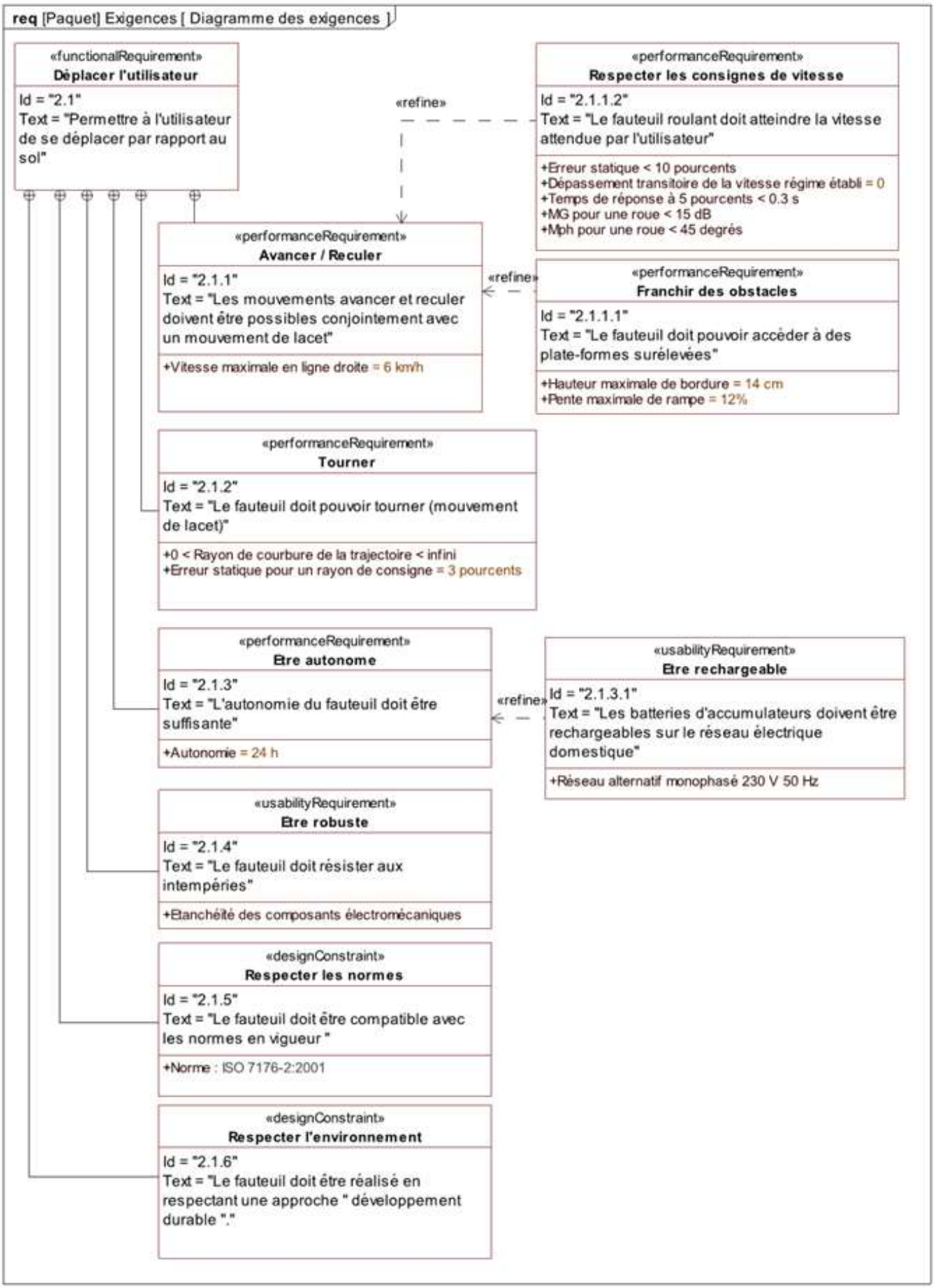
Le stator de la roue ez-Wheel est fixé sur le châssis de l'engin à déplacer et son rotor est assemblé directement sur sa roue.

La solution intègre, au sein d'une roue, tous les composants nécessaires à la traction :la motorisation électrique, des batteries haute énergie de très longue durée de vie, uncontrôleur de puissance assurant un pilotage optimal et la gestion de la batterie ainsi qu'une interface de commande sans fil. La transmission de l'énergie est réalisée par unvariateur (incorporé à la carte de commande), un moteur brushless, puis un réducteur. Les produits ez-Wheel sont conçus pour un fonctionnement en intérieur ou extérieur sur une large gamme de température. Tous les composants, y compris la batterie, sont dimensionnés pour une durée de vie supérieure à 5 ans et ne nécessitent aucuneinspection de maintenance. La technologie ez-Wheel permet de supprimer de l'engin tousles périphériques, câblages et connecteurs, facilitant considérablement l'intégration de la motorisation électrique par rapport aux solutions conventionnelles.

Chacune des deux roues est asservie par l'intermédiaire de capteurs mesurant la vitesse de rotation du rotor du moteur brushless.

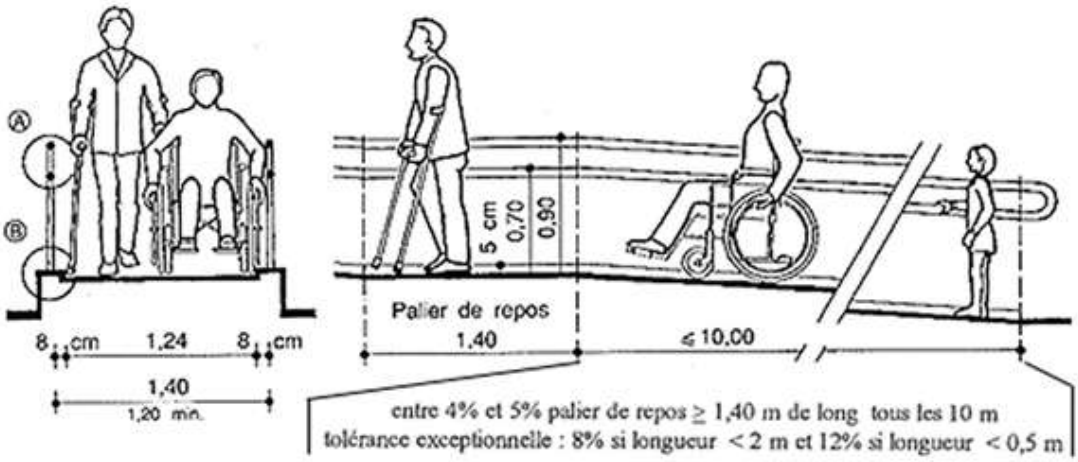
Contexte et cahier des charges


bdd [Paquet] Contexte [Usage normal]
Utilisateur
Sol
«system»
Fauteuil roulant autonome
Environnement
Obstacles
«system»
Normes
«system»
Réseau ERDF


req [Paquet] Exigences [Diagramme des exigences]
«functionalRequirement»
Déplacer l'utilisateur
Id = "2.1"
Text = "Permettre à l'utilisateur de se déplacer par rapport au sol"
«refine»
«performanceRequirement»
Respecter les consignes de vitesse
Id = "2.1.1.2"
Text = "Le fauteuil roulant doit atteindre la vitesse attendue par l'utilisateur"
+Erreur statique < 10 pourcents
+Dépassement transitoire de la vitesse régime établi = 0
+Temps de réponse à 5 pourcents < 0.3 s
+MG pour une roue < 15 dB
+Mph pour une roue < 45 degrés
«performanceRequirement»
Avancer / Reculer
Id = "2.1.1"
Text = "Les mouvements avancer et reculer doivent être possibles conjointement avec un mouvement de lacet"
+Vitesse maximale en ligne droite = 6 km/h
«refine»
«performanceRequirement»
Franchir des obstacles
Id = "2.1.1.1"
Text = "Le fauteuil doit pouvoir accéder à des plate-formes surélevées"
+Hauteur maximale de bordure = 14 cm
+Pente maximale de rampe = 12%
«performanceRequirement»
Tourner
Id = "2.1.2"
Text = "Le fauteuil doit pouvoir tourner (mouvement de lacet)"
+0 < Rayon de courbure de la trajectoire < infini
+Erreur statique pour un rayon de consigne = 3 pourcents
«performanceRequirement»
Etre autonome
Id = "2.1.3"
Text = "L'autonomie du fauteuil doit être suffisante"
+Autonomie = 24 h
«refine»
«usabilityRequirement»
Etre rechargeable
Id = "2.1.3.1"
Text = "Les batteries d'accumulateurs doivent être rechargeables sur le réseau électrique domestique"
+Réseau alternatif monophasé 230 V 50 Hz
«usabilityRequirement»
Etre robuste
Id = "2.1.4"
Text = "Le fauteuil doit résister aux intempéries"
+Etanchéité des composants électromécaniques
«designConstraint»
Respecter les normes
Id = "2.1.5"
Text = "Le fauteuil doit être compatible avec les normes en vigueur "
+Norme : ISO 7176-2:2001
«designConstraint»
Respecter l'environnement
Id = "2.1.6"
Text = "Le fauteuil doit être réalisé en respectant une approche " développement durable "."

Vérifications des exigences liées au déplacement de l'utilisateur

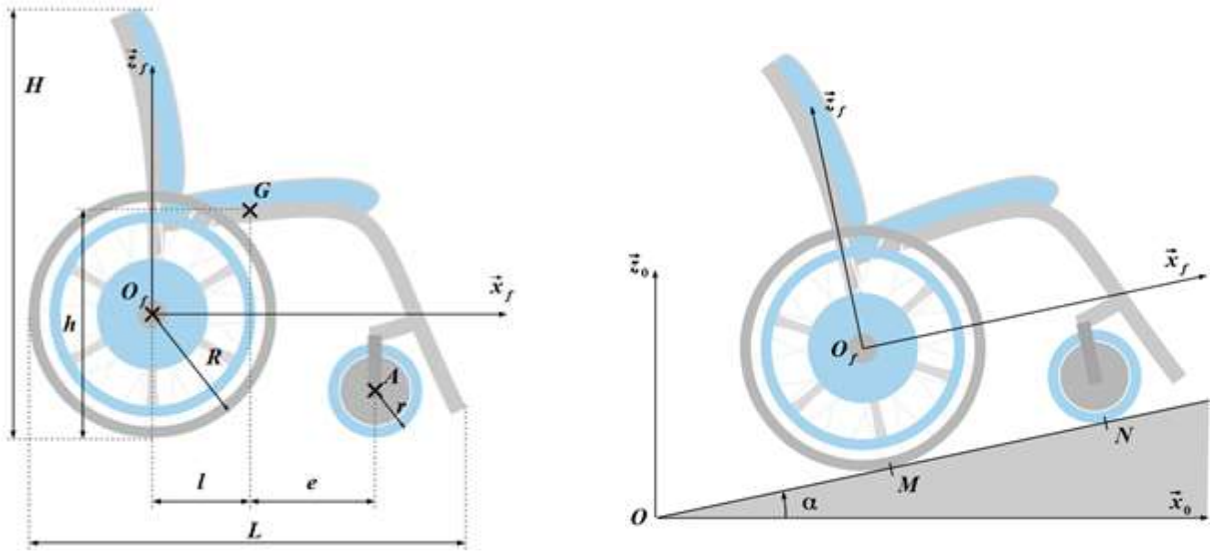
Les différentes normes relatives à l'accessibilité des espaces publics aux personnes àmobilité réduite imposent certaines réalisations au niveau des accès des bâtiments. Lesescaliers, infranchissables pour une personne en fauteuil roulant, doivent être remplacés ou complétés par des rampes d'accès. Comme l'indique la figure ci-dessous, extraite des textesnormatifs, ces rampes peuvent avoir une pente maximale de 12 % (soit environ 6,8°).



Dimensionnement - Paramétrage

Les dimensions du fauteuil sont données sur les figures ci-dessous.

Les dimensions sont celles d'un fauteuil roulant classique : e=400mm, h=600=mm, H=1000mm, L=1300mm, l=200mm, r=150mm, R=400mm.



Sol 0 ; Roue arrière 1 ; Roue avant 2 ; Châssis 3 ; Fauteuil = {0,1,2,3}

Les hypothèses d'études sont :

- le référentiel $R_0(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$, lié au sol 0 est supposé galiléen ;
- Le fauteuil se déplace en ligne droite dans une phase de montée. Le problème est plan ;
- le référentiel $R_f(\overrightarrow{x_f}, \overrightarrow{y_f}, \overrightarrow{z_f})$, est lié au châssis 3 avec $\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{y_f}$;
- $\vec{g} = -g.\overrightarrow{z_0}$ est l'accélération de la pesanteur avec $g = 9{,}81 m/s^2$.
- le vecteur position du fauteuil est $\overrightarrow{OO_f}(t) = x(t).\overrightarrow{x_f} + R.\overrightarrow{y_f}$;
- chaque motoréducteur fournit le même couple, noté C_m (ils peuvent fournir 70Nm maximum) ;
- on supposera que le problème est équivalent à un seul moteur qui fournit un couple $2.C_m$ sur une seule roue arrière ;
- l'ensemble S = {fauteuil, utilisateur} a une masse $M_s = 150kg$. Son centre d'inertie est G ;
- le contact roue arrière 1/sol 0 se fait avec frottement/adhérence. Le coefficient d'adhérence est noté f ;
- l'inertie des roues et du motoréducteur sont négligés ;
- l'effort tangentiel (suivant $\overrightarrow{x_f}$) du sol sur les roues avant (non motrice) est négligé ;
- Les roues arrières 1 sont en liaison pivot d'axe $(O_f, \overrightarrow{y_f})$ par rapport au châssis 1 du fauteuil ;
- Les liaisons autres que roue/sol sont parfaites.

Question 1.

Donner les expressions des torseurs des actions mécaniques transmissibles :

— du sol 0 sur le fauteuil au niveau de la roue avant 2 au point N,

— du sol 0 sur le fauteuil au niveau de la roue arrière 1 au point M,

— du poids sur l'ensemble {fauteuil + utilisateur} au point G.

Question 2.

Donner l'expression du moment dynamique de l'ensemble S par rapport au référentiel R_0 au point G.

Question 3.

Ecrire les trois équations scalaires du principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble S en projection dans R_f au point G.

Pour les questions 4 à 6, on suppose que le contact roue arrière 1/sol 0 se fait à la limite du glissement.

Question 4.

En déduire l'accélération maximale du fauteuil $\ddot{x}(t)$ pour être à la limite du glissement. Faire l'application numérique pour une pente de béton mouillé de 12 % ($f = 0{,}45$).

Question 5.

En appliquant le théorème du moment dynamique à la roue arrière, déterminer l'expression du couple moto-réducteur Cm en fonction de l'accélération $\ddot{x}(t)$. Faire l'application numérique dans les conditions de limite de glissement : on note $\ddot{X}_{gliss}$.

Question 6.

Comparer avec la valeur du couple moteur du constructeur et justifier ce choix.

On suppose, pour la question suivante, qu'il y a adhérence entre la roue arrière et le sol sans être à la limite du glissement. On suppose, de plus, que le couple moteur est de 70Nm sur chacune des roues.

Question 7.

Calculer l'accélération du fauteuil $\ddot{X}_{nominal}$. Le fauteuil risque-t-il de basculer en arrière ?

Pour cela, déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de l'action mécanique du sol 0 sur la roue avant 2.

5. VEHICULE CLEVER

Objectif

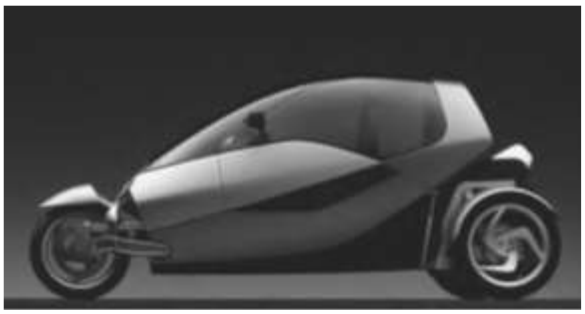
L'objectif est de proposer un modèle dynamique à l'aide du principe fondamental de la dynamique afin de vérifier les conditions de stabilité (non renversement et non glissement) en virage d'un véhicule à 3 roues.

Mise en situation

Le véhicule Clever, présenté sur la figure ci-après, est un démonstrateur technologique développé par un tissu d'industriels européens composé de constructeurs automobile et d'autres organes comme l'Institut Français du Pétrole (IFP), équipementiers, etc.

Clever est la contraction de **C**ompact **L**ow **E**mission **VE**hicle for u**r**ban t**R**ansportation (véhicule compact à faibles émissions pour le transport urbain) car, avec une consommation de carburant de seulement 2,5 L/100 km, il s'annonce très écologique. Une voiture citadine classique à moteur thermique consomme en effet 6 et 8 L/100km de carburant en condition urbaine.





Le Clever se présente comme un véhicule à trois roues pouvant embarquer deux personnes assises en tandem. Il adopte une architecture pendulaire, c'est-à-dire qu'il se penche dans les virages (voir figure ci-après). Le déplacement du centre de gravité qui en résulte lui confère une grande stabilité malgré une faible largeur du véhicule (légèrement inférieure à 1 m, contre 60 à 75 cm pour une moto, et 1,5 m pour une petite voiture). Cette étroitesse se veut une réponse aux problèmes d'encombrement dans les villes mais permet aussi une surface frontale moins importante que sur une voiture conventionnelle et donc des pertes aérodynamiques réduites. En outre, les sensations de conduite sont semblables à celle d'une moto mais avec un pilotage, à l'aide d'un volant, propre à un véhicule à 4 roues. Le moteur est un monocylindre à gaz naturel qui a été développé par l'IFP et dont les performances permettent d'atteindre une vitesse de pointe de 100 km/h avec une accélération en phase avec les attentes pour un véhicule urbain.





Du point de vue de l'architecture cinématique (figure ci-dessous), le groupe motopropulseur est placé à l'arrière. À l'avant, l'habitacle repose sur une roue de moto et pivote par rapport au bloc arrière autour d'une liaison pilotée angulairement par le biais de deux vérins hydrauliques. L'inclinaison est contrôlée par un ordinateur de bord en fonction de l'angle au volant et de la vitesse. Le tableau ci-dessous regroupe les caractéristiques techniques annoncées par l'équipe de développement.

Longueur hors tout	3 m
Largeur hors tout	1 m
Hauteur	1,35 m
Poids	395 kg

Moteur	Monocylindre à gaz naturel 213 cm^3
Puissance maxi	20 ch = 15 kW à 9000 tr/min
Couple maxi	16 Nm à 3500 tr/min
Vitesse maxi	100 km/h
Accélération	0 à 60km/h inférieur 7,5s
Autonomie	100 km

Extrait du cahier des charges

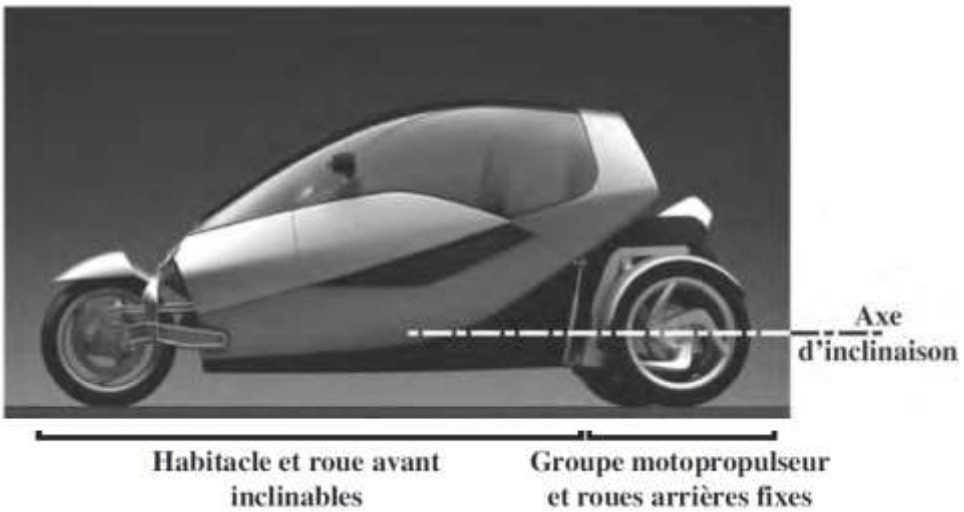
Renversement du véhicule pour une vitesse de 55km/h dans un virage de rayon de courbure 20m : interdit

Glissement du véhicule : pour une vitesse de 55km/h dans un virage de rayon de courbure 20m : interdit

Largeur hors tout du véhicule < 1m.

Conditions de non renversement et d'adhérence

On se propose d'étudier l'influence du mécanisme d'inclinaison de l'habitacle du Clever sur la stabilité de celui-ci dans les virages. En particulier, on va montrer que cette technologie pendulaire lui permet d'avoir une largeur faible, comparée à une voiture qui n'est pas équipée de cette technologie, tout en assurant un non renversement à vitesse élevée. Le mécanisme d'inclinaison peut être décrit globalement par la figure ci-dessous. Le groupe motopropulseur, comportant entre autres le moteur et les roues arrière, reste en permanence perpendiculaire au sol. La partie avant, constituée de l'habitacle et de la roue avant, peut au contraire s'incliner dans les virages grâce à un mécanisme hydraulique. Les deux parties du Clever sont reliées par une liaison pivot d'axe parallèle au sol, schématisée sur la figure.



Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse pas dans un premier temps à la roue avant, ce qui permet de se ramener au système schématisé sur la figure ci-après. On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

— la route R est munie du repère $R_g\left(O,\overrightarrow{x_g},\overrightarrow{y_g},\overrightarrow{z_g}\right)$ Le référentiel associé est supposé galiléen ;

— le groupe motopropulseur 0 est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O. Le rayon de courbure de la trajectoire du point C dans R_g est R_C.

— Le repère lié à 0 est$R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ tel que $\overrightarrow{z_0}=\overrightarrow{z_g}$ et on note$\theta=\left(\overrightarrow{x_g},\overrightarrow{x_0}\right)=\left(\overrightarrow{y_g},\overrightarrow{y_0}\right)$. On a donc $\overrightarrow{OC}\ =\ R_C.\overrightarrow{x_0}$.On remarquera bien que R_0 estmobile par rapport à R_g ;

— l'habitacle 1 est liée au groupe 0 par une liaison pivot d'axe $(C,\overrightarrow{y_0})$. Le repèrelié $R_1(C,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ est tel que $\overrightarrow{y_1}=\overrightarrow{y_0}$. On note$\alpha=\ (\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1})=(\overrightarrow{z_0},\overrightarrow{z_1})$ l'angle d'inclinaison du système pendulaire. Le centre de gravité de 1 est G tel que $\overrightarrow{CG}=e.\overrightarrow{z_1}$ et sa masse est m. On note $\bar{\bar{I}}(G,1)$ l'opérateur d'inertie donné en G de 1 dans la base liée à 0 pour des raisons de simplicité :

$$\bar{\bar{I}}(G,1)=\begin{pmatrix}A_1 & -F_1 & -E_1\\ -F_1 & B_1 & -D_1\\ -E_1 & -D_1 & C_1\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})}$$

— les roues arrière 2 et 3 sont liées au groupe 0 par des liaisons pivots d'axe $(C,\overrightarrow{x_0})$;

— les contacts entre les roues 2 et 3 et la route (R) ont lieu en A et B définis par$\overrightarrow{CA}=\frac{l}{2}\overrightarrow{x_0}-r\overrightarrow{z_0}$, où r est le rayon des roues, et l la voie arrière du véhicule.

Les contacts sont modélisés par des liaisons sphère-plan de centres A et B et de normale $\overrightarrow{z_0}$. Le contact dans ces liaisons se fait avec frottement et lecoefficient de frottement est noté f. Les actions mécaniques de la route (R) sur les roues 2 et 3 sont modélisées dans le plan $(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0})$ par des glisseurs en A et Bde résultantes $\overrightarrow{F_{R\to 2}}=\ T_A.\overrightarrow{x_0}+N_A.\overrightarrow{z_0}$ et $\overrightarrow{F_{R\to 3}}=\ T_B.\overrightarrow{x_0}+N_B.\overrightarrow{z_0}$.

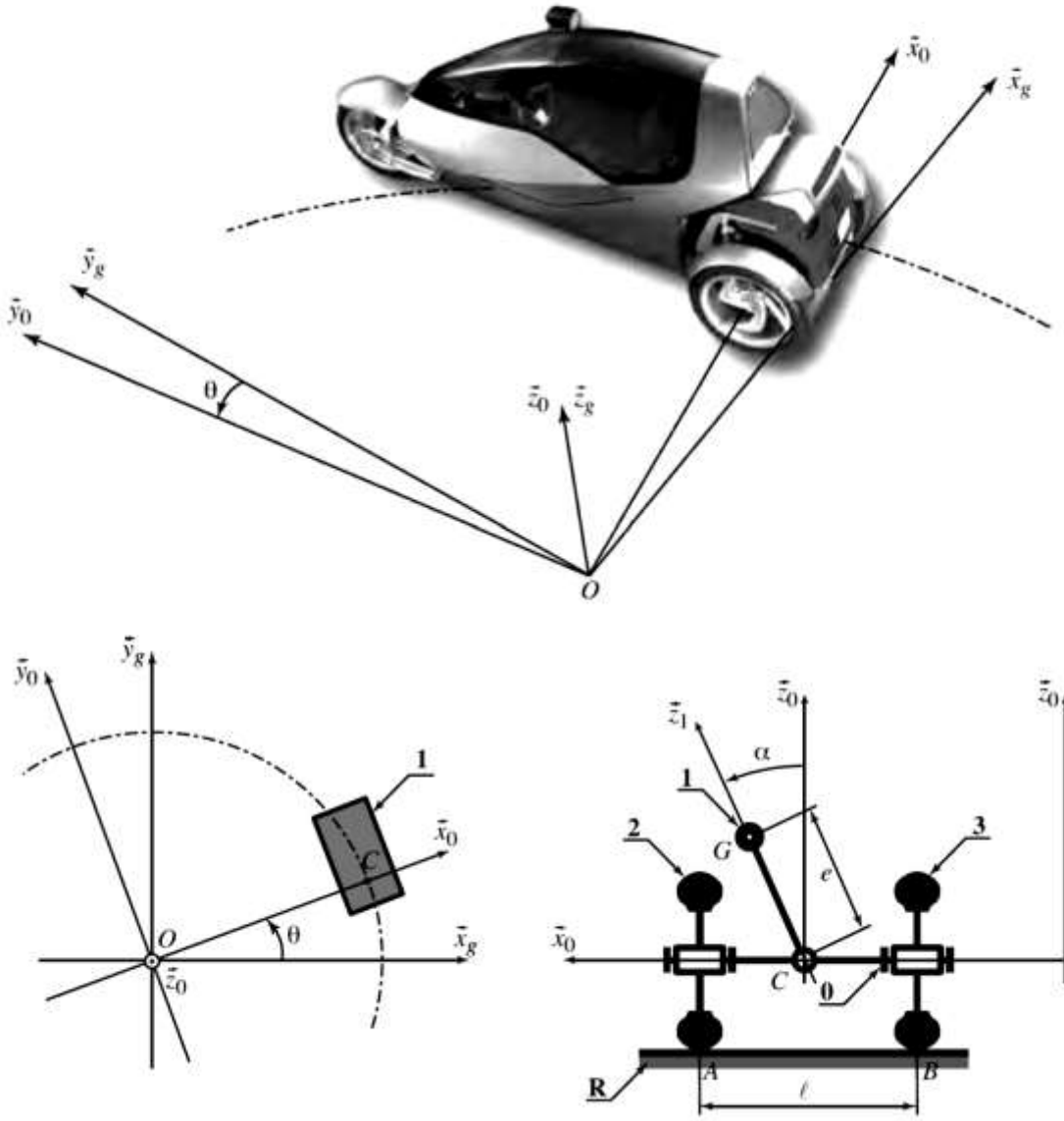
Dans les questions qui suivent, mises à part la liaison entre (R) et 2 et celle entre (R) et 3, pour lesquelles le frottement est pris en compte, toutes les liaisons sont considérées parfaites. En outre, on négligera la masse des pièces 0, 2 et 3 devant celle de l'habitacle 1.

On note $E\ =\ \{0,1,2,3\}$. L'accélération de la pesanteur est$\overrightarrow{g}=-g.\overrightarrow{z_0}$.

On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C, ainsique le module V de la vitesse de ce point par rapport au référentiel Rg sont constants. L'angle d'inclinaison α du système pendulaire est lui aussi supposé constant.

Question 1. Exprimer la vitesse, notée $\overrightarrow{V_{G,1/Rg}}$ du point G dans son mouvement par rapport à Rg en fonction de V, e, R_C etα.

Question 2. Exprimer l'accélération, notée $\overrightarrow{a_{G,1/Rg}}$, du point G dans son mouvement par rapport à Rg en fonction de V, e, R_C etα.



Question 3. En rappelant que le rayon R_C, la vitesse V et l'angle R_C sont supposésconstants, calculer le moment dynamique en G, noté $\overrightarrow{\delta_G\left(E/R_g\right)}$, de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à Rg.

Question 4. En appliquant le principe fondamental de la dynamique en B à l'ensemble E dans son mouvement par rapport à Rg, écrire les trois équations scalaires qui lient les actions mécaniques de contact entre le sol et les roues T_A, N_A, $T_B$et $N_B$aux données du problème.

Pour les questions suivantes, les termes faisant intervenir les moments et produits d'inertie du solide 1 dans les expressions seront négligés.

Question 5. Déduire de ces trois relations l'expression des efforts normaux N_A et N_B en fonction de $m, l, r, e, g, R_C, \alpha$ et V.

Tous les autres paramètres étant fixés, une augmentation de la vitesse V risque-t-elle de susciter un décollement de la roue intérieure ou de la roue extérieure au virage ?

Question 6. Déduire de la question précédente la condition de non renversement, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport $\frac{V^2}{R_C}$ aux paramètres l, r, e, g, R_C, α.

Question 7. Exprimer les conditions d'adhérence liant T_A, T_B, N_A, N_B et f. En utilisant les équations qui avaient été montrées précédemment et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, en déduire la condition d'adhérence, écrite sous la forme d'une inéquation, qui lie le rapport $\frac{V^2}{R_C}$ aux paramètres e, f, g, R_C, α.

Cas d'un véhicule sans architecture pendulaire

Afin de montrer l'intérêt de l'architecture pendulaire, on imagine maintenant que le véhicule Clever n'en est pas équipé, ce qui se traduit par la condition $\alpha = 0$.

Question 8. Réécrire les conditions d'adhérence et de non renversement dans ce cas particulier.

On se propose d'étudier la configuration suivante :

rayon d'une roue, $r = 30$ cm	position du centre de gravité, $e = 50$ cm
accélération de la pesanteur, $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$	coefficient d'adhérence pneu-route, $f = 0{,}8$

Question 9. Calculer la valeur de la voie arrière du véhicule (largeur $l = AB$ entre les roues arrière) en dessous de laquelle le phénomène limitant la vitesse à laquelle on peut prendre un virage, est le risque de renversement et non celui de dérapage. En déduire le phénomène limitant, dans le cas d'une voiture traditionnelle (voie de l'ordre de 1,5 m) et dans le cas d'un véhicule étroit comme le Clever (voie égale à 0,9 m) ?

Question 10. Calculer la valeur de la vitesse maximale V à laquelle il est possible deprendre un virage de rayon de courbure R_C= 20 m avec un véhicule étroit de voie $l = 0{,}9m$ si celui-ci n'est pas inclinable. On exprimera cette vitesse en km/h.

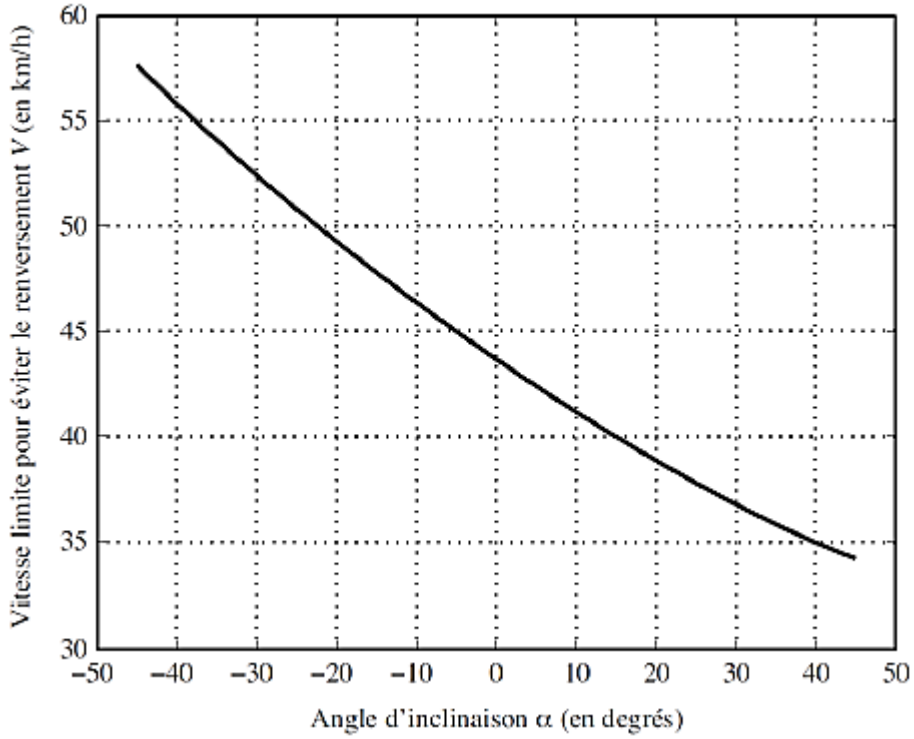
Celle-ci est-elle compatible avec la norme qui prescrit de pouvoir rouler à 55 km/h dans un virage de rayon de courbure 20 m?

Cas d'un véhicule à architecture pendulaire

On considère maintenant l'architecture pendulaire. L'angle α peut varier dans la plage $[-45°, 45°]$.

Question 11. Commenter le signe de l'angle α pour contribuer au non renversement du Clever dans la configuration de la figure ci-dessus (virage à gauche). Le véhicule doit-il s'incliner vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la trajectoire (comme c'est le cas sur la figure ci-dessus, schéma en bas à droite) ?

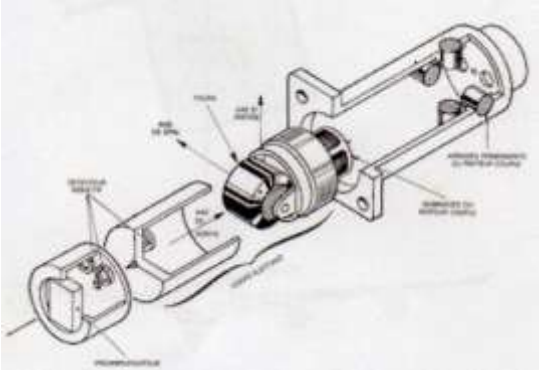
Le graphique de la figure ci-dessous, représente, en fonction de l'angle d'inclinaison α et dans la configuration précédente (même géométrie et rayon de courbure R_C= 20m), l'évolution de vitesse maximale V en dessous de laquelle il n'y a pas renversement.



Question 12. En utilisant la figure donnée, déterminer l'angle d'inclinaison α qu'il faut imposer à l'habitacle pour respecter la norme.

6. VITESSE ABSOLUE DE GIRATION D'UN AVION : ETUDE D'UN GYROMETRE

On se propose, d'analyser le principe de fonctionnement d'un gyromètre. Le gyromètre représenté ci-dessous est un gyromètre intégrateur Sagem présent dans les centrales inertielles d'avion Airbus.



Mise en situation

Afin de déterminer la position d'un véhicule (avion, char, lanceur spatial, sous-marin) sans référence ou sans visibilité extérieure, on utilise des centrales de navigation inertielles. Ces centrales sont basées sur deux types de composants :

- des accéléromètres,
- des gyromètres

Modèle cinématique, données, hypothèses

Le gyromètre est modélisé par l'assemblage mécanique $\Sigma = \{S_1, S_2\}$ dont le schéma cinématique est donné ci-après.

$S_1 =$ cadre ou armature du gyromètre supportant l'élément sensible

$S_2 =$ toupie gyroscopique, solide de révolution

Repère de référence : repère galiléen $R_g\left(O, \overrightarrow{x_g}, \overrightarrow{y_g}, \overrightarrow{z_g}\right)$.

Σ est monté à l'intérieur d'un avion dont on désire déterminer le mouvement.

Repère lié à la coque de l'avion : $R_v(O, \overrightarrow{x_{1v}}, \overrightarrow{y_v}, \overrightarrow{z_v})$. Ces trois vecteurs définissent les mouvements de roulis, tangage, lacet.

Pour ne pas alourdir les calculs, mais sans changer la généralité des conclusions, on suppose l'avion en mouvement de lacet pur. Son vecteur rotation instantanée absolu est donc : $\overrightarrow{\Omega}\left(avion/R_g\right) = \omega_0.\overrightarrow{z_v}$. La vitesse angulaire ω_0 est supposée constante.

$\boldsymbol{S_1}$: $armature, repère\ lié\ R_1(O, \overrightarrow{x_{1v}}, \overrightarrow{y_{12}}, \overrightarrow{z_1})$

Le solide S_1 est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{x_{1v}})$ avec son boitier fixé dans la coque de l'avion. La matrice d'inertie de S_1 est :

$$\bar{\bar{I}}(O, S_1) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_{1v}}, \overrightarrow{y_{12}}, \overrightarrow{z_1})}$$

Un servomoteur fixé sur la coque permet d'exercer sur l'armature S_1 un couple de rappel élastique et d'amortissement tel que :

$$\{F(servomoteur \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ (-k\theta - f\dot{\theta})\overrightarrow{x_{1v}} \end{Bmatrix}_O$$

$\boldsymbol{S_2}$: $toupie\ gyroscopique, repère\ lié\ R_2(O, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_{12}}, \overrightarrow{z_2})$

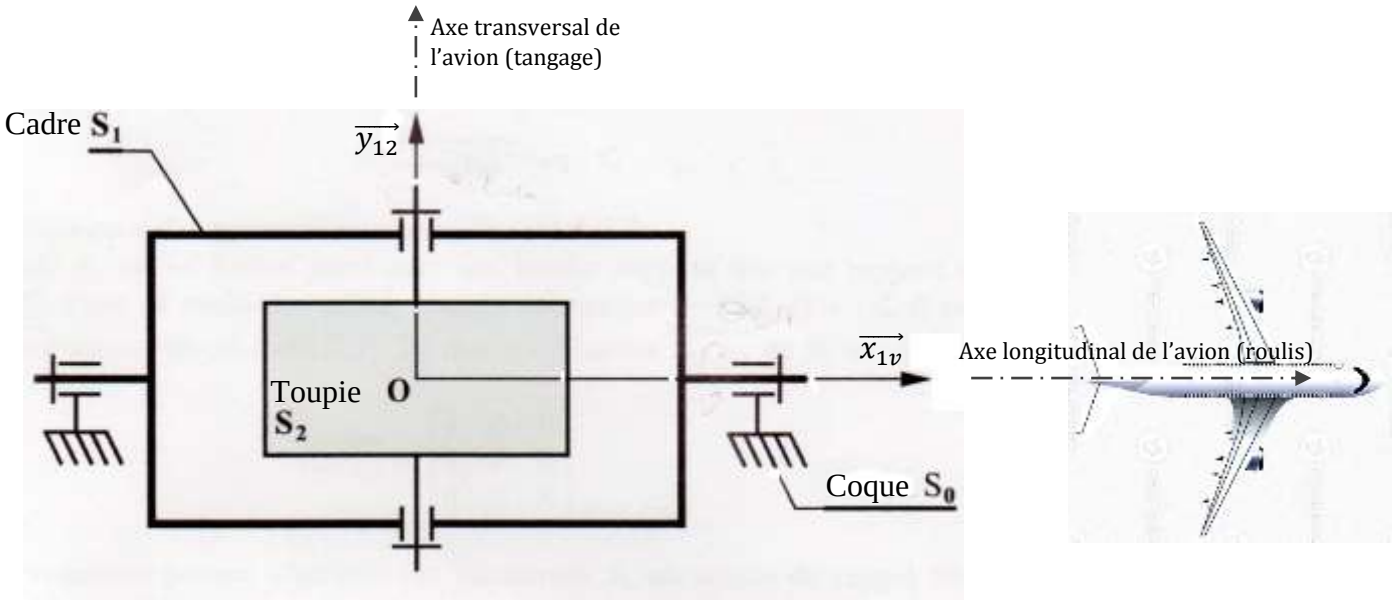
Le solide S_2 est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{y_{12}})$ avec l'armature S_1. Un moteur dont le stator est fixé à S_1 permet le maintient de la toupie S_2 à haute vitesse angulaire constante Ω :

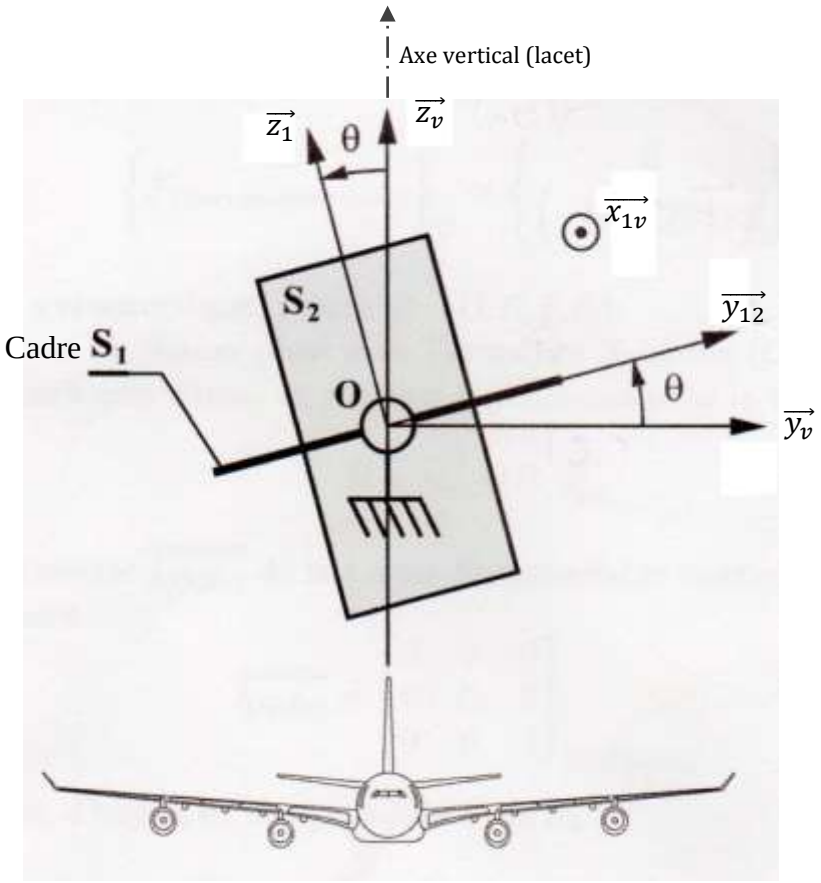
$$\overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) = \Omega.\vec{y}_{12}$$

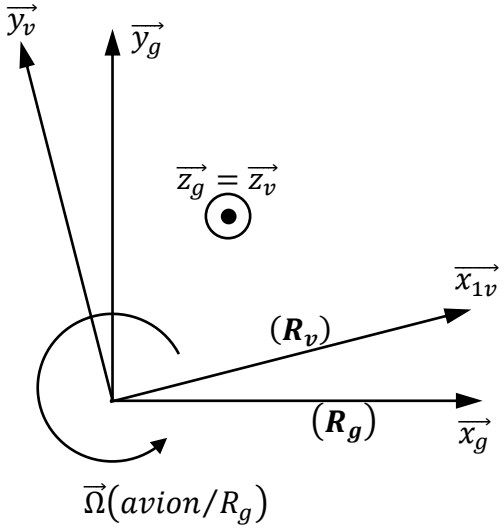
La matrice d'inertie $\bar{\bar{I}}(O, S_1)$

$$\bar{\bar{I}}(O, S_2) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(-,\overrightarrow{y_{12}},-)}$$

Le point O est le centre d'inertie des solides S_1 et S_2.







Travail demandé - questionnaire

Pour caractériser le fonctionnement du gyromètre, on va montrer que la mesure de la vitesse de rotation instantanée de l'avion ω_0 peut s'effectuer sans appareil externe, et uniquement à partir de la mesure de la déviation angulaire θ du boitier du gyromètre.

On sera ainsi amené à présenter la notion plus générale de couple gyroscopique.

Q0. Observer la matrice d'inertie $\bar{\bar{I}}(O, S_2)$: pour quelle raison la base d'expression de la matrice est-elle donnée incomplète ? Que déduit-on de ceci ?

Q1. Faire le graphe de structure en vue d'une étude dynamique

Le seul paramètre géométrique est θ. Une seule équation de la dynamique suffit.

Q2. Nous allons appliquer le théorème du moment dynamique à l'ensemble $\Sigma = \{S_1, S_2\}$, au point O, projeté sur l'axe $\overrightarrow{x_{1v}}$: préciser les raisons de ce choix. Ecrire le théorème.

Q3. Appliquer le théorème proposé précédemment et déterminer la loi de mouvement de l'armature, incluant uniquement le paramètre θ et ses dérivées successives.

La loi de mouvement établie sera mise sous la forme :

$$\alpha\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \gamma\theta = g(\Omega, \omega_0).\cos\theta + h(\omega_0).\sin\theta\cos\theta$$

Où α, β, γ sont des constantes, $g(\Omega, \omega_0)$ est une fonction de Ω, ω_0 , et $h(\omega_0)$ est une fonction de ω_0.

Vous vérifierez l'homogénéité de l'expression.

Le dispositif de rappel et d'amortissement est réglé « très dur » (θ reste faible), et « rapide » avec une constante de temps de quelques ms. En outre le solide S_2 tourne à une vitesse très élevée pouvant atteindre jusqu'à 48 000 tr/min.

Q4. Montrer à partir de ces conditions de fonctionnement que, très rapidement, l'angle θ a une expression littérale simple.

Q5. $C = 4{,}5.\,10^{-4}\ kg.m^2$; $\Omega = 48000\ \ tr/min$; $k = 2{,}7\ \ Nm/rad$.

L'armature bascule de 5° dans le cockpit du pilote.

Quelle est la vitesse angulaire de lacet absolue ?

Conclusion

L'appareil ainsi réalisé permet de mesurer la vitesse de roulis de l'avion. Il équipe la plupart des « indicateurs de virage ».

De manière plus générale un **boitier gyroscopique** possède trois gyromètres dont les axes sensibles sont orthogonaux deux à deux. En sortie de ce boitier on peut donc recueillir le vecteur rotation instantanée absolu du véhicule. Un tel montage est appelé Strapdown.

De manière plus fine, un **boitier gyrométrique** placé sur un solide P, appelé plate-forme et travaillant autour du zéro (en rotation) peut servir de détecteur de rotation et ainsi commander l'asservissement qui corrige et annule toute rotation de P.

C'est la notion de plateforme stabilisée.