Colles

semaine 24 : 25 mars - 31 mars

I. Norme sur un espace vectoriel

I.1. Norme et espace vectoriel normé

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.

  1) $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ N(\lambda \cdot x) \ = \ |\lambda|\ N(x)}$ *(homogénéité)*

  2) $\boxed{\forall x \in E,\ N(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0_E}$ *(séparation)*

  3) $\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ N(\ x + y\ ) \ \leqslant \ N(x) + N(y)}$ *(inégalité triangulaire)*

  - $\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ \big|\ N(x) - N(y)\ \big| \ \leqslant \ N(x + y)}$ *($2^{\text{ème}}$ inégalité triangulaire)*
  - Les propriétés d'inégalité triangulaire peuvent être résumées comme suit :

$$\boxed{\forall(x, y) \in E^2,\ \big|\ N(x) - N(y)\ \big| \ \leqslant \ N(x \pm y) \ \leqslant \ N(x) + N(y)}$$

- Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une norme N, c'est-à-dire formellement le couple (E, N), est appelé un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel normé**.

Remarque

- Les propriétés ***1)***, ***2)*** et ***3)*** permettent de démontrer :

$$\forall x \in E,\ 0 \ = \ N(0_E) \ = \ N(x - x) \ \leqslant \ N(x) + N(-x) \ = \ 2\ N(x)$$

- La propriété de séparation est en fait une équivalence.
  En effet, on peut démontrer la réciproque grâce à la propriété d'homogénéité.
  Soit $x \in E$.

$$\begin{array}{ccc} N(0 \cdot x) & = & |0| \times N(x) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ N(0_E) & & 0 \end{array}$$

- On a déjà rencontré la notion de norme dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens réels. Rappelons qu'une norme est euclidienne si elle est issue d'un produit scalaire. L'identité du parallélogramme n'est vérifiée que par les normes euclidiennes. C'est même une manière de démontrer qu'une norme est (ou n'est pas !) euclidienne.

$$\forall(x, y) \in E^2,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \ = \ 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

- On rappelle qu'on sait caractériser le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire **dans le cas d'une norme euclidienne** :

$$\forall (x,y) \in E, \quad \boxed{\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l} x = 0_E \\ \texttt{OU} \quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ y = \alpha \cdot x \end{array}}$$

- Si la norme $\| \cdot \|$ n'est pas euclidienne (c'est-à-dire n'est pas associée à un produit scalaire), alors on ne peut rien dire a priori de ce cas d'égalité. Prenons par exemple :
  × l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_1)$,
  × les vecteurs $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.
  Alors $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ mais x et y ne sont pas colinéaires.

I.2. Normes usuelles

I.2.a) Norme sur un espace préhilbertien réel

Soit $\big(E, \langle \cdot , \cdot \rangle\big)$ un espace préhilbertien réel.

- L'application $\| \cdot \|_2$ définie de la façon suivante est une norme sur E :

$$\begin{array}{rccl} \| \cdot \|_2 & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}$$

(les normes issues d'un produit scalaire sont généralement notées $\| \cdot \|_2$)

- Cette norme est appelée **norme euclidienne** issue du produit scalaire.
- Soit $x \in E$. Si $\|x\|_2 = 1$, on dit que le vecteur x est **normé** ou **unitaire**.

Exemple

- L'application suivante est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{array}{rccl} \| \cdot \|_2 & : & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} |x_i|^2} \end{array}$$

  Le produit scalaire associé est défini par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p,\ \langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i\ y_i$.

- Soit I est un intervalle réel. On considère $E = L^2(I, \mathbb{R}) \ \cap\ \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.
  L'application suivante est une norme euclidienne sur E :

$$\begin{array}{rccl} \| \cdot \|_2 & : & E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \sqrt{\displaystyle\int_I \mid f(t) \mid^2\, dt} \end{array}$$

  Le produit scalaire associé est défini par : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle x, y \rangle = \displaystyle\int_I f(t)\ g(t)\ dt$.

- L'application suivante est une norme euclidienne sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rccl} \| \cdot \| & : & \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & A & \mapsto & \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)} = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \mid a_{i,j} \mid^2 \end{array}$$

  Le produit scalaire associé est défini par : $\forall (x,y) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_p(\mathbb{R}),\ \langle A, B \rangle = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant p} a_{i,j}\ b_{i,j}$.

Il est à noter que lorsque l'on travaille avec des quantités réelles, $|x_i|^2 = x_i^2$. Pourquoi dans ce cas ne pas préférer la notation x_i^2 à la notation $|x_i|^2$? Tout simplement pour prendre de bonnes habitudes : on travaille, de manière générale, avec des quantités dans $\mathbb{K}$ (éventuellement complexes).

I.2.b) Exemples de normes sur $\mathbb{K}^p$

Les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^p$.

1. $$\|\cdot\|_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ x=(x_1,\dots,x_p) & \mapsto & \|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{p} |x_k| \end{array}$$

2. $$\|\cdot\|_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ x=(x_1,\dots,x_p) & \mapsto & \|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{p} |x_k|^2} \end{array}$$

3. $$\|\cdot\|_\infty : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{R}_+ \\ x=(x_1,\dots,x_p) & \mapsto & \|x\|_\infty = \max\limits_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k| \end{array}$$

I.2.c) Généralisation des exemples précédents à des normes sur des espaces vectoriels de dimensions finies

Les trois normes usuelles précédentes se généralisent à tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, une fois choisie une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_p)$ de E : il suffit de prendre, pour tout $x \in E$, les coordonnées $(x_1,\dots,x_p)$ de x dans la base $\mathscr{B}$.

Normes sur $\mathbb{K}_p[X]$

On munit $\mathbb{K}_p[X]$ de sa base canonique, alors les application suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}_p[X]$:

1. $$\|\cdot\|_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P=\sum\limits_{k=0}^{p} a_k\, X^k & \mapsto & \|P\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{p} |a_k| \end{array}$$

2. $$\|\cdot\|_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P=\sum\limits_{k=0}^{p} a_k\, X^k & \mapsto & \|P\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{p} |a_k|^2} \end{array}$$

3. $$\|\cdot\|_\infty : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_p[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P=\sum\limits_{k=0}^{p} a_k\, X^k & \mapsto & \|P\|_\infty = \max\limits_{k\in[\![1,n]\!]} |a_k| \end{array}$$

Normes sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$

On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ de sa base canonique, alors les application suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}_p[X]$:

1. $$\|\cdot\|_1 : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} & \mapsto & \|A\|_1 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p} |a_{i,j}| \end{array}$$

2. $$\|\cdot\|_2 : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & \|A\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p} |a_{i,j}|^2} \end{array}$$

3. $$\|\cdot\|_\infty : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} & \mapsto & \|A\|_\infty = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2} |a_{i,j}| \end{array}$$

I.3. Norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ ensemble des fonctions bornées de I à valeurs dans $\mathbb{K}$

I.3.a) Rappels sur la borne supérieure

Rappels

- Rappelons que toute partie $F \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Par définition, la borne supérieure M d'une partie majorée F de $\mathbb{R}$:

  1) est un majorant de F : $\boxed{\forall x \in F,\ x \leqslant M}$

  2) est le plus petit des majorants de F : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in F,\ x > M - \varepsilon}$
- Il est à noter que la borne supérieure d'une partie $F \subset \mathbb{R}$ n'est pas forcément un élément de F. Par exemple :
$$\sup \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \ = \ 1$$
  (remarquons que la borne supérieure n'est pas ici un élément de l'ensemble)
- Si la borne supérieure M d'un ensemble F est atteinte (c'est-à-dire si $M \in F$), on dit que M est le maximum de cet ensemble.
- On définit de la même manière la notion de borne inférieure d'un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ minoré. C'est, par définition, le plus grand des minorants de F.
- La borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ est unique.

Conséquence

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$.

On note $k\,A = \{k\,x \mid x \in A\}$.

$$\boxed{\sup(k\,A) \ = \ k \sup(A)}$$

I.3.b) Norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.

Alors l'application $\|\cdot\|_\infty$ suivante est une norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_\infty & : & \mathcal{B}(I,\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \sup\limits_{t \in I} \big|f(t)\big| \end{array}$$

I.4. Autres normes

I.4.a) Sur l'ensemble des familles sommables

Les applications suivantes sont des normes.

1. On note $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des suites sommables.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_1 & : & \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & u=(u_n) & \mapsto & \|u\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| \end{array}$$

2. On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des suites de carrés sommables.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_2 & : & \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & u=(u_n) & \mapsto & \|u\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} \end{array}$$

I.4.b) Sur l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Les applications suivantes sont des normes.

1. On note E_1 l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_1 & : & E_1 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \|f\|_1 = \int_I |f(t)|\ dt \end{array}$$

2. On note E_2 l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrables sur I.

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_2 & : & E_2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & f & \mapsto & \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2\ dt} \end{array}$$

II. Boules sur un espace vectoriel normé

II.1. Distance associée à une norme

II.1.a) Définition

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On appelle **distance** associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E l'application d définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d} & : & E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & (x,y) & \mapsto & \mathrm{d}(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

Exemple

Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$, la distance associée à la norme $\|\cdot\|_2$ est la distance euclidienne manipulée dans la vie de tous les jours.

II.2. Propriétés des distances

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1. *Symétrie* : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \mathrm{d}(x,y) \ = \ \mathrm{d}(y,x)}$

2. *Homogénéité* : $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \mathrm{d}\big(\lambda \cdot (x,y)\big) \ = \ |\lambda|\,\mathrm{d}(x,y)}$

3. *Séparation* : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \mathrm{d}(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y}$

4. *Inégalité triangulaire* : $\boxed{\forall (x,y,z) \in E^3,\ \mathrm{d}(x,z) \ \leqslant \ \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)}$

II.3. Boules ouvertes, boules fermées, sphère

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soient $a \in E$ et soit $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B(a,r)$ et défini par :

$$\boxed{B(a,r) = \big\{x \in E \,|\, \mathrm{d}(a,x) < r\big\}}$$

- On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B_f(a,r)$ et défini par :

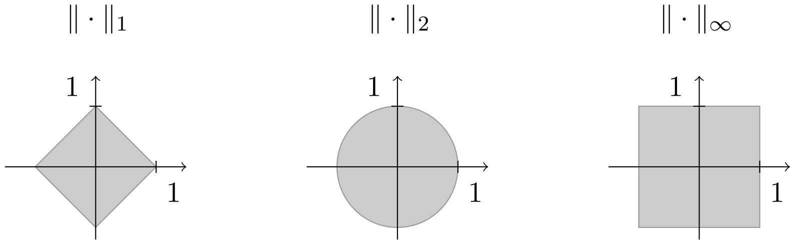
$$\boxed{B_f(a,r) = \big\{a \in E \,|\, \mathrm{d}(a,x) \leqslant r\big\}}$$

- On appelle **sphère** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $\mathbb{S}(a,r)$ et défini par :

$$\boxed{S(a,r) = \big\{x \in E \ |\ \mathrm{d}(a,x) = r\big\}}$$

Exemple

On peut représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules centrées en $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon 1 associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.



Remarque

- On note une inclusion entre les boules précédentes.
  On peut en fait démontrer le résultat suivant :
  Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.
  Soient $a \in E$ et $r \in \,]0, +\infty[$.
  On note $B_1(a,r)$ (resp. $B_2(a,r)$ la boule de centre a et de rayon r pour la norme N_1 (resp. N_2).
  Supposons : $N_1 \leqslant N_2$ (c'est-à-dire : $\forall x \in E,\ N_1(x) \leqslant N_2(x)$).

$$\boxed{\Big(\forall x \in E,\ N_1(x) \leqslant N_2(x)\Big) \ \Rightarrow \ B_2(a,r) \subset B_1(a,r)}$$

II.4. Les boules sont des parties convexes

II.4.a) Notion de segment dans un espace vectoriel (normé)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $(x, y) \in E \times E$.

- On appelle segment d'extrémités x et y, noté $\texttt{SEG}(x, y)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$\boxed{\texttt{SEG}(x, y) \;=\; \{\; t \cdot x + (1 - t) \cdot y \mid t \in [0, 1] \;\}}$$

II.4.b) Notion de parties convexes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $A \subset E$ une partie non vide de E.

- La partie A est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in A^2,\ \texttt{SEG}(x, y) \;\subset\; A$$

II.5. Parties bornées d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $A \subset E$ une partie de E.

- La partie A est dite bornée s'il existe $a \in E$ et $r > 0$ tel que : $A \subset B_f(a, r)$.
- On démontre de manière directe :

$$\begin{aligned} A \text{ est une partie bornée} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists a \in E,\ \exists r > 0,\ A \subset B_f(a, r) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists a \in E,\ \exists r > 0,\ A \subset B(a, r) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists r > 0,\ A \subset B_f(0_E, r) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists r > 0,\ A \subset B(0_E, r) \end{aligned}$$

Remarque

- Si $A \subset E$ est une partie non vide d' un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit qu'une fonction $f : A \to E$ est bornée si son image $f(A)$ est une partie bornée de E.
  Autrement dit, f est bornée s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in A,\ \|f(x)\| \;\leqslant\; M$$

- Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite bornée s'il existe $M \geqslant 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \;\leqslant\; M$.

III. Convergence des suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

III.1. Convergence et limite d'une suite

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Soit $\ell \in E$.

- On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge**, ou **tend**, vers ℓ, si $\|x_n - \ell\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon\ \Big)$$

  ou encore, avec l'abus de notation habituel :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

  Si c'est le cas, l'élément ℓ est unique et appelé la **limite** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On adopte les notations usuelles $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ pour signifier que la suite (x_n) converge vers ℓ.
- On obtient de manière directe :

$$\boxed{\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0}$$

- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Démonstration.
Démontrons l'unicité de la limite.
Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux limites potentielles d'une suite (x_n).

$$0 \ \leqslant\ \|\ell_1 - \ell_2\| \ =\ \|(\ell_1 - x_n) + (x_n - \ell_2)\| \ \leqslant\ \|\ell_1 - x_n\| + \|x_n - \ell_2\|$$

Or :
× $\|\ell_1 - x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
× $\|x_n - \ell_2\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\ell_1 - \ell_2\| = \|\ell_1 - \ell_2\| = 0$. □

Exemple

1. Toute suite constante converge vers sa valeur constante.
2. Si une suite (x_n) converge vers une limite $\ell \in E$ alors : $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$.
3. Lorsque $E = \mathbb{K}$, on retrouve la notion de suite (scalaire) convergente.
4. La définition précédente permet de donner du sens à la notion de suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ convergente ou encore de suite de matrices convergentes. Le résultat suivant permet de caractériser plus facilement ces cas.

III.2. Caractérisation de la convergence des suites en dimension finie

III.2.a) Équivalence des normes en dimension finie

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) $\boxed{\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1 \leqslant p \times \|\cdot\|_\infty}$

Autrement dit, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\max_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2} \leqslant \sum_{k=1}^{p} |x_k| \leqslant p \times \max_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k|$$

2) Notons N_1 et N_2 deux normes sur E.

$$\boxed{\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in E, \ \alpha \, N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta \, N_1(x)}$$

On dit alors que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

III.2.b) Résultat général

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On suppose que E est de **de dimension finie** $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in E$.

Notons N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. $\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{N_1(\cdot)}} \ell \Leftrightarrow x_n \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{N_2(\cdot)}} \ell}$

La convergence d'une suite d'éléments de E, et le cas échéant sa limite, ne dépendent pas du choix de la norme sur E.

2. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Notons :

× $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}$.

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$ les coordonnées de x_n dans $\mathscr{B}$.

On a alors l'équivalence suivante :

$$\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow \forall \, k \in [\![1,p]\!], \ x_k^{(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_k}$$

La convergence d'une suite se ramène à la convergence de ses coordonnées dans une base.

Démonstration.

1. Comme E est de dimension finie, N_1 et N_2 sont équivalentes.
Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \alpha\ N_1(x)\ \leqslant\ N_2(x)\ \leqslant\ \beta\ N_1(x) \tag{*}$$

$(\Leftarrow)$ Supposons $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N_2(\cdot)}{\longrightarrow}} \ell$. Alors :

$$\alpha\ N_1(x_n - \ell)\ \leqslant\ N_2(x_n - \ell)\ \leqslant\ \beta\ N_1(x_n - \ell)$$

Or :

- $\times$ $\alpha\ N_1(x_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- $\times$ $\beta\ N_1(x_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On en déduit, par théorème d'encadrement : $N_2(x_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$(\Rightarrow)$ D'après $(*)$: $\forall x \in E,\ \dfrac{1}{\beta}\ N_2(x)\ \leqslant\ N_1(x)\ \leqslant\ \dfrac{1}{\alpha}\ N_2(x)$.
D'où le résultat souhaité à l'aide du fonctionnement précédent.

2. • Dans le cas de la norme $\|\cdot\|_1$ sur E

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $(x_n) \in \big(E\big)^{\mathbb{N}}$. On note :

- $\times$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$ les coordonnées de x_n dans la base $\mathscr{B}$.
- $\times$ $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}
x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow}} \ell \quad &\Leftrightarrow \quad \|x_n - \ell\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \|\,(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}) - (\ell_1, \dots, \ell_p)\,\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \|\,(x_1^{(n)} - \ell_1, \dots, x_p^{(n)} - \ell_p)\,\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{p} |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![1, p]\!],\ |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

• Dans le cas d'une norme N sur E

Avec les notations précédentes.

$$\begin{aligned}
x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N(\cdot)}{\longrightarrow}} \ell \quad &\Leftrightarrow \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow}} \ell \qquad \textit{(car N et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![1, p]\!],\ |x_k^{(n)} - \ell_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

□

Remarque

- Ce résultat est très utile en pratique. Lorsqu'on travaille sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, la nature d'une suite ne dépend pas de la norme utilisée. Par exemple :
  - $\times$ la suite $\left((1 - \frac{1}{n})\ X^2 + X - \frac{e^{i\,n}}{n}\right)_n$ est convergente, de limite $X^2 + X$.
  - $\times$ la suite $\left(\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 1 \\ -\frac{e^{i\,n}}{n} & 1 \end{pmatrix}\right)_n$ est convergente, de limite $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III.2.c) Traduction du résultat général pour les suites dans les espaces de dimension finie usuels

- Soient $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On retrouve la caractérisation connue :

$$\boxed{z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Rightarrow \ \begin{cases} \bullet \ \ \mathrm{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) \\ \bullet \ \ \mathrm{Im}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p}) \in \mathbb{K}^p$, et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in \mathbb{K}^p$. Alors :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow \ \forall\, k \in [\![1,p]\!],\ x_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A_n = (a_{n,i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $L = (\ell_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \ \Leftrightarrow \ \forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!],\ a_{n,i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_{i,j}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $P_n = \sum\limits_{k=0}^{p} a_{n,k}X^k \in \mathbb{K}_p[X]$ et $L = \sum\limits_{k=0}^{p} \ell_k X^k \in \mathbb{K}_p[X]$. Alors :

$$\boxed{P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \ \Leftrightarrow \ \forall\, k \in [\![0,p]\!],\ a_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_k}$$

`MÉTHODO` **Démontrer que deux normes ne sont pas équivalentes**

- Comme mentionné plus haut, lorsque l'espace vectoriel E de travail est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En revanche, en dimension infinie, les normes ne sont pas forcément équivalentes. À la question : « Les normes N_1 et N_2 suivantes sont-elles équivalentes ? » on répond :
  - × « oui » dans le cas où l'espace vectoriel E est de dimension finie.
  - × généralement « non » si E est de dimension infinie. En dimension infinie, deux normes peuvent être équivalentes mais la formulation de la question (on ne demande pas : « Démontrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes ») laisse penser que ce n'est pas le cas ici.

  En particulier, lorsque l'on travaille sur un espace de fonctions (ensemble des fonctions bornées sur un intervalle I, ensemble des fonctions continues et (de carré) intégrables sur I, ensemble $\mathbb{K}[X]$), il est relativement fréquent d'avoir à démontrer que deux normes sont équivalentes.

  Il convient alors de se doter d'un outil permettant de démontrer la non équivalence de deux normes.

- Considérons N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.
  Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in E,\ \alpha\ N_1(x) \ \leqslant\ N_2(x) \ \leqslant\ \beta\ N_1(x)$.
  On en déduit alors que pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$:

$$N_2(x_n) \ \leqslant\ \beta\ N_1(x_n) \qquad \text{et} \qquad N_1(x_n) \ \leqslant\ \frac{1}{\alpha}\ N_1(x_n)$$

  Les normes étant positives, on en conclut : $|\,N_2(x_n)\,| \ \leqslant\ \beta\ |\,N_1(x_n)\,|$.
  Cela démontre : $N_2(x_n) = \underset{n\to+\infty}{O}\big(N_1(x_n)\big)$. Pour des raisons similaires : $N_1(x_n) = \underset{n\to+\infty}{O}\big(N_2(x_n)\big)$.

  Ainsi, si deux normes sont équivalentes, les suites $\big(N_1(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(N_2(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont du même ordre.
  (la relation « être du même ordre que » qui relie deux suites est évidemment réflexive et on utilise parfois la notation : $N_1(x_n) = \underset{n\to+\infty}{\Theta}\big(N_2(x_n)\big)$)

- La contraposée du point précédent permet d'affirmer que si deux suites $\big(N_1(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(N_2(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas du même ordre alors les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.
  Pour démontrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on peut donc chercher une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :
  × $\dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui démontre que la suite $\left(\dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}\right)$ n'est pas bornée.
  × $\dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui démontre que la suite $\left(\dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)}\right)$ n'est pas bornée.
- Finalement, on établit la condition suivante :

$$\boxed{\exists (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \ \left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \bullet \ \dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \text{Les normes } N_1 \text{ et } N_2 \text{ ne sont pas équivalentes}}$$

  De manière générale, il est conseillé de procéder par l'absurde pour démontrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On considère les normes N_1 et N_2 suivantes.

a) $N_1(\,P\,) = \displaystyle\int_0^1 \ |P(t)| \ dt$.

b) $N_2(\,P\,) = \displaystyle\max_{k\in[\![0,\deg(P)]\!]} \ |a_k|$ (où l'on a noté $(a_0, \dots, a_{deg(P)})$ les coefficients de P).

Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Démonstration.

- On procède par l'absurde.
  Supposons que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.
  Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :
  $$\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \alpha \ N_1(P) \ \leqslant \ N_2(P) \ \leqslant \ \beta \ N_1(P)$$
- Considérons la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :
  × $N_1(X^n) = \displaystyle\int_0^1 \ |\,t^n\,| \ dt = \int_0^1 \ t^n \ dt = \frac{1}{n+1}$.
  × $N_2(X^n) = \max(|0|, \dots, |0|, |1|) = 1$.
  On en déduit alors :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \ \leqslant \ \underset{1}{\underset{\shortparallel}{N_2(X^n)}} \ \leqslant \ \beta \ \underset{\frac{1}{n+1}}{\underset{\shortparallel}{N_1(X^n)}}$$
  Or :
  × $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  × $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  On en déduit, par théorème d'encadrement : $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est absurde. □

III.3. Propriétés des suites convergentes

III.3.a) Propriétés algébriques

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ deux suites.

Soient $\ell_1 \in E$ et $\ell_2 \in E$.

Soti $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. **Linéarité**

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \\ \bullet\ y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\, x_n + \mu\, y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\, \ell_1 + \mu\, \ell_2$$

2. **Produit externe**

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R} \\ \bullet\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_n\, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\, \ell$$

III.3.b) Autres propriétés

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

1. La suite (x_n) converge $\Rightarrow$ La suite (x_n) est bornée

(c'est-à-dire : $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| \leqslant M$)

2. a) $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E \Leftrightarrow \|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Rightarrow \|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$

3. a) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

La suite (x_n) converge vers ℓ $\Rightarrow$ La suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors toute suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.

b) Propriété de recouvrement

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E \\ \bullet\ x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

IV. Topologie dans un espace vectoriel normé

IV.1. Intérieur d'une partie

IV.1.a) Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

- Un élément $a \in E$ est dit **intérieur** à D s'il existe une boule ouverte non vide de centre a et incluse dans D.
- On appelle **intérieur** de D et on note $\mathring{D}$, l'ensemble des éléments de E qui sont des points intérieurs à D.

Remarque

- Ne pas confondre « appartenir à » et « être intérieur à ». Un point intérieur à une partie est un point qui est dans cette partie sans être « au bord » de celle-ci.
  Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, alors $1 \in [0, 1]$ mais 1 n'est pas intérieur à $[0, 1]$.
- Lorsque $E = \mathbb{R}$, l'ensemble des points intérieurs à ;
  × $D = [0, 1[$ est $\mathring{D} =]0, 1[$,
  × $D =]0, 1[$ est $\mathring{D} =]0, 1[$,
  × $D =]0, +\infty[$ est $\mathring{D} =]0, +\infty[$,
  × $D = [0, +\infty[$ est $\mathring{D} =]0, +\infty[$.
- Si $a \in \mathring{D}$, et si $(u_n) \in E$ est une suite de E qui converge vers a alors : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $x_n \in A$.

IV.1.b) Partie ouverte d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

- On dit que D est une **partie ouverte** si tout élément de D est intérieur à D.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) Une boule ouverte est un ouvert de E.

2) a) $\left.\begin{array}{l}\bullet\ D_1 \text{ est un ouvert de } E \\ \bullet\ D_2 \text{ est un ouvert de } E\end{array}\right\} \Rightarrow$ La partie $D_1 \cup D_2$ est un ouvert de E

b) Une réunion finie de parties ouvertes est une partie ouverte.

c) Une réunion infinie de parties ouvertes est une partie ouverte.

3) a) $\left.\begin{array}{l}\bullet\ D_1 \text{ est un ouvert de } E \\ \bullet\ D_2 \text{ est un ouvert de } E\end{array}\right\} \Rightarrow$ La partie $D_1 \cap D_2$ est un ouvert de E

b) Une intersection finie de parties ouvertes est une partie ouverte.

c) Une intersection infinie de parties ouvertes `N'`est `PAS` forcément une partie ouverte.

Remarque

- Les parties E et $\varnothing$ sont des ouverts de E.
- La partie $D \subset E$ est un ouvert de E si et seulement si $D = \mathring{D}$.

IV.2. Adhérence d'une partie

IV.2.a) Définition

> Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
>
> Soit $D \subset E$ une partie de E.
>
> - Un élément $a \in E$ est dit **adhérent** à D si **toute** boule ouverte non vide de centre a rencontre D.
> - On appelle **adhérence** de D et on note $\overline{D}$, l'ensemble des éléments de E qui sont des points adhérents à D.

Remarque

- Ne pas confondre « appartenir à » et « être adhérent à ». Un point adhérent à une partie est un point qui est dans cette partie ou qui est situé « au bord » de celle-ci.
  Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, alors $1 \notin [0, 1[$ mais 1 est bien adhérent à $[0, 1[$.
- Lorsque $E = \mathbb{R}$, l'ensemble des points adhérents à :
  × $D = [0, 1[$ est $\overline{D} = [0, 1]$,
  × $D =]0, 1[$ est $\overline{D} = [0, 1]$,
  × $D =]0, +\infty[$ est $\overline{D} = [0, +\infty[$,
  × $D = [0, +\infty[$ est $\overline{D} = [0, +\infty[$.
- Tout point de D est un point adhérent à D.

> **Caractérisation séquentielle**
>
> Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
>
> Soit $D \subset E$ une partie de E.
>
> Soit $a \in E$.
>
> $$\boxed{a \in \overline{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}},\ x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a}$$
>
> *(tout élément de $\overline{D}$ est limite d'une suite d'éléments de D)*

Démonstration.

($\Rightarrow$) Soit $a \in \overline{D}$. Par définition, on a alors, pour tout $r > 0$:

$$B(a, r) \cap D \neq \varnothing \tag{*}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \frac{1}{n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant $(*)$ en $r = r_n$, on obtient : $B(a, r_n) \cap D \neq \varnothing$.
Notons alors x_n un élément de $B(a, r_n) \cap D$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$0 \leqslant \|x_n - a\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or :
× $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
× $\dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\|x_n - a\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe une suite $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Démontrons $a \in \overline{D}$. Il s'agit de démontrer :

$$\forall r > 0,\ B(a,r) \cap D \neq \varnothing$$

Soit $r > 0$. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - a\| \leqslant \varepsilon$$

On applique alors cette propriété en $\varepsilon = r$.
On obtient alors qu'il existe n_0 tel que : $x_{n_0} \in B(a,r)$.
Comme de plus : $x_{n_0} \in D$, on en conclut : $x_{n_0} \in B(a,r) \cap D$ et ainsi :

$$B(a,r) \cap D \neq \varnothing$$

□

IV.2.b) Partie fermée d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Soit $D \subset E$ une partie de E.

- On dit que D est une **partie fermée** si tout élément adhérent à D est un point de D.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) • Une boule fermée est un fermé de E.
• Une sphère est un fermé de E

2) a) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ D_1 \text{ est un fermé de } E \\ \bullet\ D_2 \text{ est un fermé de } E \end{array}\right\} \Rightarrow$ La partie $D_1 \cap D_2$ est un fermé de E

b) Une intersection finie de parties fermées est une partie fermée.

c) Une intersection infinie de parties fermées est une partie fermée.

3) a) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ D_1 \text{ est un fermé de } E \\ \bullet\ D_2 \text{ est un fermé de } E \end{array}\right\} \Rightarrow$ La partie $D_1 \cup D_2$ est un fermé de E

b) Une réunion finie de parties fermées est une partie fermée.

c) Une réunion infinie de parties fermées `N'est` `PAS` forcément une partie fermée.

Remarque

- Les parties E et $\varnothing$ sont des ouverts de E.
- La partie $D \subset E$ est un ouvert de E si et seulement si $D = \overline{D}$.

Caractérisation séquentielle

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Soit $D \subset E$ une partie de E.

D est une partie fermée de E $\Leftrightarrow$ Toute suite convergente d'éléments de D converge vers un élément de D

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que D est une partie fermée. Alors $D = \overline{D}$.
Soit $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de D. On note a sa limite.
Alors $a \in \overline{D}$ (d'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence).
Ainsi : $a \in \overline{D} = D$.

($\Leftarrow$) Supposons que toute suite convergente d'éléments de D converge vers un élément de D.
De manière évidente : $D \subset \overline{D}$. Il reste donc à démontrer : $\overline{D} \subset D$.
Soit $a \in \overline{D}$. Alors il existe $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
Par hypothèse, $a \in D$. □

IV.3. Partie dense

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

- On dit que D est une **partie dense de** E (ou que D est dense dans E) si $\overline{D} = E$.

Caractérisation séquentielle)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

$$\boxed{D \text{ est dense dans } E \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in E,\ \exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}},\ \|x_n - a\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

(tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de D)

Remarque

- L'ensemble E est dense dans E.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
- L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ `N'est PAS` dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il s'agit d'exhiber une suite d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M.
  Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons : $M_k = M - \dfrac{1}{k}\, I_n$. Alors $M_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} M$.
- Il reste à montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, M_k est inversible. On démontre en réalité que cette propriété est vérifiée à partir d'un certain rang. En effet, la fonction :

  $$x \mapsto \det(M - x\, I_n)$$

  est polynomiale de degré n et admet donc au plus n racines. On obtient alors le résultat souhaité. □

IV.4. Topologie et normes équivalentes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On note N_1 et N_2 deux **normes équivalentes** de E.

1) Tout ouvert de (E, N_1) est un ouvert de (E, N_2).

2) Tout fermé de (E, N_1) est un fermé de (E, N_2).

(des normes équivalents définissent la même topologie : mêmes ouverts, mêmes fermés, mêmes suites convergentes)

V. Continuité des fonctions entre deux espaces vectoriels normés

V.1. Limite d'une fonction et continuité

V.1.a) Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

Soit $f : D \to F$ une fonction définie sur D et à valeurs dans F.

Soit $a \in \overline{D}$ et soit $\ell \in F$.

1. Limite d'une fonction f en un point adhérent

- On dit que f admet la limite ℓ au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ \Big(\|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon\Big)$$

  Si c'est le cas, l'élément ℓ est unique et appelé la **limite** de la fonction f en a.

- On adopte les notations usuelles $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ pour signifier que f admet la limite ℓ en a.

2. Continuité d'une fonction f en un point et sur une partie

- On dit que f est **continue en** $a \in D$ si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
- On dit que f est **continue** (sur D) si f est continue en tout point de la partie D.
  On note alors $\mathscr{C}(D, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur D et à valeurs dans F.

V.1.b) Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Soit $D \subset E$ une partie de D.

Soit $f : D \to F$ une fonction définie sur D et à valeurs dans F.

Soit $a \in \overline{D}$ et soit $\ell \in F$.

1) Tout d'abord :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow\ \Big(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}},\ \big(\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a\ \Rightarrow\ f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ \big)\Big)}$$

Ainsi, si f admet une limite en a et si (x_n) est une suite convergeant vers a alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) \ = \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

2) On en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad f \text{ continue en } a \\ \Leftrightarrow\ \Big(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}},\ \big(\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f\big(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\big)\ \big)\Big) \end{array}}$$

Remarque

- On a vu précédemment que dans les espaces vectoriels normés de dimmensions finies, toutes les normes sont équivalentes. Lorsque E et F sont de dimensions finies, les notions de limite de fonction et de continuité ne dépendent pas des normes choisies sur E et F.
- Si F est de dimension finie, alors la notion de limite d'une fonction f en un point a se ramène à la limite en a des fonctions coordonnées de f dans une base $\mathscr{B}$ de F.

  Plus précisément, si on note,

  × $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}$.

  × pour tout $x \in D$, $(f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{K}^p$ les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathscr{B}$,

  alors on peut démontrer :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow\ \forall k \in [\![1, p]\!],\ f_k(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_k$$

Exemple

- Comme $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, on obtient qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue si et seulement si ses fonctions partie réelle et partie imaginaire le sont.
- Les fonctions

V.1.c) Opérations algébriques sur les limites

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Soit $D \subset E$ une partie de E.

Soient $f, g : D \to F$ deux fonctions définies sur D et à valeurs dans F.

Soit $\varphi : D \to \mathbb{K}$ une fonction définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soient $(\ell, \ell_1, \ell_2) \in E \times E \times E$.

1. **Linéarité**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1 \\ \bullet\ \ g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ \ \lambda\ f(x) + \mu\ f(y) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\ \ell_1 + \mu\ \ell_2}$$

En particulier :

× une CL de fonctions continues en a est continue en a.

× une CL de fonctions continues sur D est continue sur D.

2. **Produit externe**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ \varphi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K} \\ \bullet\ \ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ \ \varphi(x)\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\ \ell}$$

En particulier, le produit de deux fonctions continues en a (resp. D), dont l'une est scalaire, est une fonction continue en a (resp. D).

V.1.d) Composition de limites

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Soit $D \subset E$ une partie de E.
Soient $f_1 : E \to F$ une fonction définie sur une partie $D \subset E$ et à valeurs dans F.
Soient $f_2 : F \to G$ une fonction définie sur une partie $f_1(D) \subset F$ et à valeurs dans G.
Soit $(\ell_1, \ell_2) \in E \times E$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \ f_1(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1 \\ \bullet \ \ f_2(y) \underset{y \to \ell_1}{\longrightarrow} \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (f_2 \circ f_1)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$$

En particulier, toute fonction $f = f_2 \circ f_1$ telle que :
$\times$ f_1 est continue sur une partie $D \subset E$.
$\times$ f_2 est continue sur $f_1(D)$.
est continue sur D.

V.1.e) Continuité des focntions polynomiales

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
On suppose E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Alors toute fonction $f : E \to \mathbb{K}$ qui est polynomiale en les coordonnées dans $\mathscr{B}$ est continue.

V.1.f) Continuité et topologie

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Soient $f : E \to F$ une fonction définie sur E et à valeurs dans F.

La fonction f est continue sur E
$\Leftrightarrow$ L'image réciproque par f d'un ouvert de F est un ouvert de E
$\Leftrightarrow$ L'image réciproque par f d'un fermé de F est un fermé de E

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur E.

1) Les parties de E définies par les conditions $f(x) = 0$, $f(x) \leqslant 0$ ou $f(x) \geqslant 0$, sont fermées.
2) Les parties de E définies par les conditions $f(x) \neq 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$, sont ouvertes.

V.2. Théorème de compacité - théorème des bornes atteintes

- Soit E un espace vectoriel normé **de dimension finie**.
- Soit $D \subset E$ une partie non vide de E.
- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction sur une partie D de E, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• f est continue sur D • D est une partie fermée, bornée de E	$\Rightarrow$	f est bornée et atteint ses bornes sur D

Autrement dit :

$$\exists\,(a,\,b) \in D \times D,\ \forall\, x \in D,\ f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

Remarque

Ce résultat généralise celui connu pour les fonctions scalaires : toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes sur $[a, b]$.

V.3. Applications lipschitziennes

V.3.a) Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Soit f une fonction définie sur une partie D de E et à valeurs dans F.

- On dit que f est **lipschitzienne** (sur D) si :

$$\exists\,\alpha \in \mathbb{R}, \forall\,(x,\,y) \in D \times D, \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \alpha \|x - y\|_E$$

- Une telle constante α est appelée une constante (ou un rapport) de Lipschitz pour f.

Exemple

1. Les fonctions constantes sont les fonctions lipschitziennes de rapport 0.

2. Toute homothétie $\alpha \mathrm{id}_E$ d'un espace vectoriel normé E est lipschitzienne de rapport $|\alpha|$.

3. La norme $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ d'un espace vectoriel normé E est lipschitzienne de rapport 1.

V.3.b) Continuité des applications lipschitziennes

Toutes application lipschitzienne est continue (réciproque fausse).

V.3.c) Caractère lipschitzien des fonctions linéaires

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

On suppose E **de dimension finie**.

1) $\boxed{f \in \mathscr{L}(E, F) \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant \alpha \|x\|_E}$

2) Toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est lipschitzienne, donc continue.

3) Toute application n-linéaire de E^n dans F est continue.

Démonstration.

1) On démontre le résultat dans le cas où la norme $\|\cdot\|_E$ sur E est la norme $\|\cdot\|_\infty$ associée à une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E. Le cas général est admis.

Soit $x \in E$. Il existe alors $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k \cdot e_k$. On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
\|f(x)\|_F & = & \left\| \sum\limits_{k=1}^{p} x_k \cdot f(e_k) \right\|_F & \\
& \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{p} \|x_k \cdot f(e_k)\|_F & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
& \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{p} |x_k| \times \|f(e_k)\|_F & \textit{(par homogénéité)} \\
& \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{p} \|x\|_\infty \times \|f(e_k)\|_F & \\
& \leqslant & \left(\sum\limits_{k=1}^{p} \|f(e_k)\|_F \right) \|x\|_\infty &
\end{array}$$

D'où le résultat avec $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{p} \|f(e_k)\|_F$.

2) Il sagit de démontrer :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, (x,\, y) \in D \times D, \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \alpha \|x - y\|_E$$

Or, dans la question précédente, on a démontré qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, z \in E,\ \|f(z)\|_F \ \leqslant\ \alpha\ \|z\|_E \qquad (*)$$

Soit $(x, y) \in E \times E$. On applique $(*)$ à $z = x - y \in E$. On obtient :

$$\|f(x-y)\|_F \leqslant \alpha\ \|x-y\|_E$$

Or, par linéarité de f : $\|f(x-y)\|_F = \|f(x) - f(y))\|_F$.
On en conclut que f est bien lipschitzienne. $\square$

Remarque

- La fonction déterminant est continue.
- Le produit matriciel définit une fonction continue.
- Si E n'est pas de dimension finie, la continuité d'une application linéaire sur E n'est pas garantie, et peut dépendre du choix de la norme sur E.

Exemple
Étudier la continuité de l'évaluation $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(0)$, lorsque :

a) l'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme N_1 définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(\,P\,) = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\ dt$.

b) l'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme N_1 définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N_2(\,P\,) = \max\limits_{k \in [\![0, \deg(P)]\!]} |a_k|$.
(où l'on a noté $(a_0, \ldots, a_{deg(P)})$ les coefficients de P)

Informations concernant cette semaine de colles

Exercices types

Les compétences attendues sur ce chapitre sont les suivantes :

- savoir démontrer qu'une application $N : E \to \mathbb{R}$ est une norme.
- savoir reconnaître la norme issue d'un produit scalaire.
- connaître les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur les espaces vectoriels usuels.
- connaître les normes sur les autres espaces vectoriels (norme sur l'ensemble des fonctions bornées et définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, sur l'ensemble des suites (de carré) sommables, sur l'ensemble des fonctions (de carré) intégrables sur un intervalle I).
- connaître la définition de distance associée à une norme et les propriétés des applications distance.
- connaître les définitions de boules et sphères.
- connaître les définitions de parties convexes et de parties bornées.
- connaître la définition de convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé.
- savoir démontrer que 2 normes sont équivalentes.
- savoir démontrer que 2 normes ne sont pas équivalentes.
  En particulier, savoir que cela ne peut se produire que si l'on travaille dans un espace vectoriel de dimension infinie.
- savoir déterminer la limite d'une suite d'éléments de E où E est un espace vectoriel de dimension finie (en se ramenant à l'étude des suites formées par les coordonnées des éléments de cette suite).
- connaître les propriétés des suites convergentes.