

Révisions

PSI - MP : Lycée Rabelais

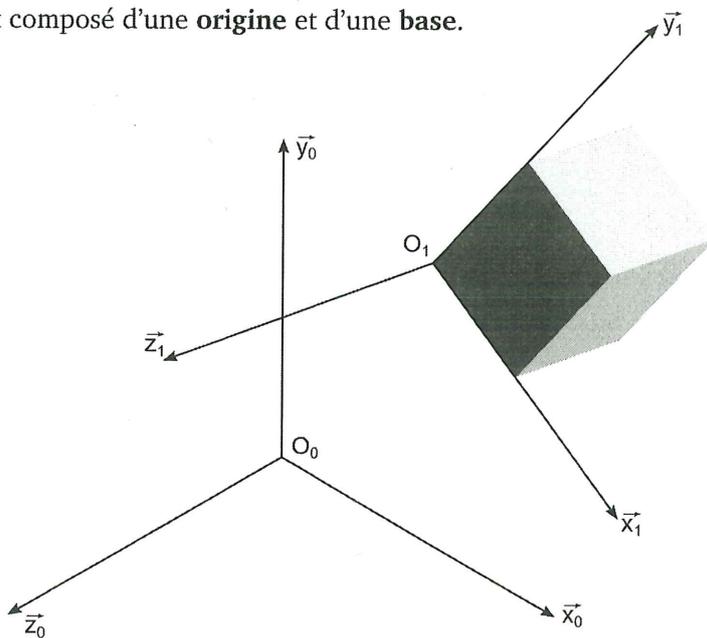
1 Position d'un solide dans l'espace

En sciences de l'ingénieur, une problématique récurrente est celle associée au positionnement d'un solide par rapport à un autre solide. Pour la suite, on notera les solides $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \dots$. À chacun de ces solides sera associé un repère $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \dots$. Étant donné que le repère reste solidaire du solide, on confondra souvent les notions de solide et de repère.

Sur la figure ci-dessous sont représentés :

- Le repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ associé au solide \mathcal{S}_0 ;
- Le repère $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ associé au solide \mathcal{S}_1 ;

On rappelle qu'un **repère** est composé d'une **origine** et d'une **base**.



Deux problématiques sont associées au positionnement d'un solide par rapport à un autre solide :

- Le positionnement de l'origine ;
- La caractérisation de l'orientation.

1.1 Positionnement d'un point dans un repère

Pour positionner un point dans un repère, il faut définir les coordonnées de ce point. On dira que (x, y, z) sont les coordonnées du point O_1 dans le repère $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ si et seulement si :

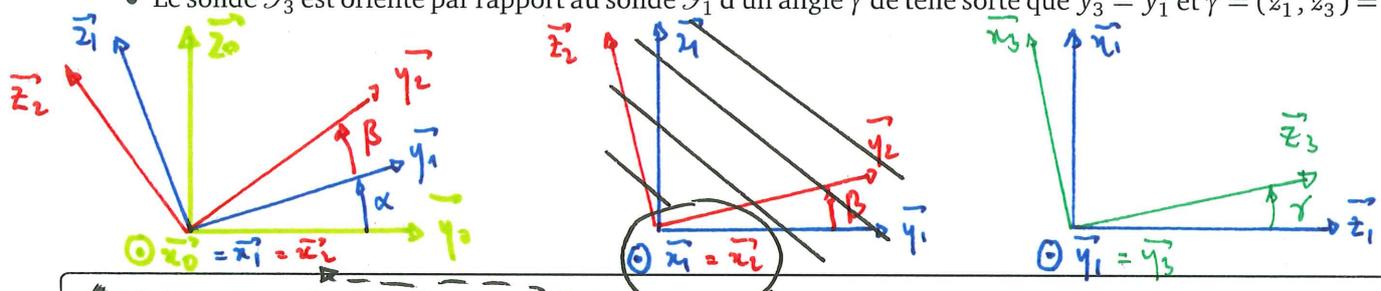
$$\overrightarrow{O_0O_1} = x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$$

1.2 Orientation d'un solide par rapport à un autre solide

Pour caractériser l'orientation d'un solide par rapport à un autre solide, on utilisera la notion d'angle orienté. La maîtrise des calculs élémentaires autour de cette notion est indispensable !

On considère ici quatre bases $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$; $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ associées respectivement à des solides $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ et \mathcal{S}_3 . On donne le paramétrage suivant :

- Le solide \mathcal{S}_1 est orienté par rapport au solide \mathcal{S}_0 d'un angle α de telle sorte que $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$ et $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$.
- Le solide \mathcal{S}_2 est orienté par rapport au solide \mathcal{S}_1 d'un angle β de telle sorte que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$.
- Le solide \mathcal{S}_3 est orienté par rapport au solide \mathcal{S}_1 d'un angle γ de telle sorte que $\vec{y}_3 = \vec{y}_1$ et $\gamma = (\vec{z}_1, \vec{z}_3) = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$.



Réaliser les calculs suivants :

Faire une seule figure !

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{y}_0 = 0$$

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1 = 1$$

$$\vec{y}_0 \cdot \vec{y}_1 = \cos((\vec{y}_0, \vec{y}_1)) = \cos(\alpha)$$

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{y}_1 = \cos(-\frac{\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\vec{z}_3 \cdot \vec{z}_2 = (\cos \gamma \cdot \vec{z}_1 + \sin \gamma \cdot \vec{n}_{12}) \cdot \vec{z}_2 = \cos \gamma \cdot \cos \beta$$

$$\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_0 = (\cos \gamma \cdot \vec{n}_{10} - \sin \gamma \cdot \vec{z}_1) \cdot \vec{y}_0 = -\sin \gamma \cdot \cos(+\alpha + \frac{\pi}{2}) = \sin \gamma \cdot \sin \alpha$$

$$\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_0 = -\vec{x}_0$$

$$\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{y}_0 \wedge \vec{y}_1 = \sin((\vec{y}_0, \vec{y}_1)) \cdot \vec{x}_0 = \sin \alpha \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1 = \sin(-\frac{\pi}{2} + \alpha) \cdot \vec{x}_0 = -\cos \alpha \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{z}_0 \wedge \vec{z}_2 = \sin(\alpha + \beta) \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{z}_3 \wedge \vec{z}_2 = (\cos \gamma \cdot \vec{z}_1 + \sin \gamma \cdot \vec{n}_{12}) \cdot \vec{z}_2 = \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \vec{x}_0 - \sin \gamma \cdot \vec{y}_2$$

$$\vec{x}_3 \wedge \vec{y}_0 = (\cos \gamma \cdot \vec{n}_{10} - \sin \gamma \cdot \vec{z}_1) \cdot \vec{y}_0 = \cos \gamma \cdot \vec{z}_0 + \sin \gamma \cdot \underbrace{\sin(+\frac{\pi}{2} + \alpha)}_{\cos \alpha} \cdot \vec{x}_0$$

$\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = \ominus \vec{x}_1$

$\ominus \leftarrow XYZ \quad XYZ \rightarrow \oplus$

Simplification des $\pi/2$:

$$\sin(-\frac{\pi}{2} + \epsilon) = -\cos \epsilon$$

$$\cos(-\frac{\pi}{2} + \epsilon) = \sin \epsilon$$

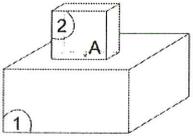
$$\cos(\epsilon + \frac{\pi}{2}) = -\sin \epsilon$$

$$\sin(\epsilon + \frac{\pi}{2}) = \cos \epsilon$$

2 Cinématique

2.1 Notation et cas élémentaires

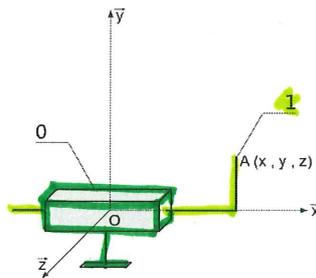
Le torseur cinématique permet de modéliser la vitesse d'un solide par rapport à un autre solide. Le vecteur vitesse de rotation (résultante du torseur) modélise les vitesses de rotation du solide. Le vecteur vitesse (moment du torseur) modélise la vitesse d'un point du solide par rapport au solide de référence.



$$\{v_{2/1}\} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} & \text{(Résultante du torseur cinématique : vecteur vitesse de rotation)} \\ \vec{V}_{A \in 2/1} & \text{(Moment du torseur cinématique en A : vecteur vitesse)} \end{cases}$$

2 correspond "par convention" au solide \mathcal{S}_2 .

2.2 Solides en liaison glissière



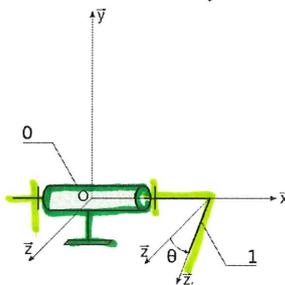
On considère un solide 1 en liaison glissière de direction \vec{x} avec un solide 0. La pièce 1 est repérée par la position du point A de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On notera donc :

Torseur valable $\forall P$

$$\{v_{1/0}\} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0} \\ \vec{J}_{P \in 1/0} = x \cdot \vec{x} = \left[\frac{dOP}{dt} \right]_O \end{cases}$$

Translation de 1 à 0
 (ce qui implique que tous les points ont la même vitesse)
 point lié au solide "mobile"
 Glissière de direction \vec{x}
 point et repère liés au solide de référence

Dérivée du paramètre qui positionne 1 à 0



On considère un solide 1 en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) avec un solide 0. La pièce 1 est repérée par l'angle orienté $\theta = (\vec{y}, \vec{y}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$. On notera donc :

Torseur valable $\forall P \in (O, \vec{x})$

$$\{v_{1/0}\} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \cdot \vec{x} \\ \vec{J}_{P \in 1/0} = \vec{0} \end{cases}$$

Dérivée de l'angle qui positionne 1 à 0.
 Pivot d'axe (O, \vec{x})

2.4 Formules en vrac

- Transport du moment :

$$\vec{V}_{B \in 2/1} = \vec{V}_{A \in 2/1} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} \quad (\text{BABAR}) \quad \text{ou Formule de transport ou formule de Varignon.}$$

- Composition des vitesses :

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\}$$

Cela signifie donc que : $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$ et que $\vec{V}_{B \in 2/0} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{V}_{B \in 1/0}$.

- Vitesses relatives :

$$\{\mathcal{V}_{1/2}\} = -\{\mathcal{V}_{2/1}\}$$

- Définition de la vitesse :

$$\vec{V}_{A \in 2/1} = \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_{R_1} \quad \text{où O est fixe dans } R_1 \text{ et A un point solide du solide 2.}$$

- Dérivée d'un vecteur :

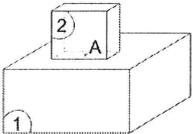
Soit \vec{u} un vecteur quelconque ; \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_1 sont deux repère quelconques.

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{u}$$

3 Actions mécaniques

3.1 Notation

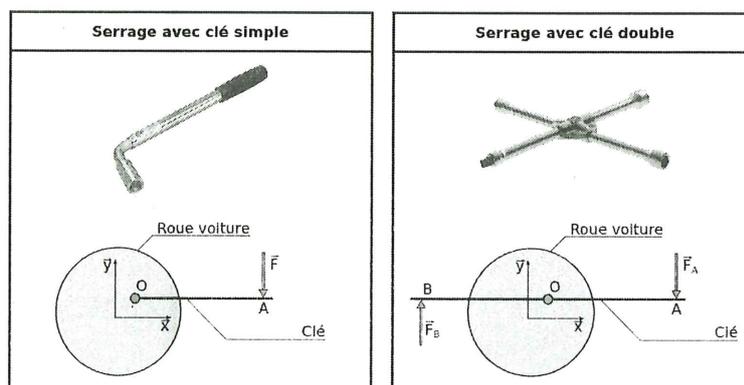
Le torseur des actions mécaniques permet de modéliser l'action d'un solide sur un autre solide. Il ne faut pas confondre le torseur cinématique, qui représente des vitesses et le torseur des actions mécaniques qui représente l'effort appliqué sur un solide.



$$\{1 \rightarrow 2\} = \begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} & (\text{Résultante du torseur des actions mécaniques}) \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} & (\text{Moment du torseur " " " " en A}) \end{cases}$$

3.2 Notion de glisseur et de torseur couple

Pour illustrer ces notions, on s'intéresse au serrage d'une roue de voiture à l'aide d'une clé (figure ci-dessous). On considère deux clés différentes. La première permet d'exercer une force sur la poignée d'un seul côté, la seconde permet de répartir l'action mécanique de part et d'autre du manche. Pour cette seconde, on exerce donc deux forces.



Paramétrage :

- $\vec{OA} = \vec{BO} = L \cdot \vec{x}$
- Pour la clé simple : l'utilisateur, à l'aide de la clé, exerce sur la vis une force $\vec{F} = -F_0 \vec{y}$ au point A.
- Pour la clé double : l'utilisateur, à l'aide de la clé, exerce sur la vis une force $\vec{F}_A = -\frac{F_0}{2} \vec{y}$ au point A et une force $\vec{F}_B = +\frac{F_0}{2} \vec{y}$ sur la vis au point B.

Pour la clé simple puis pour la clé double, déterminons le torseur de l'action de l'ensemble {utilisateur + clé} = uc sur la vis, notée v, au point O (qui correspond à la position de la vis).

CLÉ SIMPLE: $\{uc \rightarrow v\} = \begin{cases} \vec{R}_{uc \rightarrow v} = -F_0 \cdot \vec{y} \\ \vec{\Pi}_{A, uc \rightarrow v} = \vec{0} \end{cases}$

Il s'agit d'un torseur glisseur (FORCE)
car il existe un point P tel que $\vec{\Pi}_{P, uc \rightarrow v} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_{O, uc \rightarrow v} &= \vec{\Pi}_{A, uc \rightarrow v} + \vec{OA} \wedge \vec{R}_{uc \rightarrow v} \\ &= \vec{0} + L \cdot \vec{x} \wedge (-F_0 \cdot \vec{y}) \\ &= -L \cdot F_0 \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

→ Parenthèses obligatoires !

Donc :

$$\{uc \rightarrow v\} = \begin{cases} \vec{R}_{uc \rightarrow v} = -F_0 \cdot \vec{y} \\ \vec{\Pi}_{O, uc \rightarrow v} = -L \cdot F_0 \cdot \vec{z} \end{cases}$$

CLÉ DOUBLE :

$$\begin{aligned} \{uc \rightarrow v\} &= \{uc \xrightarrow{A} v\} + \{uc \xrightarrow{B} v\} \\ &= \begin{cases} \vec{R}_{uc \rightarrow v} = \vec{R}_{uc \xrightarrow{A} v} + \vec{R}_{uc \xrightarrow{B} v} \\ \vec{\Pi}_{O, uc \rightarrow v} = \vec{\Pi}_{O, uc \xrightarrow{A} v} + \vec{\Pi}_{O, uc \xrightarrow{B} v} \end{cases} \end{aligned}$$

Avec : $\vec{R}_{uc \rightarrow v} = -\frac{F_0}{2} \cdot \vec{y} + \frac{F_0}{2} \cdot \vec{y} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_{O,UC} \vec{A} \rightarrow \vec{v} &= \vec{M}_{A,UC} \vec{A} \rightarrow \vec{v} + \vec{OA} \wedge \vec{R}_{UC} \vec{A} \rightarrow \vec{v} \\ &= \vec{0} + L \cdot \vec{u} \wedge \left(-\frac{F_0}{2} \cdot \vec{y} \right) \\ &= -L \cdot \frac{F_0}{2} \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_{O,UC} \vec{B} \rightarrow \vec{v} &= \vec{M}_{B,UC} \vec{B} \rightarrow \vec{v} + \vec{OB} \wedge \vec{R}_{UC} \vec{B} \rightarrow \vec{v} \\ &= \vec{0} - L \cdot \vec{u} \wedge \left(\frac{F_0}{2} \cdot \vec{y} \right) \\ &= -L \cdot \frac{F_0}{2} \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

Donc : $\left\{ UC \rightarrow v \right\} = \begin{cases} \vec{R}_{UC \rightarrow v} = \vec{0} \\ \vec{\Pi}_{O,UC \rightarrow v} = -L \cdot \frac{F_0}{2} \cdot \vec{z} \end{cases}$ Il s'agit d'un torseur couple (car $\vec{R}_{UC \rightarrow v} = \vec{0}$ s'obtient avec un couple de forces).

3.3 Direction d'une action mécanique

On s'intéresse à un cadre de vélo muni d'une suspension dont le schéma cinématique est donné ci-dessous. La suspension est dotée d'un ressort (pièce 7) et d'un amortisseur hydraulique (ensemble S4 et S5).

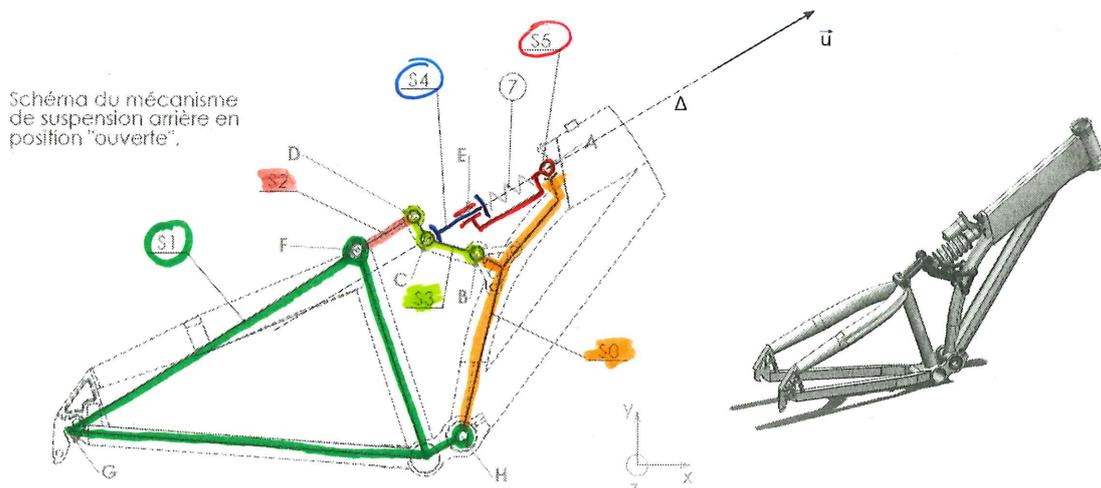
On notera donc :

- l'action liée à l'huile dans l'amortisseur avec le torseur $\{S4 \xrightarrow{\text{huile}} S5\} = \begin{cases} \vec{R}_{S4 \xrightarrow{\text{huile}} S5} = f \cdot \vec{u} \\ \vec{M}_{E, S4 \xrightarrow{\text{huile}} S5} = \vec{0} \end{cases}$ où f est une inconnue.
- l'action liée au ressort fixé entre S4 et S5 avec le torseur $\{S4 \xrightarrow{\text{ressort}} S5\} = \begin{cases} \vec{R}_{S4 \xrightarrow{\text{ressort}} S5} = r \cdot \vec{u} \\ \vec{M}_{E, S4 \xrightarrow{\text{ressort}} S5} = \vec{0} \end{cases}$ où r est également une inconnue.

Le solide S4 est en liaison avec le solide S3 par une liaison rotule de centre C. De même, le solide S5 est en liaison avec le solide S0 par une liaison rotule de centre A.

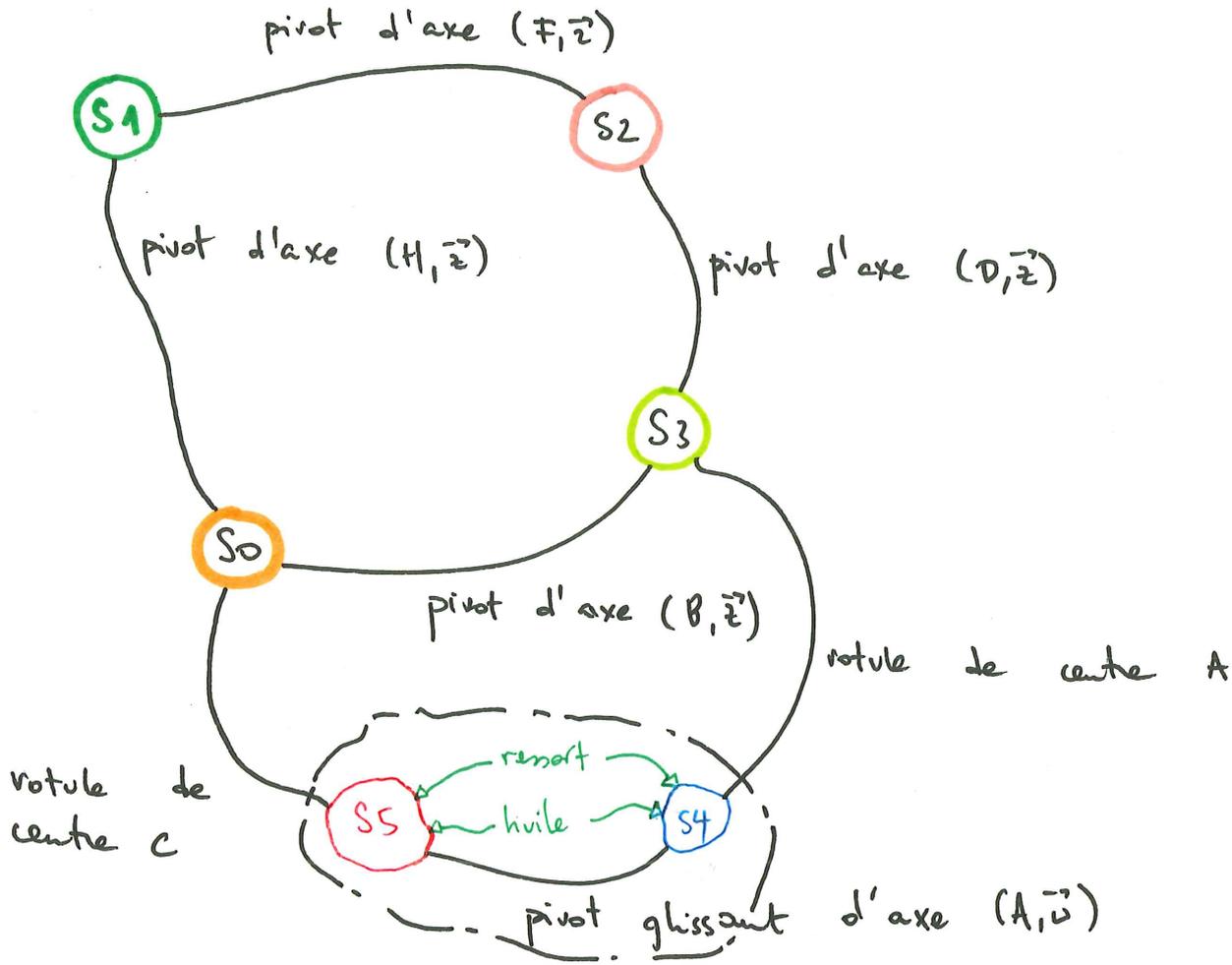
La liaison entre S4 et S5 est une liaison pivot glissant. Toutes les autres liaisons sont des liaisons pivots.

On néglige l'effet de la pesanteur sur toutes les pièces excepté sur le solide S0 (pièce sur laquelle le pilote se tient).



Q1 : Faire un graphe d'analyse (rajouter les pièces manquantes et/ou les actions mécaniques lors de l'utilisation du vélo).

Q2 : Montrer que la résultante de l'action de S5 sur S0 est dirigée par le vecteur \vec{u} .



J'isole $\{S4, S5\}$ soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- $S0 \rightarrow S5$
- $S3 \rightarrow S4$

$$\text{D'où } \{S0 \rightarrow S5\} = \begin{cases} \vec{R}_{S0 \rightarrow S5} = X_{05} \cdot \vec{x} + Y_{05} \cdot \vec{y} + Z_{05} \cdot \vec{z} \\ \vec{\Pi}_{C, S0 \rightarrow S5} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{ROTULE})$$

$$\text{et } \{S3 \rightarrow S4\} = \begin{cases} \vec{R}_{S3 \rightarrow S4} = X_{34} \cdot \vec{x} + Y_{34} \cdot \vec{y} + Z_{34} \cdot \vec{z} \\ \vec{\Pi}_{A, S3 \rightarrow S4} = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{ROTULE})$$

L'ensemble $\{S4, S5\}$ n'est soumis qu'à deux glisseurs donc les résultantes de ces glisseurs seront dirigées par \vec{AC} donc par \vec{u} . On peut donc écrire : $\vec{R}_{S0 \rightarrow S5} = U_{05} \cdot \vec{u}$, ou encore :

$$\vec{R}_{S_1 \rightarrow S_2} = -\vec{R}_{S_2 \rightarrow S_1} = \underbrace{D_{S_2}}_{-\vec{v}_{0S_2}} \cdot \vec{v}$$

À retenir

Si un solide n'est soumis qu'à deux glisseurs, alors les résultantes de ces deux glisseurs seront de même direction. Cette direction est celle de la droite définie par les points d'application des deux glisseurs.

Moins important à retenir, les résultantes seront de même norme et de sens opposé.

3.4 Formules en vrac

• Transport du moment :

$$\vec{M}_{B,1 \rightarrow 2} = \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{BABAR})$$

• Théorème des actions réciproques :

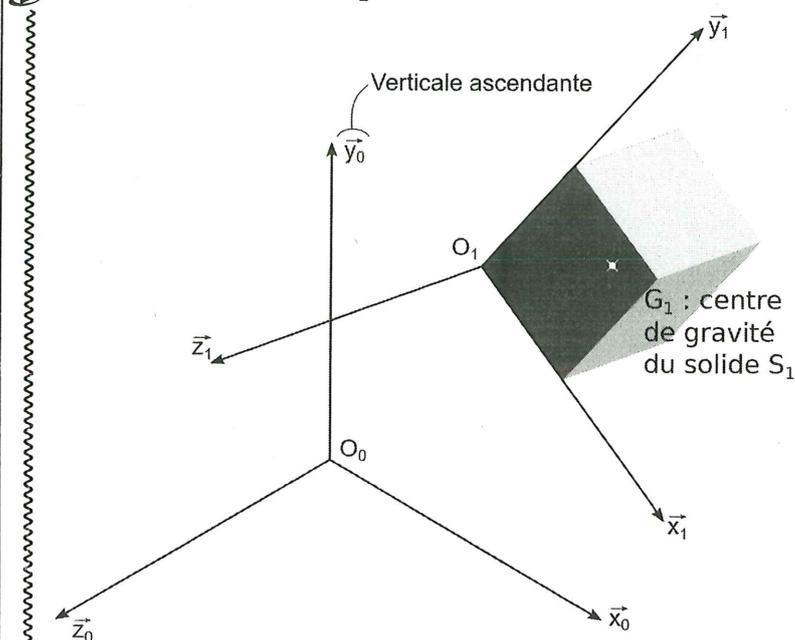
$$\{1 \rightarrow 2\} = -\{2 \rightarrow 1\}$$

• Étapes de résolution d'un problème de statique :

- 0 - Colorier le mécanisme ! Puis réaliser le graphe des liaisons si nécessaire (pas toujours pertinent).
- 1 - Isoler un ou plusieurs solides.
- 2 - Faire le bilan des actions mécaniques extérieures.
- 3 - Choix du théorème adapté.
- 4 - Faire les calculs (si on est sûr que ça va aboutir).

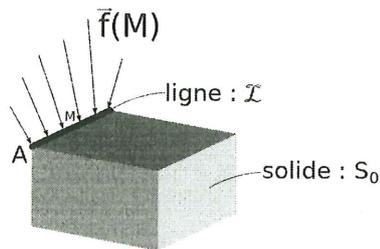
4 Modélisation

Différentes notations pour les torseurs et modélisation du poids :



Modélisation locales et globales :

Force linéique :



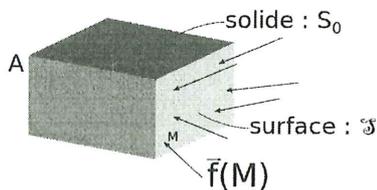
Si $\vec{f}(M)$ est une force linéique (en Newton/mètre) exercée par l'extérieur sur un élément de ligne dl (de longueur dl) en un point M appartenant à la ligne \mathcal{L} , alors l'action locale s'écrira :

$$\{\text{ext} \rightarrow dl\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow dl} = \vec{f}(M) \cdot dl \\ \vec{M}_{M, \text{ext} \rightarrow dl} = \vec{0} \end{cases}$$

Pour passer à l'action globale de l'action de l'extérieur sur le solide S_0 , il suffit d'intégrer pour tous les points M de la ligne. On aura donc :

$$\{\text{ext} \rightarrow S_0\} = \int_{M \in \mathcal{L}} \{\text{ext} \rightarrow dl\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{L}} \vec{f}(M) \cdot dl \\ \vec{M}_{A, \text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{L}} \vec{AM} \wedge \vec{f}(M) \cdot dl \end{cases}$$

Force surfacique :



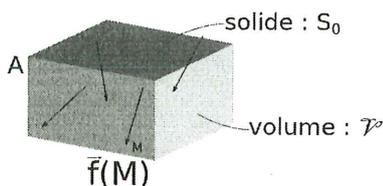
Si $\vec{f}(M)$ est une force surfacique (en Newton/mètre² = Pascal) exercée par l'extérieur sur un élément de surface ds en un point M appartenant à la surface \mathcal{S} , alors l'action locale s'écrira :

$$\{\text{ext} \rightarrow ds\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow ds} = \vec{f}(M) \cdot ds \\ \vec{M}_{M, \text{ext} \rightarrow ds} = \vec{0} \end{cases}$$

Pour passer à l'action globale de l'action de l'extérieur sur le solide S_0 , il suffit d'intégrer pour tous les points M de la surface. On aura donc :

$$\{\text{ext} \rightarrow S_0\} = \int_{M \in \mathcal{S}} \{\text{ext} \rightarrow ds\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{S}} \vec{f}(M) \cdot ds \\ \vec{M}_{A, \text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{S}} \vec{AM} \wedge \vec{f}(M) \cdot ds \end{cases}$$

Force volumique :



Si $\vec{f}(M)$ est une force volumique (en Newton/mètre³) exercée par l'extérieur sur un élément de surface dV en un point M appartenant au volume \mathcal{V} , alors l'action locale s'écrira :

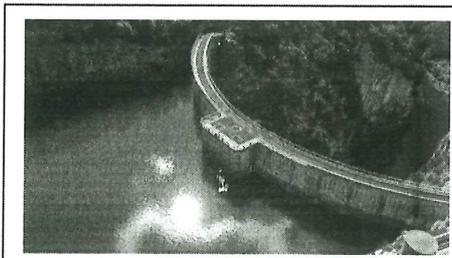
$$\{\text{ext} \rightarrow dV\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow dV} = \vec{f}(M) \cdot dV \\ \vec{M}_{M, \text{ext} \rightarrow dV} = \vec{0} \end{cases}$$

Pour passer à l'action globale de l'action de l'extérieur sur le solide S_0 , il suffit d'intégrer pour tous les points M du volume. On aura donc :

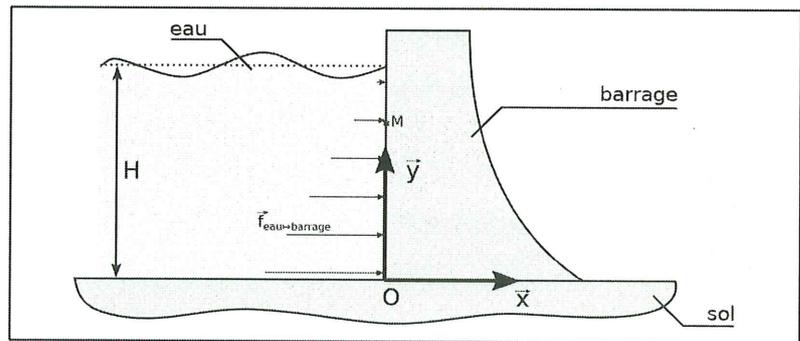
$$\{\text{ext} \rightarrow S_0\} = \int_{M \in \mathcal{V}} \{\text{ext} \rightarrow dV\} = \begin{cases} \vec{R}_{\text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{V}} \vec{f}(M) \cdot dV \\ \vec{M}_{A, \text{ext} \rightarrow S_0} = \int_{M \in \mathcal{V}} \vec{AM} \wedge \vec{f}(M) \cdot dV \end{cases}$$

Application :

On cherche à modéliser l'action de l'eau sur le barrage comme présenté sur la figure ci-dessous :



Barrage hydraulique des gorges du Verdon



On considère le problème invariant dans la direction \vec{z} . La hauteur d'eau est donnée par la longueur H et la largeur du barrage est donnée par la longueur L . On a environ : $H = 27$ m et $L = 800$ m.

On rappelle également que l'eau exerce une densité surfacique d'effort (pression) proportionnelle à la profondeur de telle sorte que $\vec{p}_{eau \rightarrow barrage} = \rho \cdot g \cdot (H - y) \cdot \vec{x}$ avec ρ , la masse volumique de l'eau ; g , la constante de pesanteur et $(H - y)$ la profondeur en un point M quelconque.

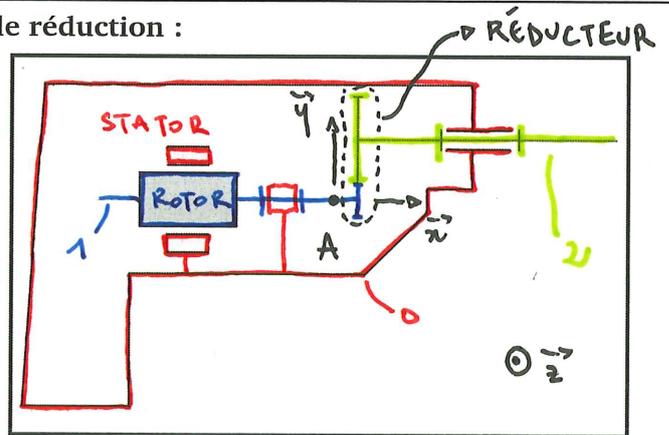
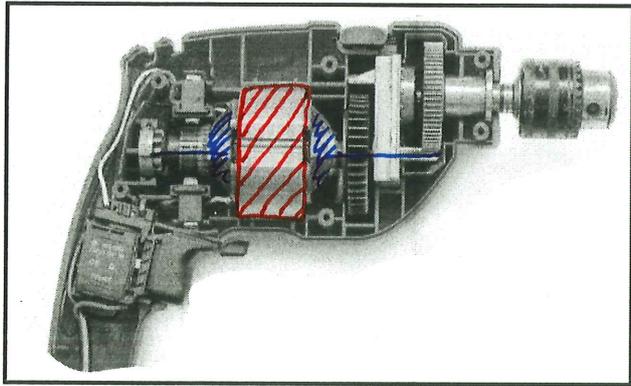
Déterminons la résultante globale de l'action de l'eau sur le barrage :

$$\begin{aligned}
 \vec{R}_{eau \rightarrow barrage} &= \int_{\eta \in S} \vec{p}_{eau \rightarrow barrage} \cdot dS \\
 &= \int_{y=0}^H \int_{z=0}^L \rho \cdot g \cdot (H - y) \cdot \vec{x} \cdot dy \cdot dz \\
 &= L \cdot \rho \cdot g \cdot \vec{x} \cdot \int_{y=0}^H (H - y) \cdot dy \\
 &= L \cdot \rho \cdot g \cdot \vec{x} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot (H - y)^2 \right]_0^H \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot L \cdot H^2 \cdot \vec{x}
 \end{aligned}$$

$\pi(0, y, z)$
 et $y \in [0, H]$
 $z \in [0, L]$

$\hat{= N}$: $\|\vec{R}_{eau \rightarrow barrage}\| \approx 2,86 \cdot 10^9 \text{ N}$

Modélisation d'un moteur et notion de rapport de réduction :



ACTION MOTRICE :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \xrightarrow{\text{mot}} 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{0 \rightarrow 1}^{\text{mot}} = \vec{0} \\ \vec{\Pi}_{A,0 \rightarrow 1}^{\text{mot}} = C_m \cdot \vec{\omega} \end{array} \right.$$

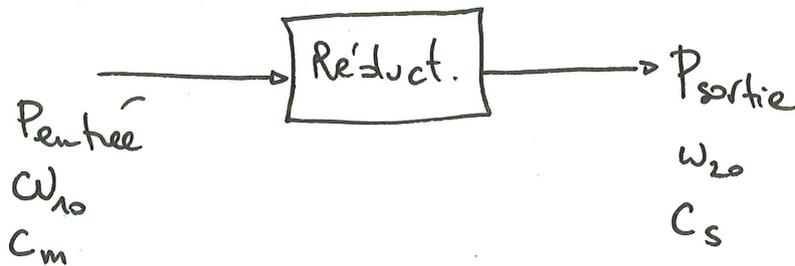
↑ STATOR ↑ ROTOR

COUPLE MOTEUR

LIASON :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \xrightarrow{\text{pi}} 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{0 \rightarrow 1}^{\text{pi}} = X_{01} \cdot \vec{x} + Y_{01} \cdot \vec{y} + Z_{01} \cdot \vec{z} \\ \vec{\Pi}_{A,0 \rightarrow 1}^{\text{pi}} = N_{01} \cdot \vec{y} + N_{01} \cdot \vec{z} \end{array} \right.$$

RÉDUCTEUR :



On définit le rapport de réduction (des vitesses) :

$$\| \nu = \frac{\omega_{\text{sortie}}}{\omega_{\text{entrée}}} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \quad \text{où } \nu < 1$$

Réduire le couple sert à multiplier le couple de telle sorte que :

$$\frac{C_{\text{sortie}}}{C_{\text{entrée}}} = \frac{C_s}{C_m} = \frac{1}{\nu}$$

4.1 Modélisation d'un problème plan

On admettra qu'un problème est "plan" lorsque les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- la géométrie des liaisons présente un **plan de symétrie**,
- la **cinématique est plane** (tous les mouvements sont décrits dans le plan considéré),
- les actions mécaniques sont symétriques par rapport à ce plan, ce qui signifie :
 - les **résultantes sont des vecteurs compris dans le plan**,
 - les **moments sont perpendiculaires au plan** considéré.

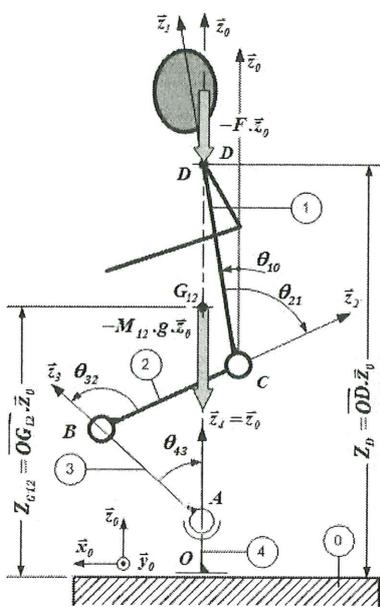
Lorsque ces hypothèses sont vérifiées (ce sera souvent spécifié dans le sujet), on n'utilisera pas toutes les composantes des torseurs. Les composantes inutilisées sont celles qui correspondent à des actions mécaniques susceptibles de faire sortir les solides du plan.

Dans le cas d'un problème plan, l'application du PFS ne fournira que 3 équations scalaires :

- 2 équations issues du théorème de la résultante statique projeté sur les 2 axes de la base appartenant au plan ;
- 1 équation issue du théorème du moment statique projeté sur l'axe perpendiculaire au plan.

Premier exemple issu d'un sujet.

Extrait : Dans cette partie, on suppose l'étude modélisable dans le plan de projection sagittal $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$.



On note i et j , deux solides quelconques et K un point quelconque.

Les torseurs seront donc de la forme :

$$\{ \mathcal{U}_{j/i} \}_K = \begin{cases} \vec{R}_{j/i} = \cancel{X_{ij}} \vec{x}_0 + Y_{ij} \vec{y}_0 + \cancel{Z_{ij}} \vec{z}_0 \\ \vec{T}_{K, j/i} = \cancel{L_{ij}} \vec{x}_0 + \cancel{M_{ij}} \vec{y}_0 + \cancel{N_{ij}} \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\{ \mathcal{R}_{i \rightarrow j} \}_K = \begin{cases} \vec{R}_{i \rightarrow j} = X_{ij} \vec{x}_0 + \cancel{Y_{ij}} \vec{y}_0 + \cancel{Z_{ij}} \vec{z}_0 \\ \vec{T}_{K, i \rightarrow j} = \cancel{L_{ij}} \vec{x}_0 + \cancel{M_{ij}} \vec{y}_0 + \cancel{N_{ij}} \vec{z}_0 \end{cases}$$

Exemple(s) :

$$\{ \mathcal{R}_{2 \rightarrow 1} \}_C = \begin{cases} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = X_{21} \vec{x}_0 + \cancel{Y_{21}} \vec{y}_0 + \cancel{Z_{21}} \vec{z}_0 \\ \vec{T}_{C, 2 \rightarrow 1} = \cancel{L_{21}} \vec{x}_0 + \cancel{N_{21}} \vec{z}_0 = \vec{0} \end{cases}$$

Dans l'hypothèse d'un pb. plan, ce torseur est un glisseur.

Deuxième exemple issu du même sujet.

Extrait : Dans cette nouvelle partie, on suppose l'étude sera réalisée dans le plan de face $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On note i et j , deux solides quelconques et K un point quelconque.

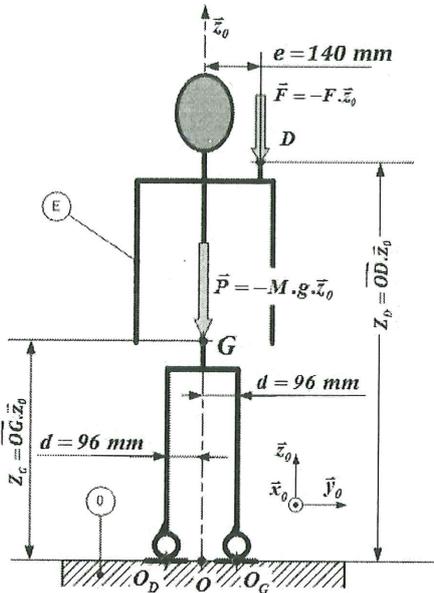
Les torseurs seront donc de la forme :

$$\{U_{i,j}\} = \begin{cases} \vec{R}_{i,j} = w_{ix} \cdot \vec{n}_0 + w_{iy} \cdot \vec{y}_0 + w_{iz} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{K,i,j} = v_{Kx} \cdot \vec{n}_0 + v_{Ky} \cdot \vec{y}_0 + v_{Kz} \cdot \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\{i \rightarrow j\} = \begin{cases} \vec{R}_{i \rightarrow j} = X_{ij} \cdot \vec{n}_0 + Y_{ij} \cdot \vec{y}_0 + Z_{ij} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{K,i \rightarrow j} = L_{ij} \cdot \vec{n}_0 + M_{ij} \cdot \vec{y}_0 + N_{ij} \cdot \vec{z}_0 \end{cases}$$

Exemple(s) :

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \xrightarrow{00} E \\ 0 \xrightarrow{00} E \end{matrix} \right\} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \xrightarrow{00} E} = Z_D \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{0 \xrightarrow{00} E} = \vec{0} \end{cases}$$



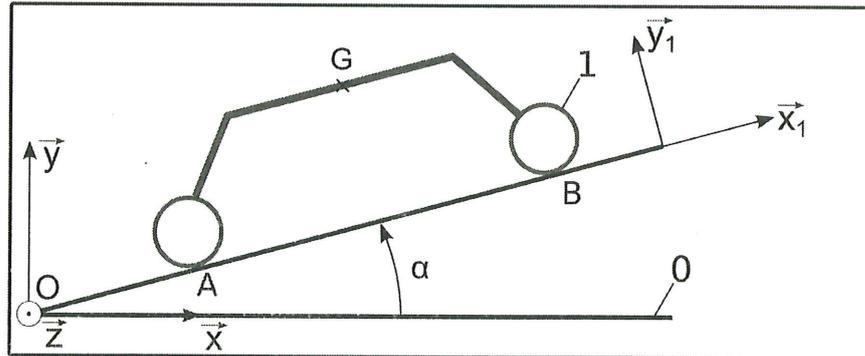
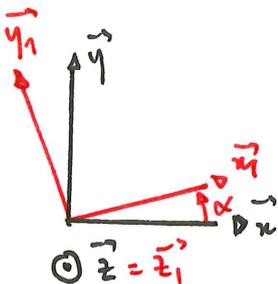
L' hypothèse d'un pb. plan ne modifie pas le torseur.

Modélisation des frottements (lois de Coulomb) :



Angle annoncé du tremplin : 37.5°

Modélisation



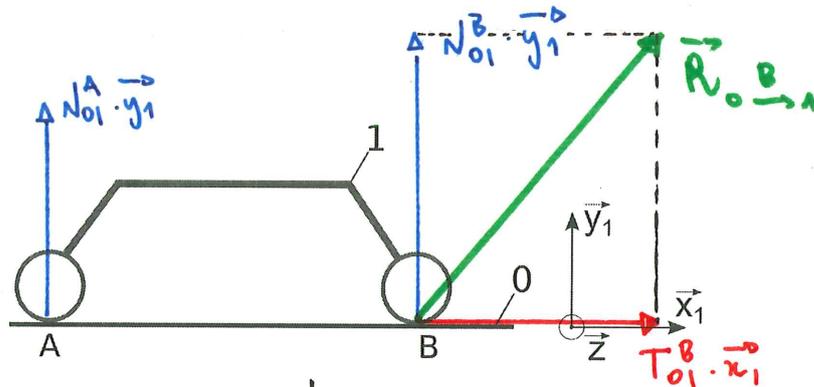
On considère ici que la voiture est à l'arrêt sur la piste et que l'hypothèse d'un problème plan peut être retenue. On modélise la voiture par un solide ayant deux contacts ponctuels avec le sol en A et en B.

Les roues avant sont des roues équipées de pneus cloutés alors que les roues arrières sont équipées de pneus classiques. Cela revient à supposer que le contact sol/roues présente des frottements pour les roues avant alors que les frottements sont négligés pour les roues arrières. Les lois de Coulomb seront utilisées pour modéliser le frottement. On notera f le coefficient de frottement.

Quel doit être le coefficient de frottement pour que la voiture puisse rester immobile sans glisser ?

La voiture a une masse $M = 1900$ kg. Son centre de gravité est G et la géométrie de la voiture impose $\vec{AB} = L \cdot \vec{x}_1$ et $\vec{AG} = \frac{L}{2} \cdot \vec{x}_1 + h \cdot \vec{y}_1$.

Lois de Coulomb ?



Liaison ponctuelle en A et de normale \vec{y}_1 : Composante normale

$$\{0 \rightarrow 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} = N_{O1}^A \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{M}_{A,0 \rightarrow 1} = \vec{0} \end{cases}$$

NORMALE AU PLAN =

Liaison ponctuelle en B et de normale \vec{y}_1 AVEC FROTTEMENTS!

$$\{0 \rightarrow 1\} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} = N_{O1}^B \cdot \vec{y}_1 + T_{O1}^B \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{M}_{B,0 \rightarrow 1} = \vec{0} \end{cases}$$

Composante tangentielle

ET :

Coefficient de Coulomb

- Si et seulement si $|T_{O1}^B| < f \cdot |N_{O1}^B|$, il y a adhérence.
- À la limite du glissement : $|T_{O1}^B| = f \cdot |N_{O1}^B|$.
- S'il y a du glissement : $|T_{O1}^B| = f^* \cdot |N_{O1}^B|$, où f^* est le coefficient de frottement dynamique (dans les faits $f^* \leq f$).

La voiture est à l'arrêt sur la piste s'il y a adhérence et donc si $|T_{01}^B| < f \cdot |N_{01}^B|$.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{à déterminer}}$

J'isole la voiture soumise aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- $D \xrightarrow{A} 1$ X
- $0 \xrightarrow{B} 1$ ✓
- pds $\rightarrow 1$ -

Je écris le th. des moments en A et en projection sur \vec{z} :

$$\underbrace{\vec{M}_{A,10} \xrightarrow{A} 1 \cdot \vec{z}}_0 + \vec{M}_{A,10} \xrightarrow{B} 1 \cdot \vec{z} + \vec{M}_{A,10} \text{ pds} \rightarrow 1 \cdot \vec{z} = 0$$

$$\text{ou } \vec{M}_{A,10} \xrightarrow{B} 1 \cdot \vec{z} = \vec{M}_{B,10} \xrightarrow{0} 1 \cdot \vec{z} + \underbrace{(\vec{AB} \wedge (N_{01}^B \cdot \vec{y}_1 + T_{01}^B \cdot \vec{x}_1))}_{L \cdot \vec{z}} \cdot \vec{z}$$

$$= 0 + L \cdot N_{01}^B$$

$$\vec{M}_{A,10} \text{ pds} \rightarrow 1 \cdot \vec{z} = \vec{M}_{G,10} \text{ pds} \rightarrow 1 \cdot \vec{z} + \underbrace{(\vec{AG} \wedge (-M \cdot g \cdot \vec{y}))}_{\frac{L}{2} \cdot \vec{x}_1 + h \cdot \vec{y}_1} \cdot \vec{z}$$

$$= \left(-\frac{L}{2} \cdot \cos \alpha + h \cdot \sin \alpha \right) \cdot M \cdot g$$

$$(\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1) \cdot \vec{z} = \sin(-\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha$$

donc $N_{01}^B = \left(\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{h}{L} \cdot \sin \alpha \right) \cdot M \cdot g$



Je écris le th. des résultantes projetées sur \vec{x}_1 :

$$\underbrace{\vec{R}_0 \xrightarrow{A} 1 \cdot \vec{x}_1}_0 + \underbrace{\vec{R}_0 \xrightarrow{B} 1 \cdot \vec{x}_1}_{T_{01}^B} + \underbrace{\vec{R}_{\text{pds}} \rightarrow 1 \cdot \vec{x}_1}_{-M \cdot g \cdot \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_1 = -M \cdot g \cdot \sin \alpha} = 0$$

donc $T_{01}^B = M \cdot g \cdot \sin \alpha$

On a nécessairement $N_{01}^B > 0$ (sinon il y a basculement voir dernier paragraphe!).

Et si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $T_{01}^B > 0$.

Il y a adhérence si $|M \cdot g \cdot \sin \alpha| < f \cdot \left| \left(\frac{1}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{h}{L} \cdot \sin \alpha \right) \cdot M \cdot g \right|$

Donc si $f > \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{h}{L} \sin \alpha}$

$$f > 2,15$$

NOTA :

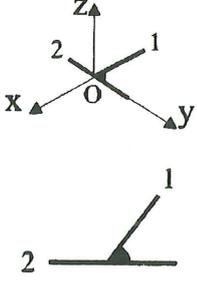
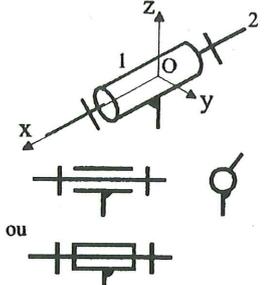
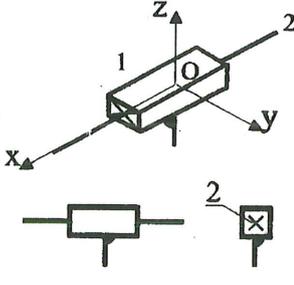
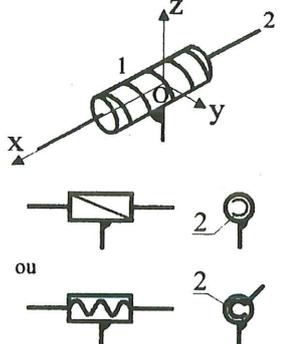
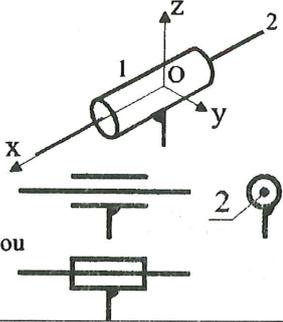
Pneumatique sur sol sec : $f \approx 0,7$

" " " mouillé : $f \approx 0,35$

Caoutchouc sur métal : $f \approx 0,5$

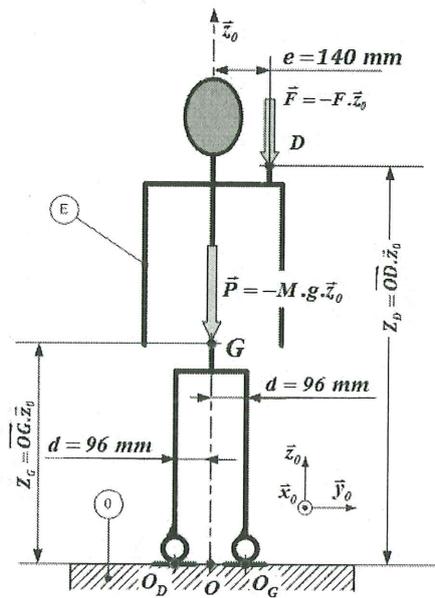
Acier sur garniture de frein : $f \approx 0,4$

Acier sur glace : $f \approx 0,02$

Degré de liberté	Désignation	Schématisation Perspective Projection orthogonale	Torseur cinématique en P dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Torseur d'actions mécaniques exprimé en P dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Particularités
0	Encastrement ou Fixe				
1	Pivot				
1	Glissière				
1	Hélicoïdale				
2	Pivot glissant				

2	Sphérique à doigt				
3	Rotule ou Sphérique				
3	Appui plan				
4	Sphère cylindre ou Linéaire annulaire				
4	Linéaire rectiligne				
5	Ponctuelle ou Sphère plan				

4.3 Condition de non-basculement



Extrait : Pour vérifier le respect du critère de non-basculement, il faut que les contacts ponctuels en O_D et en O_G respectent toujours la **contrainte d'unilatéralité**.

On a des liaisons ponctuelles donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{O \rightarrow E} \\ \mathcal{M}_{O, O \rightarrow E} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{O \rightarrow E} = Z_d \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{O, O \rightarrow E} = \vec{0} \end{array} \right.$$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{O_G \rightarrow E} \\ \mathcal{M}_{O_G, O_G \rightarrow E} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{O_G \rightarrow E} = Z_g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{O_G, O_G \rightarrow E} = \vec{0} \end{array} \right.$$

• Il y a contact du robot sur le sol en O_D si :

$$\vec{R}_{E \rightarrow O} \cdot \vec{z}_0 < 0 \quad \text{donc} \quad \vec{R}_{O \rightarrow E} \cdot \vec{z}_0 > 0$$

(car $\vec{R}_{O \rightarrow E} = -\vec{R}_{E \rightarrow O}$)

“Le robot appuie sur le sol.” et donc $Z_d > 0$

• Même raisonnement en O_G .