

Centre d'intérêt 1

Dynamique et énergétique

Théorème de l'énergie cinétique

PSI - MP : Lycée Rabelais



Pré-requis

Torseurs cinétiques et dynamiques

Cours sur le théorème de l'énergie cinétique



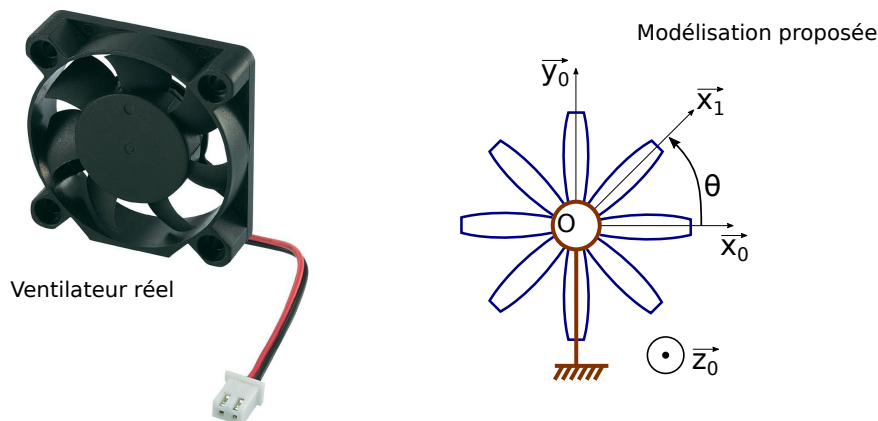
Objectifs

Savoir déterminer une inertie ou une masse équivalente

Savoir déterminer une équation de mouvement avec le théorème de l'énergie cinétique

1 Hélice de ventilateur ★

On s'intéresse ici à un ventilateur utilisé pour le refroidissement des ordinateurs. Sur certains ordinateurs haut de gamme, la température à l'intérieur du PC est asservie, ce qui nécessite de réguler la vitesse de rotation du ventilateur. Plus la température est élevée, plus le ventilateur devra tourner rapidement afin d'évacuer de la chaleur de l'enceinte. Afin de mettre en place cet asservissement, il est nécessaire de connaître l'équation de mouvement de l'hélice du ventilateur.



On réalisera les hypothèses suivantes :

- L'hélice du ventilateur, notée 1 et associée au repère $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le support, noté 0. On notera $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ avec $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$. Cette liaison est une liaison avec frottement. On considèrera un frottement fluide dont le coefficient de frottement est f . On considèrera également un frottement sec constant, noté C_r .
- L'hélice a une masse m et son centre d'inertie, noté G , est situé sur l'axe de rotation. Sa matrice d'inertie est la

suiivante :

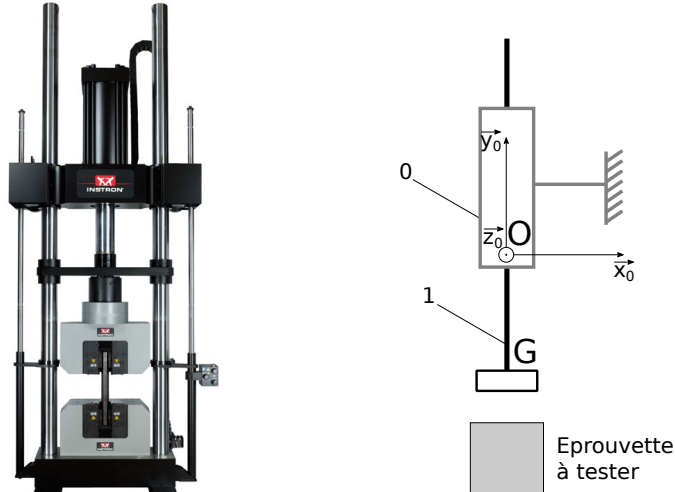
$$I(G, 1) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

- Un moteur met en rotation l'hélice en imposant un couple moteur C_m .
- L'air exerce sur l'hélice un couple résistant tel que $\vec{M}_{O,air \rightarrow 1} = -f_{air} \vec{\Omega}_{1/0}$ avec f_{air} un coefficient de frottement visqueux en N.m/(rad/s).

Question : Déterminer l'équation de mouvement, c'est-à-dire une relation entre θ (et ses éventuelles dérivées) et le couple moteur C_m .

2 Machine de traction ★

On s'intéresse ici à une machine de traction. Ce type de machine permet de rompre différentes éprouvettes de tailles, de formes et de matériaux différents. On se place ici en phase d'approche de la machine. Cela signifie que la partie mobile n'est pas encore en contact avec l'éprouvette.



On réalisera les hypothèses suivantes :

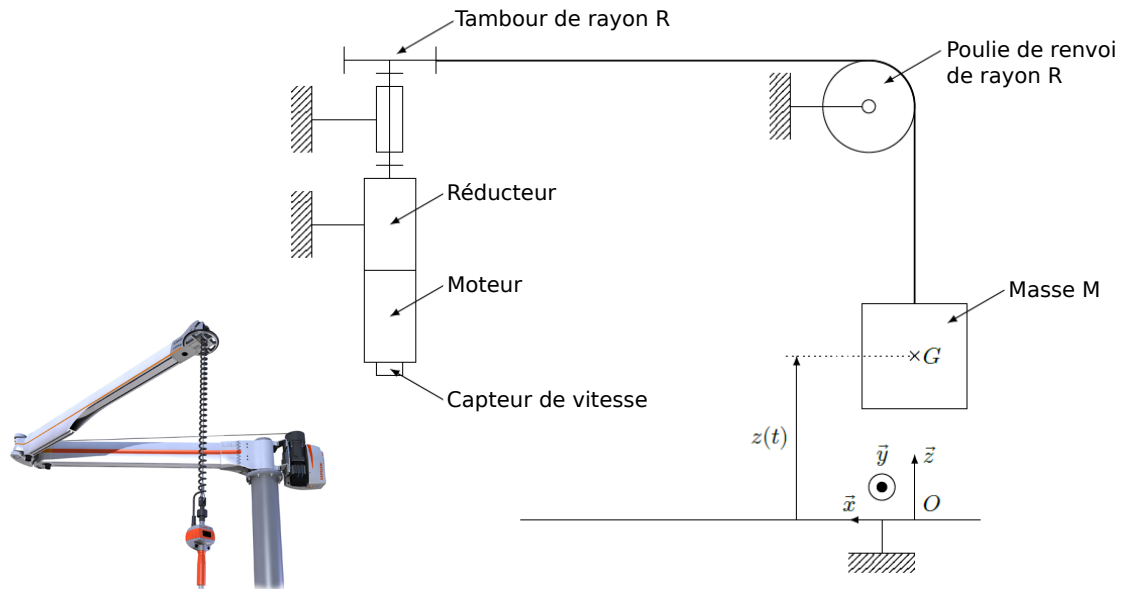
- La partie mobile de la machine, notée 1 et associée au repère $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, est en liaison glissière de direction \vec{y}_0 avec le support, noté 0 et associée au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Cette liaison est une liaison avec frottement. On considèrera un frottement fluide dont le coefficient de frottement est k . On considèrera également un frottement sec constant, noté F_r . Compte-tenu de la liaison, on aura : $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- La partie mobile a une masse m et son centre d'inertie est noté G . On notera $\vec{OG} = y\vec{y}_0$. Sa matrice d'inertie est la suivante :

$$I(G, 1) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

- Un vérin hydraulique met en translation la partie mobile en imposant un effort moteur F_m appliqué au point G .

Question : Déterminer l'équation de mouvement, c'est-à-dire une relation entre y (et ses éventuelles dérivées) et l'effort moteur F_m .

3 Bras manipulateur collaboratif ZE Solution ★



Dans le contexte industriel actuel, il existe encore un grand nombre de tâches pénibles qui ne peuvent pas être automatisées et où le geste humain reste indispensable. L'introduction d'une assistance robotique peut alors être envisagée pour réduire les efforts que l'opérateur doit fournir et ainsi éviter l'occurrence de troubles musculo-squelettiques. Le bras collaboratif de l'entreprise sapelem, nommé ZE Solution, permet de manipuler intuitivement différents types de charges allant jusqu'à 200 kg « sans effort ». Afin de respecter la confidentialité de ce système, les données et résultats présentés dans ce sujet sont approchés et limitatifs par rapport à la solution industrielle réelle.

Paramétrage cinématique :

Grandeur	Notation	Valeur
Vitesse angulaire du moteur	$\omega_m(t)$	
Vitesse angulaire du tambour	$\omega_T(t)$	
Rayon du tambour et de la poulie de renvoi	R	$R = 0,05 \text{ m}$
Rapport de réduction du réducteur	$\frac{1}{\rho} = \frac{\omega_T(t)}{\omega_m(t)}$	$\rho = 15,88$
Vitesse linéaire de la masse en translation	$v(t)\vec{z} = \dot{z}(t)\vec{z}$	

Paramétrage des actions mécaniques :

Grandeur	Notation	Valeur
Couple imposé par le stator du moteur brushless sur le rotor	$C_m(t)\vec{z}$	
Rendement du réducteur	η	0.9
Accélération de la pesanteur	$-g\vec{z}$	$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Paramétrage des masses et inerties :

Grandeur	Notation	Valeur
Masse entraînée	M de centre de gravité G	$M \leq 200$ kg
Inertie de l'axe moteur autour de son axe de rotation	J_0	$J_0 = 0,0011$ kg.m ²
Inertie du réducteur rapportée sur l'axe de rotation du moteur brushless	J_1	$J_1 = 0,00215$ kg.m ²
Câble de levage		Masse et inertie négligées Câble inextensible
Inertie de la poulie de renvoi	J_p	$J_p = 0,02$ kg.m ²
Inertie du tambour	J_T	$J_T = 0,02$ kg.m ²

L'actionneur (moto-réducteur) choisi par le constructeur est l'association d'un moteur brushless et d'un réducteur, de référence "Moteur brushless 400V/0016". Le couple $C_m(t)$ fourni par le moteur brushless au réducteur vérifie la relation $C_m(t) = K_m i(t)$. Les caractéristiques du moto-réducteur sont les suivantes :



Caractéristiques	Valeur
Vitesse maximale du moteur en charge	6200 tr/min
Couple moteur nominal	3,15 N.m
Couple moteur maximal	10,8 N.m
Courant nominal	3,5 A
Courant maximal	12 A

Dans le cadre des hypothèses retenues, on pose $v(t) = K_{rigide} \omega_m(t)$ avec $K_{rigide} > 0$ par convention.

Question 1. Déterminer la valeur numérique de K_{rigide} . Vérifier que l'actionneur retenu permet de respecter l'exigence id 1.4.1 qui stipule que "le déplacement vertical de la charge doit se faire à une vitesse maximale de 2 m/s"

On souhaite déterminer l'équation du mouvement de l'axe du moteur brushless liant le couple $C_m(t)$ à la vitesse angulaire $\omega_m(t)$ à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

Question 2. Préciser le système isolé et les puissances mises en jeu en vue de déterminer l'équation de mouvement de l'axe du moteur brushless.

Question 3. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit sous la forme $A \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - B$ et expliciter les constantes A et B en fonction des paramètres M , g , des inerties et K_{rigide} .

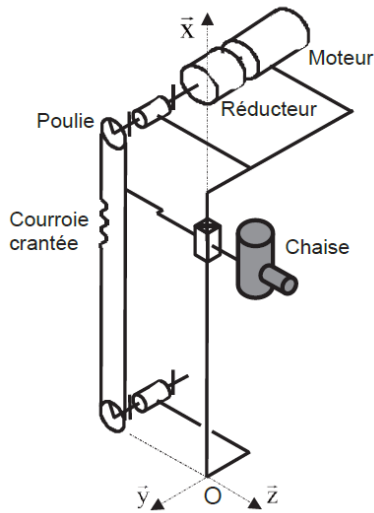
Question 4. Déterminer, en descente, l'accélération maximale qu'il est possible d'atteindre avec l'actionneur retenu pour une masse maximale $M = 200$ kg.

Le cahier des charges impose que la descente de la masse se fasse de telle sorte que l'accélération du point M vérifie $\|\vec{\Gamma}_{M/0}\| < g$.

Question 5. Valider ou non la satisfaction de l'exigence ainsi définie. Quel est le problème si cette exigence n'est pas vérifiée ? Conclure en justifiant que le contrôle du courant $i(t)$ permettra de s'assurer de la satisfaction de cette exigence.

4 Découpe de pare-chocs pour l'automobile ★

Sur une chaîne de montage, on cherche à automatiser le positionnement de pare-chocs dans le but de procéder à leur découpe. Le paramétrage de la transformation de mouvement est donné ci-dessous. La chaise permet le maintien d'une partie du pare-chocs.



C_m : couple électromécanique moteur
 P_{max} : la puissance maximale du moteur

ω_m : vitesse angulaire arbre moteur
 ω_p : vitesse angulaire poulie
 V : vitesse linéaire du module
 γ : accélération du module

J_m : moment d'inertie de l'arbre moteur
 J_p : moment d'inertie d'une poulie
 J_r : moment d'inertie du réducteur ramené à l'arbre moteur
 M : masse équivalente de la partie en mouvement

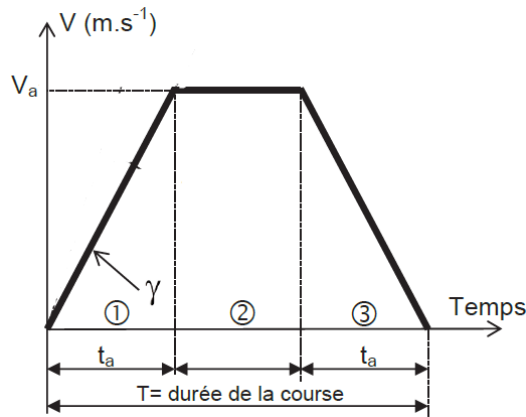
R_p : rayon primitif d'une poulie crantée

n : rapport de réduction $n = \frac{\omega_p}{\omega_m}$

Les solides sont considérés indéformables. Les efforts dus aux frottements secs et visqueux sont négligés, les liaisons sont considérées parfaites.

Question 1. Donner l'expression littérale du moment d'inertie total équivalent J_{Teq} ramené à l'arbre moteur dans le cas du mouvement vertical. Faire l'application numérique. $J_m = 0,3 \text{ g.m}^2$; $J_r = 0,022 \text{ g.m}^2$; $J_p = 3 \text{ g.m}^2$; $R_p = 16 \text{ mm}$; $n = 1/5$; $M = 10 \text{ Kg}$.

La loi de mouvement désirée qui minimise la puissance maximale demandée au moteur lors du déplacement est définie par la figure ci-dessous. Il s'agit d'une loi de vitesse de type « trapèze » permettant un meilleur comportement thermique du moteur. L'ensemble « moteur et variateur » doit pouvoir supporter le cycle prévu sans échauffement anormal. Classiquement, les constructeurs de moteurs préconisent d'utiliser une règle d'équirépartition des temps d'accélération, de vitesse constante et de décélération. C'est ce que l'on va montrer ici.



On fait l'hypothèse que le couple résistant est nul. Le déplacement total pendant la durée T est noté X .

Question 2. Donner la relation liant la puissance fournie par le moteur P_m en fonction de C_m et ω_m . A quel instant du trapèze de vitesse cette puissance est maximale ?

Question 3. Donner l'expression de V en fonction de ω_m , R_p et n . Écrire l'expression du couple moteur C_m requis en phase d'accélération. Montrer, qu'en l'absence de couple résistant, P_{max} peut s'écrire $P_{max} = A \frac{X^2}{t_a(T - t_a)^2}$. Donner l'expression de A .

Question 4. Déterminer la (ou les) valeur(s) de t_a qui minimise(nt) P_{max} . Conclure.

Le couple maximal du moteur utilisé est de 4,2 N.m. Sa fréquence de rotation maximale est de 3000 tr/min. On prend maintenant en compte le couple résistant C_r dû aux actions de pesanteur et ramené à l'arbre moteur. On prendra

également : $J_{Teq} = 6.644.10^{-4} \text{ kg.m}^2$. Pour respecter les cadences sur la chaîne de production, on souhaite que la chaise se translate de 0,65 m en moins de 1 secondes.

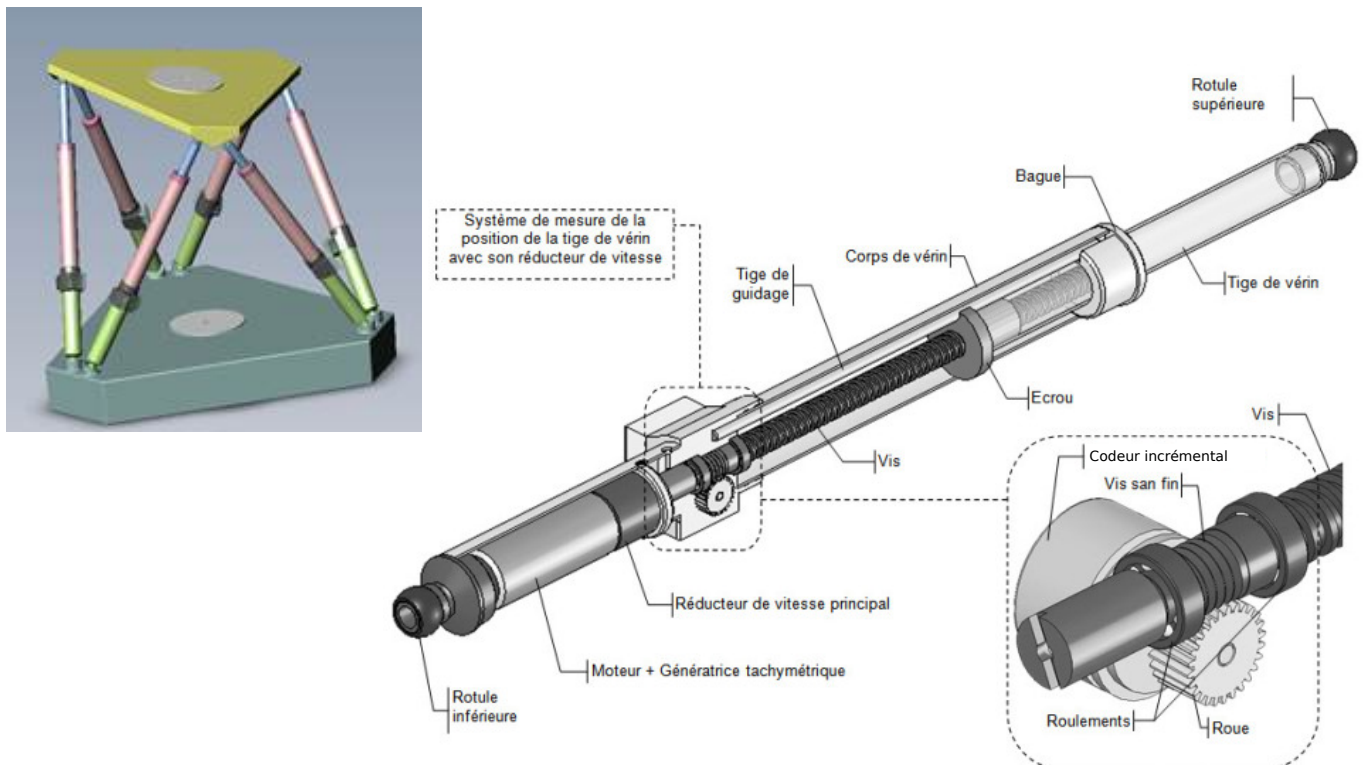
Question 5. Dans cette configuration d'équirépartition des différentes phases, le moteur choisi permet-il de vérifier la cadence imposée ?

5 Vérin d'une plate-forme 6 axes ★★

Les mécanismes de type 6 axes sont largement utilisés dans l'industrie. Ils sont composés d'une plate-forme mobile par rapport à un bâti. Cette plate-forme mobile est maintenue par 6 vérins linéaires. Une application récurrente est celle des simulateurs. Ce type de géométrie permet en effet tous les mouvements de la plate-forme mobile par rapport au bâti.

Afin de commander avec précision une plate-forme 6 axes, il est nécessaire de contrôler avec précision chacun des vérins linéaires. Ici on s'intéresse à une plate-forme basée sur une alimentation électrique. Les vérins sont composés :

- D'un corps de vérin (noté 0), que l'on supposera fixe dans l'étude ;
- D'un ensemble moteur et réducteur ;
- D'une vis principale (notée 1) ;
- D'un écrou (noté 2) sur lequel est solidarisé la tige du vérin ;
- D'un système de mesure composé lui-même d'une vis sans fin et d'une roue dont l'axe est solidaire de celui d'un potentiomètre.



Afin d'identifier le comportement du vérin, on place celui-ci dans une position verticale. Le corps du vérin est donc immobile. On fixe également sur la tige du vérin un solide de masse m .

On donne ci-dessous l'ensemble des paramètres liés aux différents éléments du système :

Élément	Paramétrage
Moteur	J_m : moment d'inertie de l'axe moteur
Réducteur	J_r : moment d'inertie du réducteur ramené sur l'axe de rotation de la vis r : rapport de réduction du réducteur
Vis	J_v : moment d'inertie de la vis autour de son axe de rotation m_v : masse de la vis p_v : pas de la vis
Écrou et tige du vérin	m_e : masse de l'ensemble {écrou + tige du vérin }
Masse additionnelle	m : masse additionnelle fixée sur la tige du vérin

On néglige l'inertie associée à la mesure avec la roue codeuse.

On suppose que l'ensemble des frottements dans le système peut se ramener à un seul frottement de type frottement visqueux ramené sur l'axe moteur et de coefficient de frottement f (en N.m/(rad/s)).

On note A , le point en extrémité de la tige du vérin et $\vec{V}_{A \in 2/0} = v \vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur unitaire orienté dans la direction du vérin. On note également ω_m , la vitesse de rotation du moteur.

On suppose que le moteur exerce un couple moteur C_m .

Détermination de l'équation de mouvement :

Question 1. Déterminer la relation entre v et ω_m .

Question 2. Déterminer ensuite le moment d'inertie équivalent de l'ensemble en mouvement ramené sur l'arbre moteur.

Question 3. Déterminer enfin l'équation de mouvement.

Moyen de mesure :

La mesure de la position angulaire de la vis se fait grâce à un codeur incrémental, entraîné par l'intermédiaire d'un dispositif {roue + vis sans fin } dont la vis est montée sur l'arbre de sortie du réducteur ; le rapport de transmission associé est $r_c = \frac{\omega_{\text{roue codeuse/corps vérin}}}{\omega_{\text{vis/corps vérin}}} = 1/10$. Le pas de la vis est de 1 mm.

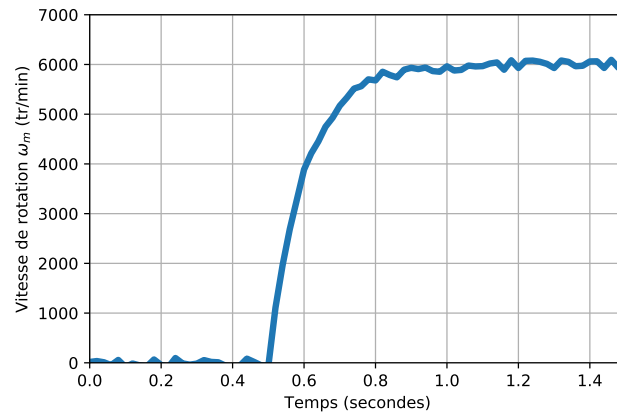
Le capteur incrémental, muni de 512 fentes, est équipé d'une seule voie de mesure permettant la détection des fronts montants et descendants.

Question 4. Quelle est la résolution théorique en translation de cet axe motorisé ?

Identification :

On réalise un essai avec une masse additionnel de 3 kg. Dans ces conditions, il est possible de négliger la masse de l'ensemble {écrou + tige}. On impose un échelon de couple de 0,1 N.m et on sait que le rapport de réduction du réducteur associé à l'arbre moteur est $r = 1/10$.

Le résultat de l'essai, représentant l'évolution de la vitesse de rotation du moteur en fonction du temps, est donné ci-dessous :



Question 5. Montrer dans ces conditions que l'on peut négliger le couple résistant lié à l'action de la pesanteur.

Question 6. D'après le résultat donné, donner la valeur du coefficient de frottement visqueux équivalent et du moment d'inertie équivalent.

Question 7. Pour un couple de 0,1 N.m, quelle sera alors la vitesse en régime établi v en sortie de tige ? Quelle sera également la vitesse en régime établi $\omega_{\text{roue codeuse/corps vérin}}$?

Question 8. Le codeur impose que la fréquence d'échantillonnage soit au moins 10 fois supérieure à la fréquence du signal à mesurer. Quelle fréquence d'échantillonnage faudrait-il utiliser ? Conclure sur le compromis à trouver sur le rapport de réduction r_c .

6 Banc d'épreuve hydraulique ★★

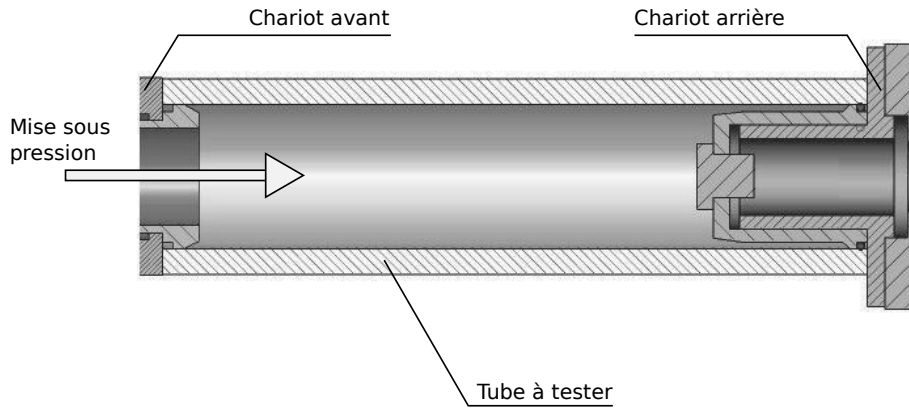
Vallourec & Mannesmann Tubes (V & M Tubes), entreprise du groupe Vallourec, est le leader mondial dans la production de tubes en acier sans soudure laminés à chaud.

Ces tubes sont employés dans des applications très diverses : canalisations hydrauliques, pneumatiques, vapeur ; ventilation, climatisation ; en basse pression ou haute pression.

Pour certaines applications, telles que les industries pétrolières ou nucléaires par exemple, où les problèmes de sécurité sont particulièrement importants, il arrive que les clients exigent des qualités spécifiques pour leurs tubes en plus des critères liés au cahier des charges standard. Une de ces contraintes personnalisées est la garantie de la tenue des tubes à un seuil de pression durant un temps donné.

Le site de V & M Tubes situé à Aulnoye-Aymeries, qui produit des tubes de 114 mm à 508 mm de diamètre pour des longueurs variant de 4,40 à 14,20 m possède un banc spécifique de test de pression hydraulique pour valider la qualité des produits finis exigée par certains clients. Ce banc fait donc l'objet de cette étude.

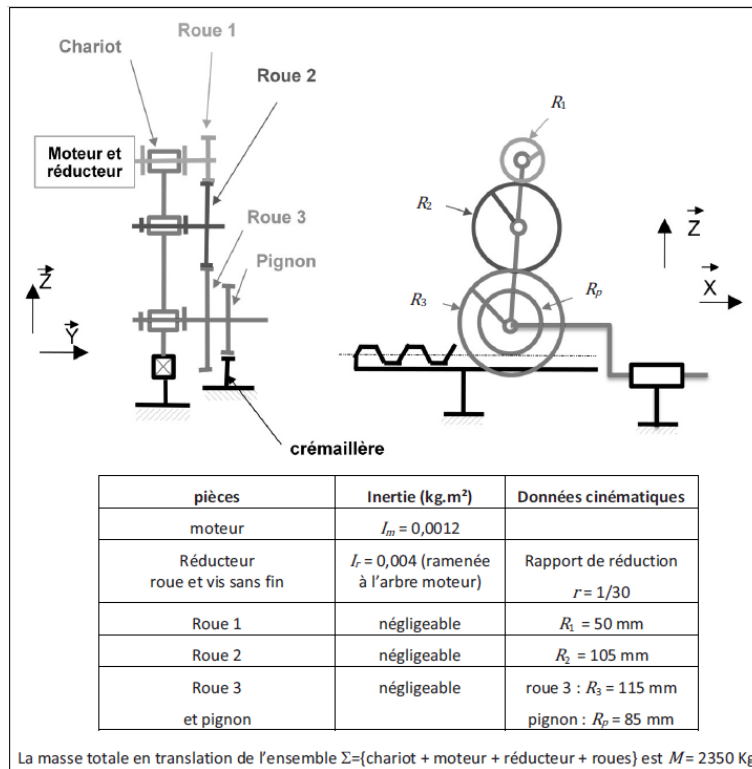
La figure ci-dessous présente le fonctionnement du banc hydraulique. Le tube est inséré entre le chariot avant et le chariot arrière. Le chariot avant est fixe. Le chariot arrière est, quant à lui, mobile et peut se translater dans la direction du tube. Il est donc possible de le déplacer pour qu'il s'adapte aux différentes longueurs des tubes. On s'intéressera particulièrement à la mise en mouvement de ce chariot arrière.



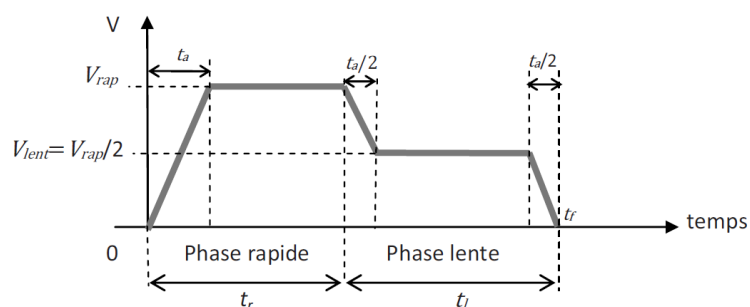
Un schéma cinématique simplifié du chariot arrière, ainsi que les grandeurs cinématiques et cinétiques, sont donnés sur la figure ci-dessous.

La chaîne de puissance comporte un moteur hydraulique, un réducteur roue et vis sans fin, un réducteur à engrenages parallèles et un système pignon-crémaillère.

Le guidage du chariot est modélisé par une glissière.



On note C_m le couple moteur, ω_m sa vitesse de rotation par rapport au bâti, et V la vitesse du chariot. La loi de vitesse du chariot pendant la totalité du trajet est présentée ci-dessous :



- On note t_r la durée de la phase de déplacement rapide, t_l la durée de la phase lente, t_f la durée totale, t_a la durée de la phase d'accélération. Chacune des 2 phases de décélération dure $t_a/2$.
- La course pendant la phase de déplacement en vitesse rapide (de 0 à t_r) est au maximum de $c_{rap} = 6,24$ m (pour le tube le plus court que peut tester le banc) et pendant la phase en vitesse lente (de t_r à t_f) $c_{len} = 1,56$ m.
- La durée maximale du déplacement total (phase rapide + phase lente) est limitée à 20 s.
- La vitesse du chariot, lors de la phase rapide, V_{rap} est limitée à 0,5 m/s.
- On considérera que le module de l'accélération a du chariot est identique pendant toutes les phases d'accélération et de décélération.

Question 1 - a : Montrer alors que t_a , t_l et t_r vérifient les relations suivantes :

$$c_{len} = \frac{V_{rap}}{2} t_l \quad c_{rap} = V_{rap} \left(t_r - \frac{1}{2} t_a \right)$$

Question 1 - b : En déduire les valeurs numériques de t_a et de t_r . En déduire l'accélération a du chariot.

Question 2 - a : Déterminer ω_m en fonction de V et des données cinématiques utiles.

Question 2 - b : En déduire les valeurs numériques de la vitesse maximale du moteur ω_m et de l'accélération angulaire $\dot{\omega}_m$ pendant les phases d'accélération et de décélération.

Question 3 - a : Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble Σ par rapport au référentiel galiléen bâti.

Question 3 - b : En déduire l'expression de l'inertie équivalente de cet ensemble ramenée à l'axe de sortie du moteur, notée J_{eq} en fonction de M , I_m , I_r et des données cinématiques utiles. Faire l'application numérique.

- Les efforts résistants sur le chariot sont modélisés par un glisseur $F = 500$ N.
- Le rendement de l'ensemble du mécanisme (réducteur roue et vis sans fin, réducteur à axes parallèles) est $\eta = 0,3$.
- Quelles que soient les valeurs précédemment trouvées, on prendra une accélération angulaire maximale du moteur $\dot{\omega}_m$ égale à 250 rad/s^2 et une inertie totale équivalente ramenée à l'arbre moteur J_{eq} égale à $0,01 \text{ kg.m}^2$.

On se propose de déterminer le couple nécessaire du moteur.

Question 4 : Déterminer l'expression du couple C_m à fournir par le moteur en fonction de ω_m , J_{eq} et F . Calculer C_m .

Question 5 : À partir de la valeur de C_m et de la vitesse moteur ω_m calculées précédemment, choisir dans le tableau fourni ci-dessous un moteur compatible avec les spécifications demandées.



Référence	Cylindrée [cm ³]	N max [tours/min]	Couple max [Nm]	Puissance [kw]	Poids [kg]
HDMF11-05	4,88	12 000	7,8	13	5
HDMF11-14	14,3	10 000	22,7	26	9
HDMF11-19	19,0	7 500	30,2	32	11
HDMF11-150	150,0	3 000	238	145	70
HDMF11-250	242,0	2 700	384	190	77