Inertie d'un boomerang

① $m = m_R + 4 \cdot m_{P_i}$

avec $m_R = \rho \cdot e \cdot l_R^2$
et $m_{P_i} = \rho \cdot e \cdot l_p \cdot h_p$

Donc : $m = \rho \cdot e \cdot (l_R^2 + 4 \cdot l_p \cdot h_p)$

On connaît $m = 65 \cdot 10^{-3}$ kg donc :

$$\rho = \frac{m}{e \cdot (l_R^2 + 4 \cdot l_p \cdot h_p)} \simeq 289 \text{ kg/m}^3$$

On remarque que $\rho < 1000$ kg/m³ donc ce boomerang flotte ce qui est pratique pour jouer en bord de mer.

② Le boomerang présente :
- une symétrie matérielle par rapport au plan $(O, \vec{z}, \vec{x})$;
- " " " " " " " $(O, \vec{x}, \vec{y})$;
- " " " " " " " $(O, \vec{y}, \vec{z})$.

Donc la matrice d'inertie sera diagonale :

$$I(O, b) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

boomerang

Il suffit donc de calculer les termes de la diagonale.
Je peux écrire :

$$I(O, b) = I(O, R) + \sum_{i=1}^{4} I(O, P_i)$$

Avec : $I(O, R) = m_R \cdot \begin{bmatrix} \frac{l_R^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_R^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_R^2}{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

$I(O, P_1) = I(G_1, P_1) + I(G_1 \rightarrow O, P_1)$ (Huygens)

Où $I(G_1, P_1) = m_{P_1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l_p^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_p^2 + h_p^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_p^2}{12} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

On a aussi : $\overrightarrow{OG_1} = \left(\frac{l_R}{2}+\frac{l_P}{2}\right)\cdot\vec{z}$

Calculs inutiles

Donc : $I(G_1 \rightarrow O, P_1) = m_{P_1} \cdot \begin{bmatrix} \left[\frac{l_R}{2}+\frac{l_P}{2}\right]^2 & \times & \times \\ \times & 0 & \times \\ \times & \times & \left[\frac{l_R}{2}+\frac{l_P}{2}\right]^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

On obtient :

$$I(O,P_1) = m_{P_1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l_P^2}{12} + \left(\frac{l_R}{2}+\frac{l_P}{2}\right)^2 & \times & \times \\ \times & \frac{l_P^2+h_P^2}{12} & \times \\ \times & \times & \frac{h_P^2}{12} + \left(\frac{l_R}{2}+\frac{l_P}{2}\right)^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Par permutation, on a directement :

$$I(O,P_3) = I(O,P_1)$$

$$I(O,P_2) = I(O,P_4) = m_{P_4} \cdot \begin{bmatrix} \frac{h_P^2}{12} + \left(\frac{l_R}{2}+\frac{l_P}{2}\right)^2 & \times & \times \\ \times & \frac{l_P^2+h_P^2}{12} & \times \\ \times & \times & \frac{l_P^2}{12} + \left(\frac{l_R}{2}+\frac{l_P}{2}\right)^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On a donc :

$$\sum_{i=1}^{4} I(O,P_i) = m_{P_i} \cdot \begin{bmatrix} \frac{l_P^2}{6} + \frac{h_P^2}{6} + (l_R+l_P)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_P^2+h_P^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_P^2}{6} + \frac{h_P^2}{6} + (l_R+l_P)^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Après l'application numérique, on obtient donc :

$I(O,b) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ où $A = C \simeq 7{,}2.10^{-4}$ kg.m^2

$B \simeq 1{,}4.10^{-4}$ kg.m^2