Pendule de Kapitza

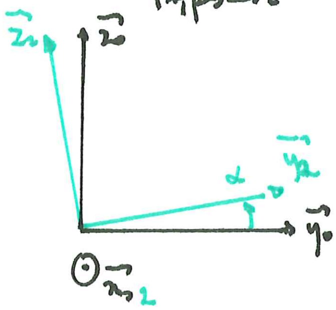
(1) J'isole 2 soumis aux actions mécaniques extérieures suivants :

- $1 \longrightarrow 2$
- $pes \longrightarrow 2$

J'écris le th. des moments en A et en projection sur $\vec{x_{02}}$:

$$\underbrace{\vec{M}_{A,1\to 2}\cdot\vec{x_{02}}}_{=-f\cdot\dot{\alpha}} + \vec{M}_{A,pes\to 2}\cdot\vec{x_{02}} = \vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{x_{02}}$$

★ $\vec{M}_{A,pes\to 2}\cdot\vec{x_{02}} = \cancel{\vec{M}_{G_2,pes\to 2}}\cdot\vec{x_{02}} + \left(\vec{AG_2}\wedge(-m\cdot g\cdot\vec{z_0})\right)\cdot\vec{x_{02}}$



$$= \left[\frac{l}{2}\cdot\vec{z_2}\wedge(-m\cdot g\cdot\vec{z_0})\right]\cdot\vec{x_{02}}$$

$$= \frac{l}{2}\cdot m\cdot g\cdot\sin\alpha$$

★ $\vec{\delta}_{A,2/0}\cdot\vec{x_{02}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{A,2/0}\right)_0\cdot\vec{x_{02}} + \left(m\cdot\underbrace{\vec{V}_{A/0}}_{\dot{a}\cdot\vec{z_0}}\wedge\underbrace{\vec{V}_{G_2\in 2/0}}_{\text{à calculer}}\right)\cdot\vec{x_{02}}$

- $\vec{V}_{G_2\in 2/0} = \vec{V}_{G_2\in 2/1} + \vec{V}_{G_2\in 1/0}$

$\vec{V}_{G_2\in 2/1} = \cancel{\vec{V}_{A\in 2/1}} + \vec{G_2A}\wedge\vec{\Omega}_{2/1}$

$= -\frac{l}{2}\cdot\vec{z_2}\wedge(\dot{\alpha}\cdot\vec{x_{02}})$

$= -\frac{l}{2}\cdot\dot{\alpha}\cdot\vec{y_2}$

$\vec{V}_{G_2\in 1/0} = \dot{a}\cdot\vec{z_0}$

- $\left(\vec{V}_{A/0}\wedge\vec{V}_{G_2\in 2/0}\right)\cdot\vec{x_{02}} = \left(\dot{a}\cdot\vec{z_0}\wedge\left(\dot{a}\cdot\vec{z_0} - \frac{l}{2}\cdot\dot{\alpha}\cdot\vec{y_2}\right)\right)\cdot\vec{x_{02}}$

$= \frac{l}{2}\cdot\dot{\alpha}\cdot\dot{a}\cdot\cos\alpha$

$(\vec{z_0}\wedge\vec{y_2})\cdot\vec{x_{02}} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$= -\cos\alpha$

- $\vec{\sigma}_{A,2/0}\cdot\vec{x_{02}} = \underbrace{\left(I_A(2)\cdot\vec{\Omega}_{2/0}\right)\cdot\vec{x_{02}}}_{=J\cdot\dot{\alpha}} + \left(m\cdot\vec{AG_2}\wedge\vec{V}_{A\in 2/0}\right)\cdot\vec{x_{02}}$

et $\vec{V}_{A\in 2/0} = \underbrace{\vec{V}_{A\in 2/1}}_{\vec{0}} + \vec{V}_{A\in 1/0} = \dot{a}\cdot\vec{z_0}$

donc $\vec{\sigma}_{A,2/0} \cdot \vec{x_{02}} = J \cdot \dot{\alpha} + \left(m \cdot \frac{l}{2} \cdot \vec{z_2} \wedge (\dot{a} \cdot \vec{z_0}) \right) \cdot \vec{x_{02}}$

$$= J \cdot \dot{\alpha} - m \cdot \frac{l}{2} \cdot \dot{a} \cdot \sin\alpha$$

Donc : $\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{x_{02}} = J \cdot \ddot{\alpha} - m \cdot \frac{l}{2} \cdot \ddot{a} \cdot \sin\alpha - \cancel{m \cdot \frac{l}{2} \cdot \dot{a} \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\alpha}$

$$+ \cancel{m \cdot \frac{l}{2} \cdot \dot{a} \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\alpha}$$

D'où :

$$J \cdot \ddot{\alpha} + f \cdot \dot{\alpha} - \frac{l}{2} \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha - m \cdot \frac{l}{2} \cdot \ddot{a} \cdot \sin\alpha = 0$$

$\ddot{a} = -A_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

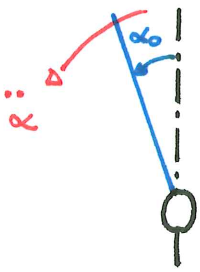
Donc :

$$J \cdot \ddot{\alpha} + f \cdot \dot{\alpha} - m \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(g - A_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) \cdot \sin\alpha = 0$$

2 Sans mouvement de la pièce 1, on a :

$$J \cdot \ddot{\alpha} + f \cdot \dot{\alpha} - m \cdot \frac{l}{2} \cdot g \cdot \sin\alpha = 0$$

Si, à $t = 0$ s, on écarte légèrement la tige de la position $\alpha = 0$. On a donc $\alpha = \alpha_0$ avec $\begin{cases} \alpha_0 \ll 1 \\ \alpha_0 > 0 \end{cases}$. Dans ce cas : $\ddot{\alpha} > 0$.



Le pendule tend à s'écarter de sa position d'équilibre, c'est ce que l'on appelle un équilibre instable.