

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Session 2017

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT  
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



*Épreuve obligatoire à option de*  
**SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR**

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde
- 1 page d'instruction pour remplir le QCM recto/verso
- 1 page d'avertissements
- 23 pages de texte/questions recto/verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

## QCM de révisions - durée 2h

extrait du concours de l'école nationale de l'aviation civile  
sujet de 2017

**Chaque question comporte une seule réponse exacte.**

À chaque question numérotée entre 1 et 22 correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro . Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque question , vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question :  
la ligne correspondante doit rester vierge.
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :  
vous devez alors noircir la case E.

**Attention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.**

### Exemples de réponses

**Question 1.** Le torseur cinématique du solide  $S$  en mouvement par rapport à un référentiel  $R_0$  en un point  $A$  est noté  $\{V_{S/R_0}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{S/R_0} \\ \vec{V}_{A,S/R_0} \end{Bmatrix}_A$ . À partir de la formule de changement de point, indiquer l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}_{B,S/R_0}$ .

A)	B)	C)	D)
$\vec{V}_{A,S/R_0} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0}$	$\vec{V}_{A,S/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{BA}$	$\vec{V}_{A,S/R_0} + \vec{BA} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0}$	$\vec{V}_{A,S/R_0} + \vec{OB} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0}$

**Question 2.** Soit  $f$  la fonction logique, de représentation algébrique :  $f = a \cdot b \cdot \bar{c}$ . Déterminer le complément de  $f$ .

A)	B)	C)	D)
$\bar{f} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$	$\bar{f} = a + b + \bar{c}$	$\bar{f} = \bar{a} \cdot \bar{b} + c$	$\bar{f} = a + \bar{b} + c$

Vous cocherez sur la feuille réponse :

1	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	A	B	C	D	E
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
	A	B	C	D	E

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

<b>AVERTISSEMENTS</b>
-----------------------

Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve. Dans certaines questions, les candidats doivent choisir entre plusieurs valeurs numériques. Les valeurs fausses qui sont proposées ont des ordres de grandeur suffisamment différents de la valeur exacte arrondie selon les règles habituelles, afin d'éliminer toute ambiguïté dans le choix de la bonne réponse.

**Exemple :**

Le calcul sera arrondi au plus proche : 11,56 kg  $\approx$  12 kg

Les propositions de réponse sont :

A)	B)	C)	D)
2 kg	12 kg	18 kg	24 kg

**QUESTIONS LIÉES**

<i>Partie A :</i> <del>Questions 4 et 5</del> Questions 6, 7 et 8	<i>Partie B :</i> Questions 19 et 20	<del><i>Partie C :</i> Questions 23, 24 et 25 Questions 27, 28, et 31 Questions 32 et 34 Questions 35 et 36</del>	<del><i>Partie D :</i> Questions 41 et 42</del>
---	---	---	---

**FIN DES CONSIGNES**



## ATTRACTION « DANSE AVEC LES ROBOTS »

« Danse avec les robots » est une des dernières attractions majeures mise en place en 2013 au Futuroscope de Poitiers, qui allie sensations fortes et spectacle musical. Le principe de cette attraction consiste à attacher deux volontaires au bout d'un bras de robot à 5 axes, fournissant ainsi des possibilités de mouvements variés, et donc de générer des sensations fortes. Les volontaires assis au bout du bras sont remués en rythme avec la musique d'ambiance.

Cette attraction est installée dans une salle 2 000 m<sup>2</sup> accueillant dix robots de 7 m chacun développés par la société allemande Kuka issus de l'industrie automobile. En effet, ces robots étaient initialement utilisés dans les usines Citroën et Renault pour le pliage de tôles destinées à l'industrie automobile.



Figure 1 – Photographie de la salle accueillant les robots

Les robots sont actuellement programmés pour 3 modes de fonctionnement :

- Mode 1 – Appelé mode « Paisible balade », réservé aux volontaires de taille comprise entre 1 m 20 et 1 m 40, il permet de ressentir une accélération de l'ordre de 1\*g ;
- Mode 2 – Appelé mode « Rodéo corsé », réservé aux volontaires de taille comprise entre 1 m 40 et 1 m 95, il permet de ressentir une accélération l'ordre de 2\*g ;
- Mode 3 – Appelé mode « Sensation forte », réservé aux volontaires de taille comprise entre 1 m 40 et 1 m 95, il permet de ressentir une accélération de l'ordre de 3,5\*g.

La durée normale de l'attraction est de 90 secondes. Chaque robot est capable d'embarquer 2 volontaires, attachés à la nacelle par des harnais de sécurité, dont la masse de l'ensemble nacelle, harnais et volontaires est de l'ordre de 500 kg.

Un extrait du cahier des charges fonctionnel partiel du système « Danse avec les robots » est proposé dans le tableau 1.

Exigences	Id.	Critère(s)	Niveau(x)
Donner des sensations aux volontaires	Id. 1	Accélération ressentie	3 modes : <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mode 1 → 1*g ;</li> <li>• Mode 2 → 2*g ;</li> <li>• Mode 3 → 3,5*g.</li> </ul>
Mettre en mouvement la nacelle	Id. 2.1	Nombre de volontaires	2
	Id. 2.2	Masse maximale d'un volontaire	150 kg
	Id. 2.3	Nombre d'axes par robot	5
Assurer la sécurité des volontaires	Id. 3.1	Maintenir à l'arrêt en absence d'énergie électrique	Tous les axes du robot sont immobiles
	Id. 3.2	Vitesse d'approche lors du débarquement des volontaires	$\ \vec{V}_{G,nacelle/0}\  \leq 0,3 \text{ m/s}$

Tableau 1 – Table des exigences et leurs caractérisations



Figure 2 – Photographie d'un robot en situation d'usage

On appelle nacelle l'ensemble de solide composé des sièges, des harnais de sécurité et des 2 volontaires attachées solidement à ceux-ci de corpulence moyenne.

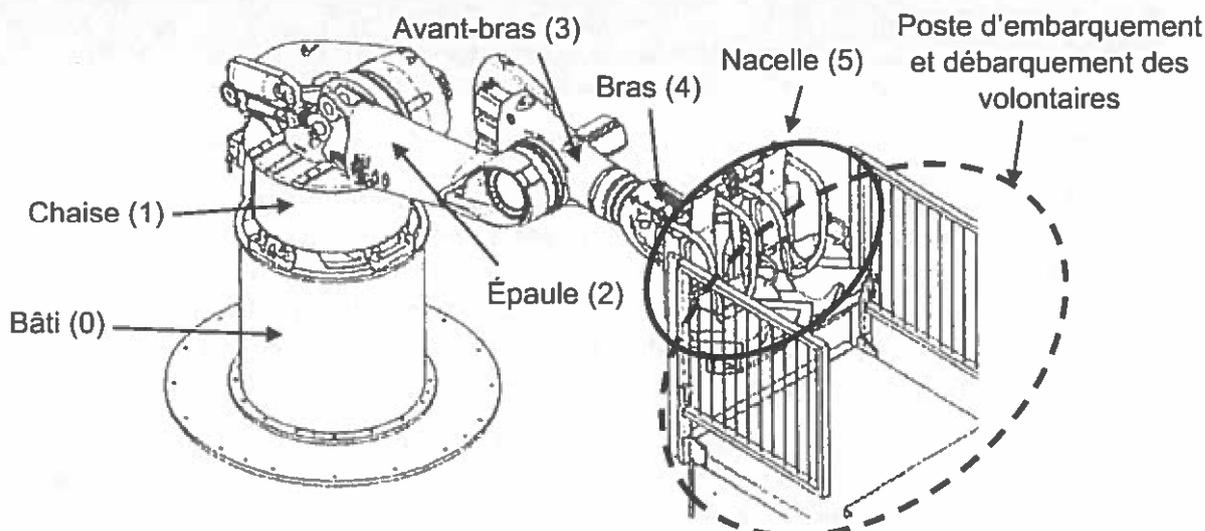


Figure 3 – Description globale d'un robot

On donne sur la figure 4 un schéma cinématique spatial d'un des robots avec le paramétrage associé aux différents solides et aux liaisons.

L'ensemble des repères sont considérés orthonormés directs.

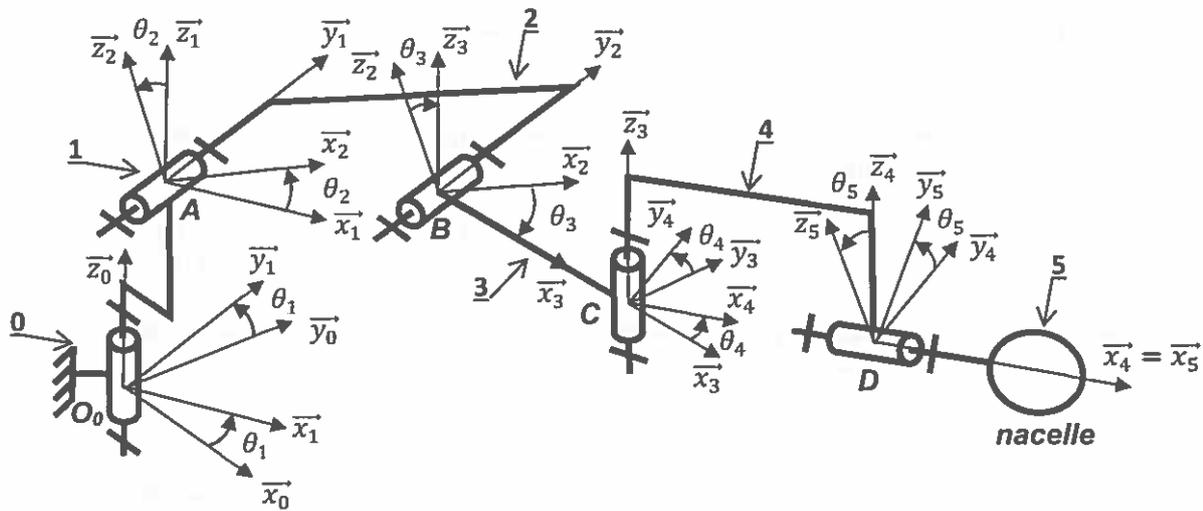


Figure 4 – Schéma cinématique spatial et paramétrage associé

On note  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère supposé galiléen associé au sol de la salle de spectacle, appelé bâti 0.

On note  $R_1(O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  le repère associé à la chaise 1, et  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  l'angle de rotation de la chaise 1 par rapport au bâti 0.

On note  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  le repère associé à l'épaule 2,  $\vec{O}_0\vec{A} = a.\vec{z}_0 + b.\vec{x}_1$  et  $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  l'angle de rotation de l'épaule 2 par rapport à la chaise 1.

On note  $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  le repère associé à l'avant-bras 3,  $\vec{A}\vec{B} = c.\vec{x}_2$  et  $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$  l'angle de rotation de l'avant-bras 3 par rapport à l'épaule 2.

On note  $R_4(C, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  le repère associé au bras 4,  $\vec{B}\vec{C} = d.\vec{x}_3$  et  $\theta_4 = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{y}_3, \vec{y}_4)$  l'angle de rotation du bras 4 par rapport à l'avant-bras 3.

On note  $R_5(D, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  le repère associé à la nacelle 5,  $\vec{C}\vec{D} = e.\vec{x}_4$  et  $\theta_5 = (\vec{y}_4, \vec{y}_5) = (\vec{z}_4, \vec{z}_5)$  l'angle de rotation de la nacelle 5 par rapport au bras 4.

Le centre de gravité de la nacelle 5 (siège + volontaires + harnais) est tel que  $\vec{D}\vec{G} = f.\vec{x}_4 + h.\vec{z}_5$ .

On définit la position du point G dans la base  $B_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  telle que :

$$\vec{O}_0\vec{G} = x.\vec{x}_0 + y.\vec{y}_0 + z.\vec{z}_0.$$

On donne :

$$a = 1\,100 \text{ mm} ; b = 100 \text{ mm} ; c = 1\,500 \text{ mm} ; d = 1\,400 \text{ mm} ; e = 400 \text{ mm} ;$$

$$f = 800 \text{ mm} \text{ et } h = 200 \text{ mm}.$$

## PARTIE A VALIDATION DES EXIGENCES ID. 1 ET ID. 3.2

### I ÉLABORATION PARTIELLE DU MODÈLE CINÉMATIQUE DIRECT

Objectif

Analyser le mécanisme et définir la loi entrées-sorties  $(x, y, z) = f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$  appelée modèle cinématique direct.

**Question 1.** Le modèle du mécanisme représenté sur la figure 4 correspond à une chaîne cinématique

A)	B)	C)	D)
Fermée	Complexe	Ouverte	Mixte

**Question 2.** La liaison équivalente entre la nacelle 5 et l'avant-bras 3 est une

A)	B)	C)	D)
Liaison sphère-plan de normale $(D, \vec{x}_3)$	Liaison sphérique de centre C	Liaison pivot glissant d'axe $(C, \vec{z}_3)$	Liaison sphérique à doigt en C, de rainure dans le plan $(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$ et de doigt suivant $\vec{x}_4$

**Question 3.** La position du point G selon l'axe  $\vec{x}_0$  est telle que

<b>A)</b>	$x = b \cdot \cos \theta_1 + c \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + d \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) + (e + f) \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \cos \theta_4 - h \cdot (\cos \theta_1 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) \cdot \cos \theta_5 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_4 \cdot \sin \theta_5 + \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5)$
<b>B)</b>	$x = b \cdot \cos \theta_1 + c \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + d \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) + (e + f) \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \cos \theta_4 - h \cdot (\cos \theta_1 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) \cdot \cos \theta_5 - \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_4 \cdot \sin \theta_5 - \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5)$
<b>C)</b>	$x = b \cdot \cos \theta_1 + c \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + d \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) - (e + f) \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \cos \theta_4 + h \cdot (\cos \theta_1 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) \cdot \cos \theta_5 - \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_4 \cdot \sin \theta_5 - \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5)$
<b>D)</b>	$x = b \cdot \cos \theta_1 + c \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + d \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) + (e + f) \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \cos \theta_4 + h \cdot (\cos \theta_1 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) \cdot \cos \theta_5 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_4 \cdot \sin \theta_5 + \cos \theta_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5)$

### II VÉRIFICATION DE L'EXIGENCE ID. 3.2

Objectif

Déterminer les conditions relatives à une phase d'approche et vérifier l'exigence de vitesse d'approche.

Les phases d'approche correspondant aux moments où les volontaires se placent sur la nacelle depuis le poste d'embarquement ou quittent la nacelle vers le poste de débarquement. Les jambes des volontaires étant libres lors des phases d'approche, il est nécessaire de mettre en œuvre toute la sécurité nécessaire. L'exigence en termes de vitesse d'approche est détaillée dans le tableau 1.

On considère pour l'étude en phase d'approche les conditions suivantes :

- $\dot{\theta}_1 = 0$  et  $\theta_1 = 0$  ;
- $\dot{\theta}_4 = 0$  et  $\theta_4 = 0$  ;
- $\dot{\theta}_5 = 0$  et  $\theta_5 = 0$  ;
- $|\dot{\theta}_2|_{max} = 0,18 \text{ rad/s}$ .

Question 4. À quelle condition la trajectoire du point G dans son mouvement par rapport à  $R_0$  est un segment de droite de direction  $\vec{x}_0$  ?

A)	B)	C)	D)
$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = 0$	$\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_3$	$b = c$	$\theta_2 = \theta_3$

Question 5. Exprimer le vecteur vitesse  $\vec{v}_{G,5/0}$  dans cette condition. Conclure quant au respect ou non de l'exigence de vitesse d'approche en phase de débarquement des volontaires.

A)	B)	C)	D)
$-c \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2$ Exigence respectée	$(c + d + e + f) \cdot \dot{\theta}_2$ Exigence non respectée	$c \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_2$ Exigence non respectée	$-c \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2$ $- 2 \cdot (d + e + f + h) \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3)$ Exigence non respectée

### III VÉRIFICATION DE L'EXIGENCE ID. 1

Objectif

Valider dans un cas particulier que l'exigence d'accélération est satisfaite.

L'accélération ressentie par les volontaires, notée  $\vec{\Gamma}_G$  s'exprime par :

$$\vec{\Gamma}_G = \vec{\Gamma}_{G,5/0} - \vec{g} \text{ avec } \vec{g} = -g \cdot \vec{z}_0$$

On limite l'étude dans un premier temps au cas où  $\theta_1 = \text{cste} = 0$  et donc  $\dot{\theta}_1 = 0$ .

Question 6. La vitesse du point G, dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à 0, notée  $\vec{v}_{G,5/0}$ , s'exprime par

A)	$-h \cdot \dot{\theta}_5 \cdot \vec{y}_5 + (e + f) \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \vec{y}_4 + h \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \vec{x}_4 - (e + f) \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \sin \theta_4 \cdot \vec{z}_4$ $- d \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{z}_4 + h \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \sin \theta_5 \cdot \vec{x}_3 - h \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \sin \theta_4 \cdot \cos \theta_5 \cdot \vec{z}_4$ $- c \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2$
B)	$-h \cdot \dot{\theta}_5 \cdot \vec{y}_5 + (e + f) \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \vec{y}_4 + h \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \vec{x}_4 + (e + f) \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \sin \theta_4 \cdot \vec{z}_4 +$ $d \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{z}_4 + h \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \cos \theta_5 \cdot \vec{x}_3 + h \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \vec{z}_4 - c \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2$
C)	$-h \cdot \dot{\theta}_5 \cdot \vec{y}_5 + (e + f) \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \vec{y}_4 + h \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \vec{x}_4 - (e + f) \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \cos \theta_4 \cdot \vec{z}_4$ $- d \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{z}_4 + h \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \cos \theta_5 \cdot \vec{x}_3 - h \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \sin \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \vec{z}_4$ $- c \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2$
D)	$-h \cdot \dot{\theta}_5 \cdot \vec{y}_5 + (e + f) \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \vec{y}_4 + h \cdot \dot{\theta}_4 \cdot \cos \theta_5 \cdot \vec{x}_4 - (e + f) \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{z}_4 - d \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{z}_4$ $+ h \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \sin \theta_5 \cdot \vec{x}_3 - h \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \cos \theta_4 \cdot \sin \theta_5 \cdot \vec{z}_4 - c \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2$

On limite l'étude désormais au cas où  $\dot{\theta}_2 = 1,45 \text{ rad/s}$  ;  $\theta_3 = 0 = \text{cste}$  ;  $\theta_4 = 0 = \text{cste}$  et  $\theta_5 = 0 = \text{cste}$  (l'hypothèse  $\theta_1 = \text{cste} = 0$  est toujours vérifiée).

**Question 7.** L'accélération du point  $G$ , dans son mouvement par rapport au repère galiléen associé à  $0$ , notée  $\overrightarrow{\Gamma}_{G,5/0}$ , s'exprime par

A)	$-((c-d) \cdot \cos \theta_2 + h \cdot \sin \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \overrightarrow{x_0} + ((c-d) \cdot \sin \theta_2 - h \cdot \cos \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \overrightarrow{z_0}$
B)	$-(c+d+e+f) \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \overrightarrow{x_2} - h \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \overrightarrow{z_2}$
C)	$-((c+d) \cdot \cos \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \overrightarrow{x_0} + ((c+d) \cdot \sin \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \overrightarrow{z_0}$
D)	$-((c+d+e+f) \cdot \cos \theta_2 - h \cdot \sin \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \overrightarrow{x_0} + ((c+d+e+f) \cdot \sin \theta_2 - h \cdot \cos \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2^2 \cdot \overrightarrow{z_0}$

**Question 8.** Conclure quant au respect de l'exigence d'accélération ressentie dans le mode 3 pour la situation particulière étudiée.

A)	B)	C)	D)
Elle est vérifiée car la valeur de l'accélération ressentie vaut $\ \overrightarrow{\Gamma_G}\  = 3,24 * g$ .	Elle est non vérifiée, car l'accélération ressentie est supérieure à celle imposée dans le cahier des charges	Elle est vérifiée car l'accélération ressentie est inférieure à celle imposée dans le cahier des charges	Elle est vérifiée car l'accélération ressentie vaut $\ \overrightarrow{\Gamma_G}\  = 3,39 * g$ .

## PARTIE B CHOIX DE L'ACTIONNEUR

### Objectif

Dimensionner l'actionneur en termes de couple à fournir et évaluer les actions mécaniques de liaisons dans un cas particulier de mouvement.

On considère un cas particulier d'un mouvement du robot représentatif d'une situation à forte accélération. Celle-ci est définie par la chaise bloquée, ainsi que l'avant-bras et le bras. Elle est décrite sur la figure 5 ci-contre. Par conséquent, les angles repérés sur la figure 4 sont tels que  $\theta_1 = \theta_3 = \theta_4 = 0$ . Pour l'étude de ce mouvement, le schéma cinématique simplifié retenu pour cette partie est fourni sur la figure 6.



Figure 5 – Mouvements étudiés

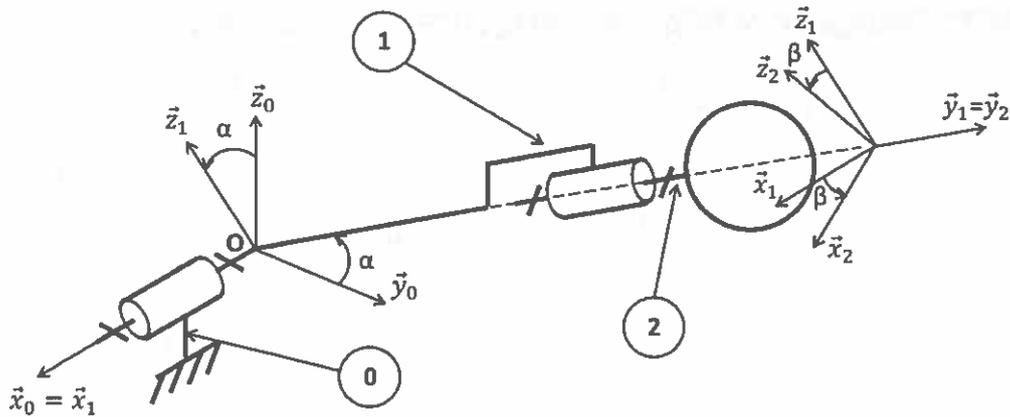


Figure 6 – Schéma cinématique simplifié et paramétrage retenu

On note  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère, supposé galiléen, associé au sol de la salle de spectacle, appelé bâti, de base  $B_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Le point  $O$  est le point d'intersection des axes des deux liaisons pivots entre les solides 0 et 1, et 1 et 2.

On note :

- Pour le bras 1 :
  - ✓  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  le repère associé au bras 1, de base  $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
  - ✓  $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$  la rotation du bras 1 par rapport au bâti 0 ;
  - ✓  $m_1$  sa masse ;
  - ✓  $G_1$  le centre d'inertie du bras 1 tel que  $\vec{OG}_1 = l_1 \cdot \vec{y}_1$  ;
  - ✓  $\bar{I}(1, G_1)$  sa matrice d'inertie dans la base  $B_1$  au point  $G_1$  telle que

$$\bar{I}(1, G_1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{B_1} ;$$

- Pour la nacelle 2 :
  - ✓  $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  le repère associé à la nacelle 2, de base  $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  ;
  - ✓  $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  la rotation de la nacelle 2 par rapport au bras 1 ;
  - ✓  $m_2$  sa masse ;
  - ✓  $G_2$  le centre d'inertie de la nacelle 2 pour deux personnes de corpulence moyenne tel que  $\vec{OG}_2 = l_2 \cdot \vec{y}_1$  ;
  - ✓  $\bar{I}(2, G_2)$  sa matrice d'inertie dans la base  $B_2$  au point  $G_2$  telle que

$$\bar{I}(2, G_2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{B_2} .$$

On note  $E$  l'ensemble des parties du robot en mouvement :  $E = \{1+2\}$ . Les liaisons pivots sont supposées parfaites et motorisées. Le bras est supposé accélérer autour de la liaison pivot entre 0 et 1, tandis que la nacelle tourne à vitesse constante autour de la liaison entre 1 et 2.

On a donc  $\ddot{\alpha} \neq 0$  et  $\ddot{\beta} = 0$ .

# I DÉTERMINATION DES GRANDEURS CINÉTIQUES

Question 9. Quel théorème est-il nécessaire d'écrire afin d'obtenir la loi de mouvement de la nacelle 2 ?

A)	B)	C)	D)
Théorème de l'énergie cinétique appliqué à E	Théorème de la résultante dynamique appliqué à E en projection sur $\vec{x}_1$	Théorème du moment dynamique appliqué à 1 en projection sur $\vec{x}_1$	Théorème du moment dynamique appliqué à E en projection sur $\vec{x}_1$

Question 10. Calculer la position  $\overline{OG_E}$  du point  $G_E$ , centre d'inertie de l'ensemble E exprimé dans la base  $B_1$ .

A)	B)	C)	D)
$\frac{m_1.l_1 - m_2.l_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{y}_1$	$\frac{m_1.l_1 - m_2.l_2}{m_1 - m_2} \cdot \vec{y}_1$	$\frac{m_1.l_2 + m_2.l_1}{m_1 - m_2} \cdot \vec{y}_1$	$\frac{m_1.l_1 + m_2.l_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{y}_1$

Pour la suite de cette partie, on note  $\overline{OG_E} = a_E \vec{y}_1$ .

Question 11. Exprimer le vecteur taux de rotation de la nacelle 2 dans son mouvement par rapport à 0, noté  $\overline{\Omega_{2/0}}$ .

A)	B)	C)	D)
$\overline{\Omega_{2/0}} = \vec{0}$	$\overline{\Omega_{2/0}} = \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2 + \dot{\beta} \cdot \vec{x}_1$	$\overline{\Omega_{2/0}} = -\dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - \dot{\beta} \cdot \vec{x}_1$	$\overline{\Omega_{2/0}} = \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 - \dot{\beta} \cdot \vec{x}_1$

Question 12. Exprimer l'accélération de  $G_E$  par rapport à 0, notée  $\overline{\Gamma_{G_E/0}}$ , en projection dans la base  $B_1$ .

A)	B)	C)	D)
$a_E \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$	$a_E \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 - a_E \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{y}_1$	$a_E \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{z}_1$	$-a_E \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 - a_E \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{y}_1$

Question 13. Quelle hypothèse a été formulée pour que la matrice d'inertie du bras 1, en son centre de gravité  $G_1$ , exprimée dans la base  $B_1$  s'écrive

$$\overline{I}(1, G_1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{B_1} ?$$

A)	B)	C)	D)
Axe de révolution $\vec{y}_1$	Axe de révolution $\vec{z}_1$	Plan de symétrie $(G_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$	Plan de symétrie $(G_1, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$

**Question 14.** La matrice d'inertie du bras 1 au point  $O$ ,  $\bar{I}(1, O)$ , dans la base  $B_1$ , s'écrit

A)	B)
$\begin{bmatrix} A_1 + m_1.l_1^2 & 0 & -E_1 + m_1.l_1^2 \\ 0 & B_1 + m_1.l_1^2 & 0 \\ -E_1 + m_1.l_1^2 & 0 & C_1 + m_1.l_1^2 \end{bmatrix}_{B_1}$	$\begin{bmatrix} A_1 + m_1.l_1^2 & 0 & -E_1 - m_1.l_1^2 \\ 0 & B_1 + m_1.l_1^2 & 0 \\ -E_1 - m_1.l_1^2 & 0 & C_1 + m_1.l_1^2 \end{bmatrix}_{B_1}$
C)	D)
$\begin{bmatrix} A_1 + m_1.l_1^2 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 + m_1.l_1^2 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 + m_1.l_1^2 \end{bmatrix}_{B_1}$	$\begin{bmatrix} A_1 + m_1.l_1^2 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 + m_1.l_1^2 \end{bmatrix}_{B_1}$

Pour la suite, on considère que la matrice d'inertie du bras 1 en  $O$ , dans la base  $B_1$  s'écrit

$$\bar{I}(1, O) = \begin{bmatrix} A_1' & 0 & -E_1' \\ 0 & B_1' & 0 \\ -E_1' & 0 & C_1' \end{bmatrix}_{B_1}$$

**Question 15.** Exprimer le moment cinétique du bras 1 dans son mouvement par rapport à  $O$  au point  $O$  dans la base  $B_1$ , noté  $\overrightarrow{\sigma_{O,1/O}}$ .

A)	B)	C)	D)
$(A_1' - E_1') \cdot \dot{\alpha} \cdot \bar{x}_1$	$B_1' \cdot \dot{\alpha} \cdot \bar{y}_1 + m_1.l_1^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \bar{x}_1$	$A_1' \cdot \dot{\alpha} \cdot \bar{x}_1$	$B_1' \cdot \dot{\alpha} \cdot \bar{y}_1$

Pour la suite, on considère que la matrice d'inertie de la nacelle 2 en  $G_2$ , dans la base  $B_1$  s'écrit

$$\bar{I}(2, G_2) = \begin{bmatrix} A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta & 0 & \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot (C_2 - A_2) \\ 0 & B_2 & 0 \\ \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot (C_2 - A_2) & 0 & A_2 \cdot \sin^2 \beta + C_2 \cdot \cos^2 \beta \end{bmatrix}_{B_1}$$

**Question 16.** Exprimer le moment cinétique de 2 dans son mouvement par rapport à  $O$  au point  $O$ , noté  $\overrightarrow{\sigma_{O,2/O}}$  dans la base  $B_1$ .

A)	$A_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \bar{x}_1 + B_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \bar{y}_1$
B)	$(A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta + (C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta) \cdot \dot{\alpha} \cdot \bar{x}_1 + B_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \bar{y}_1$
C)	$(A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta + (C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta + m_2.l_2^2) \cdot \dot{\alpha} \cdot \bar{x}_1 + B_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \bar{y}_1$
D)	$(A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta + (C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta) \cdot \dot{\alpha} \cdot \bar{x}_1$

Question 17. En déduire le torseur cinétique de l'ensemble E par rapport à 0 au point O, noté  $\{\mathcal{C}_{E/0}\}_O$ .

- A)  $\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ (A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta + (C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta + m_2 J_2^2) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + B_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\}_O$
- B)  $\left\{ \begin{array}{c} (m_1 + m_2) \cdot a_E \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 \\ (A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta + (C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta + m_2 J_2^2) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + B_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\}_O$
- C)  $\left\{ \begin{array}{c} (m_1 + m_2) \cdot a_E \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 \\ (A_2 \cdot \cos^2 \beta + C_2 \cdot \sin^2 \beta + (C_2 - A_2) \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + B_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\}_O$
- D)  $\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ A_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1 + B_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\}_O$

## II DÉTERMINATION DE LA LOI DE MOUVEMENT

Question 18. Exprimer le torseur dynamique de E dans son mouvement par rapport à 0 au point O sans calculer le moment dynamique, noté  $\{\mathcal{D}_{E/0}\}_O$ .

Attention : il faut tout de même vérifier si l'expression du moment dynamique est la bonne

- A)  $\left\{ \begin{array}{c} (m_1 + m_2) \cdot a_E \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{\delta_{0,2/1}} + \overrightarrow{\delta_{0,1/0}} \end{array} \right\}_O$
- B)  $\left\{ \begin{array}{c} (m_1 + m_2) \cdot (a_E \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 - a_E \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{y}_1) \\ \overrightarrow{\delta_{0,2/0}} + \overrightarrow{\delta_{0,1/0}} \end{array} \right\}_O$
- C)  $\left\{ \begin{array}{c} (m_1 + m_2) \cdot a_E \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{\delta_{0,2/1}} + \overrightarrow{\delta_{0,1/0}} \end{array} \right\}_O$
- D)  $\left\{ \begin{array}{c} (m_1 + m_2) \cdot (a_E \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 - a_E \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{y}_1) \\ \overrightarrow{\delta_{0,2/1}} + \overrightarrow{\delta_{0,1/0}} \end{array} \right\}_O$

On admet pour la suite de cette partie que le moment dynamique  $\overrightarrow{\delta_{0,E/0}}$  s'écrit :

$$\overrightarrow{\delta_{0,E/0}} = \begin{pmatrix} \mu_0 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} + \mu_1 \cdot \ddot{\alpha} \\ \rho_0 \cdot \dot{\alpha}^2 \\ \eta_0 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} + \eta_1 \cdot \ddot{\alpha} \end{pmatrix}_{B_1}$$

On notera  $C_m$  le couple généré par l'actionneur dans la liaison pivot entre 0 et 1, tel que  $\overrightarrow{C_m} = C_m \cdot \vec{x}_0$ .

**Question 19. Faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées sur l'ensemble E.**

<b>A)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Action de 0 sur E en O ;</li> <li>✓ Action de l'actionneur en O ;</li> <li>✓ Action de 1 sur E en O.</li> </ul>
<b>B)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Action de l'actionneur en O ;</li> <li>✓ Action de 1 sur E en O.</li> </ul>
<b>C)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Action de 2 sur E en O ;</li> <li>✓ Action de 1 sur E en O.</li> </ul>
<b>D)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Action de 0 sur E en O ;</li> <li>✓ Action de l'actionneur en O.</li> </ul>

**Question 20. La loi de mouvement de l'ensemble E est**

<b>A)</b>	$\mu_0 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} + \mu_1 \cdot \ddot{\alpha} = C_m - (m_1 + m_2) \cdot a_E \cdot \cos \alpha \cdot g$
<b>B)</b>	$\mu_0 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} + \mu_1 \cdot \ddot{\alpha} = C_m$
<b>C)</b>	$\eta_0 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} + \eta_1 \cdot \ddot{\alpha} = C_m - (m_1 + m_2) \cdot a_E \cdot \cos \alpha \cdot g$
<b>D)</b>	$\rho_0 \cdot \dot{\alpha}^2 = C_m$

Le calcul complet montre que les 3 composantes du moment de la liaison pivot entre 0 et 1 sont non nulles, et dépendent notamment des paramètres inertiels des solides et des vitesses et accélérations angulaires.

**Question 21. Quel nom donne-t-on à cet effet physique ?**

<b>A)</b>	<b>B)</b>	<b>C)</b>	<b>D)</b>
Gyroscopique	Tunnel	Centripète	<b>Golem</b>

(à méditer avant les concours !)

**Question 22. Quelle conséquence cet effet produira, à termes, sur la liaison pivot entre 0 et 1 ?**

<b>A)</b>	<b>B)</b>	<b>C)</b>	<b>D)</b>
Une usure prématurée des éléments de guidage en rotation	Aucune	L'apparition de mouvements parasites au niveau de la nacelle	L'apparition de mouvements parasites au niveau du bras