Outils mathématiques pour la Physique-Chimie

Résumé
Ce document récapitule les outils mathématiques usuels en physique-chimie. **Il est important de le connaître par cœur avant la rentrée !** Vous pourrez vous y référer en cas "d'oubli" en cours d'année, gardez-le en permanence dans vos affaires.

1 Périmètres, surfaces et volumes usuels

Figures usuelles

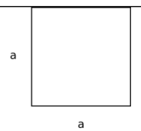
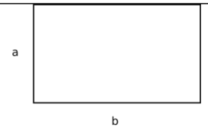
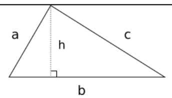
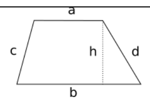
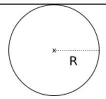
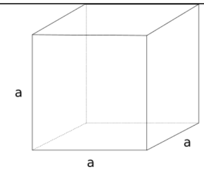
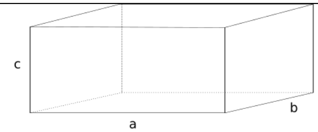
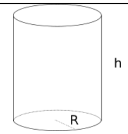
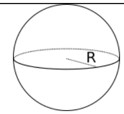
Figure	Représentation	Périmètre P	Surface S
Carré		$4a$	a^2
Rectangle		$2 \times (a + b)$	$a \times b$
Triangle		$a + b + c$	$\frac{b \times h}{2}$
Trapèze		$a + b + c + d$	$\frac{(a + b) \times h}{2}$
Cercle		$2\pi R$	πR^2

Figure	Représentation	Surface S	Volume V
Cube		$6a^2$	a^3
Pavé		$2 \times (ab + bc + ac)$	$a \times b \times c$
Cylindre		$2\pi Rh$	$\pi R^2 h$
Sphère		$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$

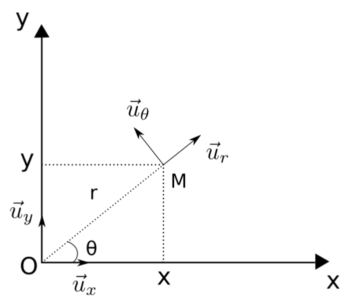
Éléments de surface et de volume

Base cartésienne et base polaire

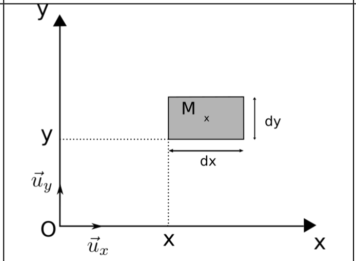
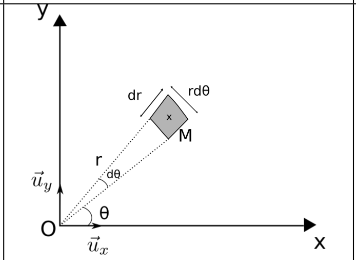
Soit un point M d'un plan. Les coordonnées de M sont un couple de nombres permettant de repérer le point M dans le plan. Deux repères peuvent être utilisés pour cela :

- le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$: le point M est repéré par les coordonnées cartésiennes $M(x, y)$;
- le repère polaire $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, attaché au point M : le point M est repéré par les coordonnées polaires $M(r, \theta)$.

La figure ci-contre illustre les deux repères du plan et précise les définitions des couples (x, y) et (r, θ). On remarquera que $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$.



Un élément de surface $\mathrm{d}S$ est une portion infiniment petite du plan, centrée autour du point M. Son expression dépend du repère de travail :

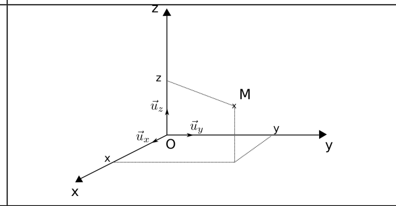
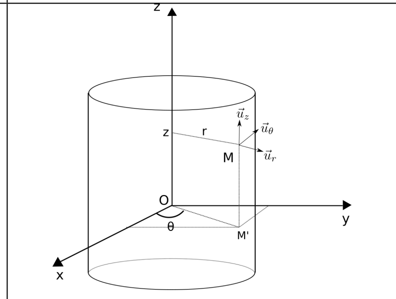
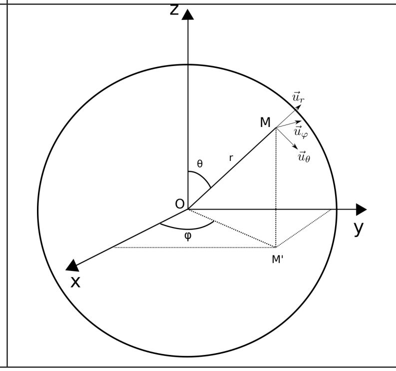
Repère	Figure	Élément de surface $\mathrm{d}S$
Cartésien		$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
Polaire		$\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta$

Bases cartésienne, cylindrique et sphérique

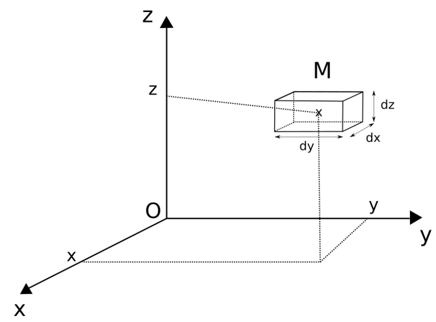
Soit un point M de l'espace. Les coordonnées de M sont un ensemble de trois nombres permettant de repérer le point M dans l'espace. Trois repères peuvent être utilisés pour cela :

- le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, vecu_z)$: le point M est repéré par les coordonnées cartésiennes $M(x, y, z)$;
- le repère cylindrique (ou cylindro-polaire) $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, attaché au point M : le point M est repéré par les coordonnées cylindriques $M(r, \theta, z)$;
- le repère sphérique $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, attaché au point M : le point M est repéré par les coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi)$.

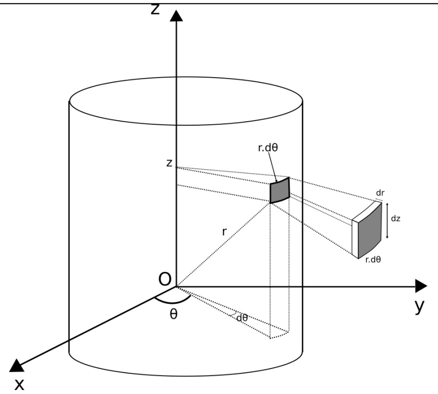
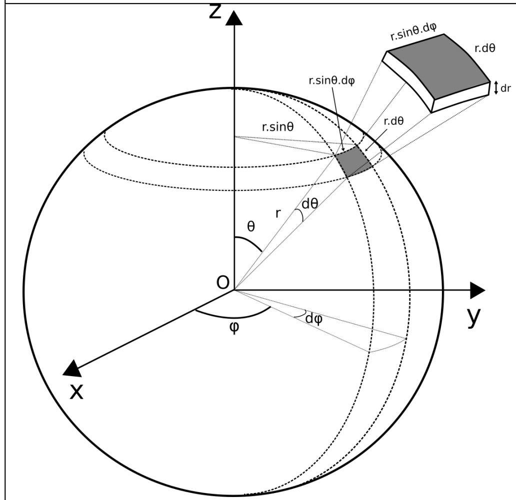
Le tableau ci-dessous illustre ces trois repères et les coordonnées associées au point M. Les ensembles de définition des coordonnées sont précisées dans la dernière colonne.

Repère	Figure	Ensembles de définition
Cartésien		$(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
Cylindrique		$(r, \theta, z) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$
Sphérique		$(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$

Un élément de volume est un volume infinitésimal centré autour du point M. Un élément de volume en géométrie cartésienne a pour expression : $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. L'élément de surface dépend de la surface considérée ($\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ ou $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$).



Les éléments de surface et de de volume pour un cylindre et une sphère sont donnés dans le tableau ci-dessous :

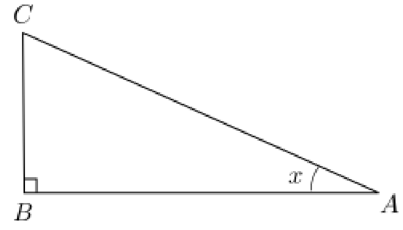
<table>
<tr><th>Figure</th><th>Éléments de surface $\mathrm{d}S$ et de volume $\mathrm{d}\tau$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
$\mathrm{d}\tau = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\mathrm{d}S = r^2\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$
$\mathrm{d}\tau = r^2\mathrm{d}r\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$</td></tr>
</table>

2 Trigonométrie

Définitions de cosinus, sinus et tangente

Dans un triangle rectangle :

- $\cos(x) = \dfrac{AB}{AC}$
- $\sin(x) = \dfrac{BC}{AC}$
- $\tan(x) = \dfrac{BC}{AB}$

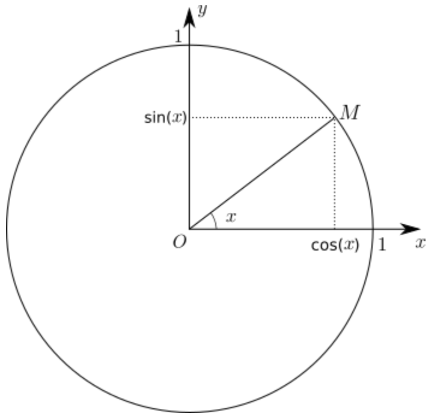


Cercle trigonométrique

Il s'agit du cercle de rayon unité. Les valeurs des cosinus et sinus des angles formés entre le rayon OM et la demi-droite (Ox) sont lues sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement.

Valeurs remarquables :

Angle x (rad/degré)	$\cos(x)$	$\sin(x)$
0 rad / $0°$	1	0
$\dfrac{\pi}{6}$ rad / $30°$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{\pi}{4}$ rad / $45°$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\dfrac{\pi}{3}$ rad / $60°$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\dfrac{\pi}{2}$ rad / $90°$	0	1
π rad / $180°$	-1	0



Relations trigonométriques

- En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $\text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

À l'aide du cercle trigonométrique :

- $\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$; $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$; $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$; $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Soit a, b, p et q des angles réels :

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$;

On en déduit les relations : $\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$ et $\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$.

3 Fonctions usuelles

Fonctions hyperboliques

- $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\tanh(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$;
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Fonctions logarithme et exponentielle

- $e^{x+y} = e^x e^y$; $e^{xy} = (e^x)^y = (e^y)^x$;
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$; $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; $\ln(x^\alpha) = \alpha\ln(x)$;
- $\ln(e) = 1$; $\ln(1) = 0$; $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ donc $\log(10^x) = x$.

Fonction puissance

$x^0 = 1$; $x^{a+b} = x^a x^b$; $x^{a-b} = x^a x^{-b} = \dfrac{x^a}{x^b}$; $x^{ab} = (x^a)^b = \left(x^b\right)^a$

Dérivées et primitives

- $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$; $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;
- $\dfrac{\mathrm{d}(\sin(x))}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}(\cos(x))}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}(\tan(x))}{\mathrm{d}x} = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$; $\dfrac{\mathrm{d}(\text{cotan}(x))}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$;
- $\dfrac{\mathrm{d}(\cosh(x))}{\mathrm{d}x} = \sinh(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}(\sinh(x))}{\mathrm{d}x} = \cosh(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}(\tanh(x))}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$;
- $\dfrac{\mathrm{d}(x^n)}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$; $\dfrac{\mathrm{d}(e^{u(x)})}{\mathrm{d}x} = u'(x)e^{u(x)}$; $\dfrac{\mathrm{d}(\ln(u(x)))}{\mathrm{d}x} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$; $\dfrac{\mathrm{d}(\sqrt{u(x)})}{\mathrm{d}x} = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Formule de Taylor-Young : fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots$$

Développements limités

Développements limités autour de 0 à l'ordre 1

- $(1 \pm x)^\alpha = 1 \pm \alpha x + \circ(x)$;
- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \circ(x)$;
- $\ln(1+x) = x + \circ(x)$

Développements limités autour de 0 à l'ordre 2

- $\sin(x) = x + \circ(x^2)$;
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$;
- $\tan(x) = x + \circ(x^2)$

4 Intégrale et équations différentielles

Valeurs moyennes et efficaces

La **valeur moyenne** d'une fonction $s(t)$ périodique et de période T, aussi appelée fonction T-périodique, est : $\langle s(t) \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t$.

On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, la pulsation du signal T-périodique. Les valeurs moyennes des fonctions suivantes sont à connaître :

Fonction	Valeur moyenne
$\cos(\omega t)$	0
$\sin(\omega t)$	0
$\sin^2(\omega t)$	$0,5$
$\cos^2(\omega t)$	$0,5$
$\cos(\omega t)\sin(\omega t)$	0

La valeur efficace S_{eff} de la fonction $s(t)$ T-périodique est :

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\mathrm{d}t}.$$

Pour un signal sinusoïdal **uniquement** : si $s(t) = S_0\cos(\omega t + \varphi)$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$), alors $S_{eff} = \dfrac{S_0}{\sqrt{2}}$.

Équations différentielles

Équations différentielles homogènes usuelles

Quatre équations différentielles (ED) à coefficients constante et à second membre nul, ou ED homogènes, sont à savoir identifier et résoudre sans hésitation :

- Premier ordre : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha x(t) = 0 \Rightarrow x(t) = x_0\mathrm{e}^{-\alpha t}$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) ;
- Oscillateur harmonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. C'est une fonction périodique de période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. La solution peut aussi s'écrire $x(t) = A_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$. A, B, A_0 et φ sont des constantes ;
- $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \omega_0^2 x(t) = 0 \Rightarrow x(t) = A\cosh(\omega_0 t) + B\sinh(\omega_0 t) = A_0\mathrm{e}^{\omega_0 t} + B_0\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$;
- Oscillateur amorti : $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = 0$:

Pour résoudre cette dernière équation, il faut passer par l'équation caractéristique : $r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$, de discriminant $\Delta = 4\alpha^2 - 4\omega_0^2$. Les racines r_1 et r_2 dépendent du signe de Δ. Les différents cas sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Signe	Racines	Solution	Type de régime
$\Delta > 0$	$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ $r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$	$x(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$	Apériodique
$\Delta = 0$	$r = -\alpha$	$x(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\alpha t}$	Critique
$\Delta < 0$	$r_1 = -\alpha + i\omega$ $r_2 = -\alpha - i\omega$	$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$	Pseudo-périodique

Dans le cas du régime pseudo-périodique, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ est nommée la pseudo-pulsation. α caractérise la vitesse à laquelle la fonction $x(t)$ s'atténue : c'est le coefficient d'amortissement.

Équations différentielles avec second membre

Soit $f(t) \neq 0$ le second membre des ED précédentes : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha x(t) = f(t)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = f(t)$. La solution générale de ces équations est de la forme $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, avec $x_h(t)$ la solution de l'équation homogène associée et $x_p(t)$ une solution particulière. La méthode générale de résolution demande à respecter les étapes suivantes :

1. déterminer $x_h(t)$;
2. déterminer $x_p(t)$: cette solution vérifie l'ED. Sa détermination dépend de la forme de $f(t)$:
   - si $f(t)$ est une constante, $x_p(t)$ est aussi une constante ;
   - si $f(t)$ est une fonction harmonique, par exemple $f(t) = f_0\cos(\omega t + \varphi)$, alors $x_p(t)$ est aussi une fonction harmonique : $x_p(t) = X_0\cos(\omega_0 t + \phi)$. On passe souvent dans le domaine complexe pour obtenir $x_p(t)$;
   - les autres cas demandent d'utiliser les outils développés en cours de mathématiques (méthode de variation de la constante, par exemple).
3. on finit par déterminer les constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales **pour la solution complète, i.e.** $x(t)$.

En présence d'un second membre non nul, on veillera à ne **jamais** utiliser les conditions initiales sur la solution homogène uniquement !

5 Analyse vectorielle

Produit scalaire entre deux vecteurs

Les relations ci-dessous sont exprimées dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, mais les résultats se généralisent pour toute autre base orthonormée (base polaire, cylindrique, sphérique).

Produit scalaire : soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs dont les composantes dans la base d'étude sont $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$. Alors : $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$.

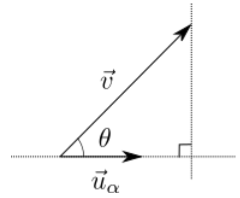
Le produit scalaire est symétrique et bilinéaire.

Norme d'un vecteur : $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

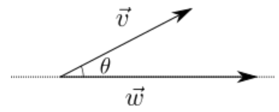
Interprétation géométrique du produit scalaire : le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{w}$ est la projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ sur la droite portée par le vecteur $\vec{w}$.

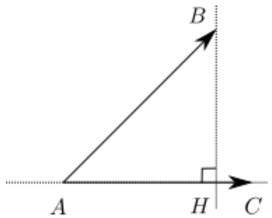
Il arrive très fréquemment en physique de devoir projeter des vecteurs dans une base donnée (quand on applique par exemple le principe fondamental de la dynamique, le théorème du moment cinétique...). Cette opération consiste à réaliser le produit scalaire entre les vecteurs étudiés (force, moment cinétique...) et les vecteurs unitaires de la base d'étude.

Exemple : Soit $\vec{u}_\alpha$ un vecteur unitaire. La composante v_α du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}_\alpha$ est $v_\alpha = \vec{v} \cdot \vec{u}_\alpha = \|\vec{v}\|\cos(\theta)$ avec θ l'angle formé par $\vec{v}$ et $\vec{u}_\alpha$.

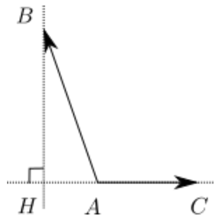


Projection entre deux vecteurs :
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos(\theta)$ avec θ l'angle formé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.





$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= AH \times AC > 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= -AH \times AC < 0\end{aligned}$$

Produit vectoriel entre deux vecteurs

Produit vectoriel : $\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}$

Le produit vectoriel est antisymétrique et bilinéaire .

Propriétés :

- deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$;
- dans le cas où $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires ,$\vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur perpendiculaire à la fois au vecteur $\vec{v}$ et au vecteur $\vec{w}$, donc au plan constitué de ces deux vecteurs. Le sens du produit vectoriel se trouve à l'aide de la règle de main droite : pouce selon $\vec{v}$, index selon $\vec{w}$, alors le majeur donne le sens du produit vectoriel ;
- $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\sin(\vec{v}, \vec{w})$