Calculs de modules et d'arguments

q1- $\begin{cases} |g_1| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \\ \arg(g_1) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}464 \text{ rad}. \end{cases}$

q2- $\begin{cases} |g_2| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} \\ \arg(g_2) = \arctan\left(\frac{-1}{2}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0{,}464 \text{ rad} \end{cases}$

q3- $\begin{cases} |g_3| = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \arg(g_3) = \arg(1) - \arg(2+j) = -\arg(2+j) = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0{,}464 \text{ rad}. \end{cases}$

q4- $\begin{cases} |g_4| = \frac{|\alpha|}{2} \quad \text{car } |e^{j\theta}| = 1 \ \forall \theta \in \mathbb{R}. \\ \arg(g_4) = \arg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \arg\left(e^{j\pi/4}\right) = \arg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Or $\arg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ si $\alpha > 0$ et $\arg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pi$ si $\alpha < 0$.

Ainsi : $\arg(g_4) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } \alpha \geq 0 \\ -3\pi/4 & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$

Rq : • le module de $\underline{z} \in \mathbb{C}$ est toujours positif ;
• $\arg(\underline{z}) \in [-\pi ; \pi]$ modulo 2π.

q5- $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$; $\arg(\underline{H}) = \begin{cases} \pi - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) & \text{pour } H_0 > 0 \\ -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) & \text{pour } H_0 < 0 \end{cases}$

q6- • $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$;

• Pour $H_0 > 0$: $\arg(\underline{H}) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\omega/(Q\omega_0)}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right) & \text{pour } \omega < \omega_0 \\ -\pi - \arctan\left(\frac{\omega/(Q\omega_0)}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right) & \text{pour } \omega > \omega_0 \end{cases}$

• Pour $H_0 < 0$: rajouter un déphasage de $\pm\pi$ aux résultats précédents de sorte que $\arg(\underline{H}) \in [-\pi ; \pi]$.

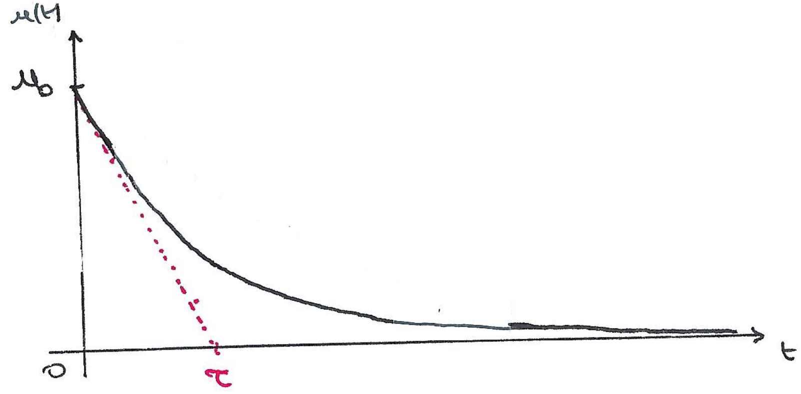
q7- • $|\underline{H}| = \frac{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}} = 1$

• $\arg(\underline{H}) = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

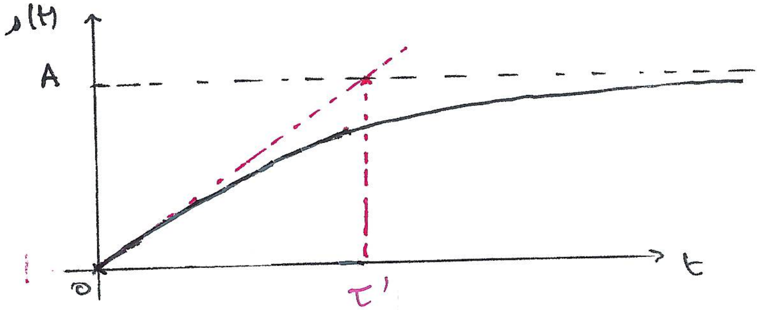
$\Rightarrow \arg(\underline{H}) = -2\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

Représentation graphiques

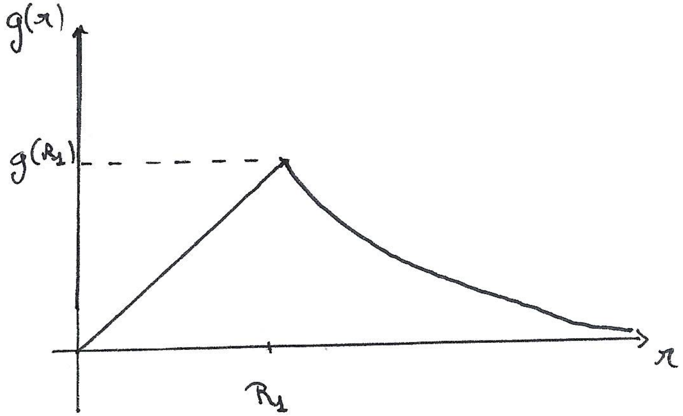
q1-



q2-



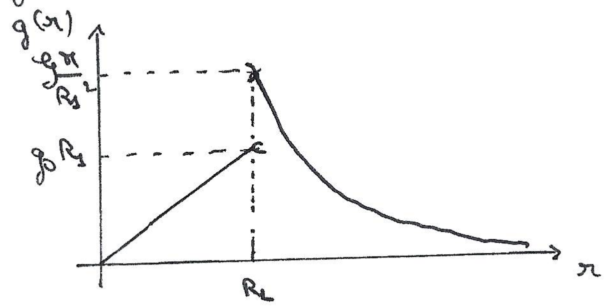
q3-



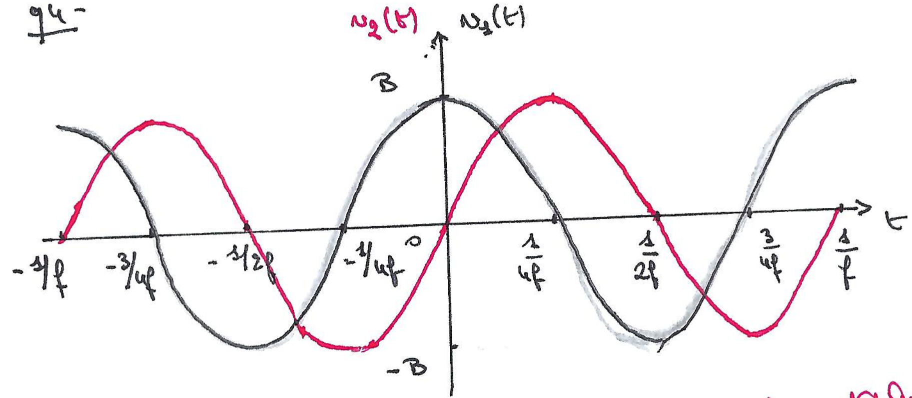
Hypothèse : $g(r)$ est une fonction continue, donc $g_0 R_1 = \frac{\mathcal{G}M}{R_1^2}$

soit $g_0 = \frac{\mathcal{G}M}{R_1^3}$

Rq : si $g(r)$ est discontinue en R_1 et $\frac{\mathcal{G}M}{R_1^2} > g_0 R_1$:



q4-

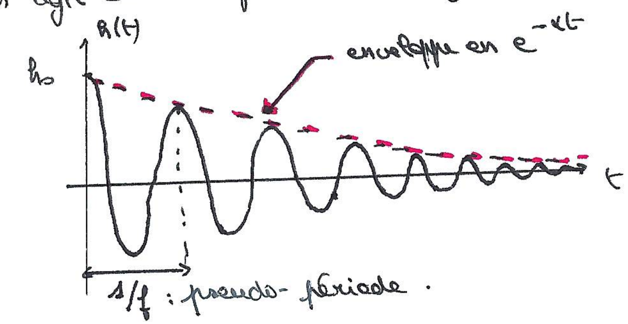


Note : les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont donc déphasées l'une par rapport à l'autre. On dit que $\sin(x)$ est en retard de phase par rapport à $\cos(x)$. Ce retard est de $\pi/2$:

$$\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$$

ou $$\cos(x - \pi/2) = \sin(x).$$

q5- Il s'agit de la représentation graphique d'un régime pseudopériodique :



Intégrales simples

q1- $I_1 = \int_0^T \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) dt = \frac{T}{2\pi}\left[\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right]_0^T$

$\Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{T}{2\pi}\left(\sin(2\pi) - \sin(0)\right) = 0}$

Rq : la moyenne de la fonction $\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ sur une période T est donc : $\left\langle \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)dt = \frac{I_1}{T} = 0.$

q2- $I_2 = \int_0^T \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)dt = -\frac{T}{2\pi}\left[\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right]_0^T$

$\Rightarrow \boxed{I_2 = -\frac{T}{2\pi}\left(\cos(2\pi) - \cos(0)\right) = 0}.$

La moyenne de $\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ est donc également nulle.

q3- $I_3 = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(2\pi\frac{t}{T}\right)dt.$

On sait que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, donc :

$I_3 = \frac{1}{T}\left[\int_0^T \frac{1}{2}dt - \int_0^T \frac{\cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)}{2}dt\right]$

$\Rightarrow I_3 = \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2} - \frac{T}{8\pi}\left[\sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right)\right]_0^T\right]$

$\Rightarrow I_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi}\left(\sin(4\pi) - \sin(0)\right)$

$\Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{1}{2}}.$

q4- $I_4 = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt$

De la même manière qu'en q3, en remarquant que $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

on obtient :

$\boxed{I_4 = \frac{1}{2}}.$

On retiendra que les moyennes des fonctions $\cos^2\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ et $\sin^2\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ sont donc $\frac{1}{2}$.

q5- $I_5 = \int_0^\pi \sin^3(\theta)d\theta = \int_0^\pi \sin^2(\theta)\sin(\theta)d\theta$

On pose $X = \cos(\theta)$. On a alors :

$$\begin{cases} \sin^2(\theta) = 1-\cos^2(\theta) = 1 - X^2 \\ dX = -\sin(\theta)\,d\theta. \end{cases}$$

Ainsi : $I_5 = -\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} (1-X^2)\,dX = \int_{-1}^{1}(1-X^2)\,dX$

$\Rightarrow I_5 = \left[X - \frac{X^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow \boxed{I_5 = \frac{4}{3}}.$

q6- $I_6 = \int_0^a \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+a^2)\right]_0^a = \frac{1}{2}\left(\ln(2a^2) - \ln(a^2)\right)$

$\Rightarrow \boxed{I_6 = \frac{1}{2}\cdot\ln(2)}.$

Rappel : $\begin{cases} \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \\ \ln(a^b) = b\,\ln(a). \end{cases}$

q7- $I_7 = \int_0^a \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+a^2}\right]_0^a = \sqrt{2a^2} - \sqrt{a^2}$

$\Rightarrow \boxed{I_7 = a\left(\sqrt{2}-1\right)}$

q8- $I_8 = \int_0^h z e^{-z/H}\,dz$

On pose $\begin{cases} u = z \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-z/H} \Rightarrow v = -He^{-z/H} \end{cases}$

Ainsi, par intégration par parties :

$I_8 = \left[-zHe^{-z/H}\right]_0^h + H\int_0^h e^{-z/H}\,dz$

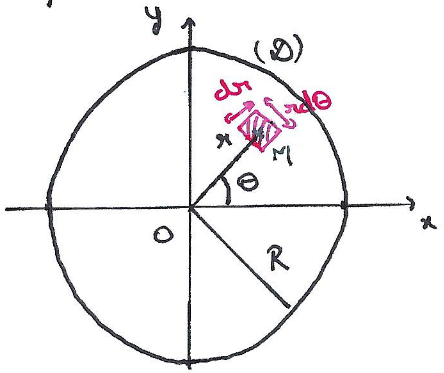
$\Rightarrow I_8 = -hHe^{-h/H} - H^2\left[e^{-z/H}\right]_0^h$

$\Rightarrow I_8 = -hHe^{-h/H} - H^2e^{-h/H} + H^2$

$\Rightarrow \boxed{I_8 = H^2 - H(h+H)\,e^{-h/H}}$

Intégrales de surface et de volume

q1 - Élément de surface d'un disque : $dS = r\,dr\,d\theta$



Surface du disque :

$$S_D = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow S_D = \int_0^R r\,dr \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{S_D = \frac{R^2}{2} \times 2\pi = \pi R^2}.$$

q2 - On cherche la surface latérale du cylindre :

$$\boxed{S_{lat} = \int_0^{2\pi}\int_0^{H} R\,d\theta\,dz = R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{H} dz = 2\pi R H}$$

q3 - Surface d'une sphère de rayon R :

$$S_{sph} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^2 \sin(\theta)\,d\theta\,d\varphi$$

$$\Rightarrow S_{sph} = R^2 \times \int_0^{\pi} \sin(\theta)\,d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\Rightarrow S_{sph} = R^2 \left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi} \times 2\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{sph} = 4\pi R^2}$$

⚠ $\varphi \in [0; 2\pi]$ et $\theta \in [0; \pi]$: si l'on prend $\theta \in [0; 2\pi]$, la surface de la sphère est parcourue deux fois.

q4 - Volume d'un cylindre : $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$

$$V_{cyl} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$\Rightarrow V_{cyl} = \int_0^R r\,dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^H dz$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{cyl} = \frac{1}{2}R^2 \times 2\pi \times H = \pi R^2 H}$$

q5 - Volume d'une sphère : $dV = r^2 \sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$$V_{sph} = \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\Rightarrow V_{sph} = \int_0^R r^2\,dr \times \int_0^{\pi} \sin(\theta)\,d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{sph} = \frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Calculs de dérivées

q1 - $$\frac{d(\sin(\theta))}{dt} = \cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

q2 - $$\frac{d}{dx}\left(f^\alpha(x)\right) = \alpha f^{\alpha-1}(x)\frac{df}{dx}.$$

q3 - $$\frac{d}{dt}\left(e^{f(t)}\right) = e^{f(t)} \times \frac{df}{dt}$$

q4 - a - $$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin(kx+\phi_0)\right) = \frac{d}{dx}\left(k\cos(kx+\phi_0)\right)$$

$$= -k^2\sin(kx+\phi_0).$$

b - $$\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{j\omega t}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)\times j\omega$$

$$= e^{j\omega t}\times (j\omega)^2$$

$$= -\omega^2 e^{j\omega t}$$

c - $$\frac{d^2}{dx^2}\left(\ln\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} \times \frac{2x}{a^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x^2+a^2}\right) \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$= \frac{2(x^2+a^2) - 2x\times 2x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{2a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^2}$$

q5 - $$m(t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi D t}}\, e^{-A/4Dt} \qquad (uv)' = u'v+uv'$$

$$\frac{dm}{dt}(t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi D}}\left[-\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-A/4Dt} + \frac{1}{\sqrt{t}}\times e^{-A/4Dt}\times\frac{A}{4Dt^2}\right]$$

Rappel : $\frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)' = \left(t^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}t^{-3/2} = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt}(t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi D}}\times e^{-A/4Dt}\left[\frac{A}{4Dt^2\sqrt{t}} - \frac{1}{2t\sqrt{t}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dm}{dt}(t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi D t}}\times\frac{e^{-A/4Dt}}{2t}\left[\frac{A}{2Dt} - 1\right]}$$

q6 - $$V(z) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\sqrt{z^2+a^2} - z\right)$$

$$\boxed{\frac{dV}{dz}(z) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon a^2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - 1\right)}$$

q7 - On cherche Q et $\omega = \omega_r$ tels que :

$$\left(\frac{dG}{d\omega}\right)_{\omega_r} = 0$$

Or : $$\left(\frac{dG}{d\omega}\right)_{\omega_r} = -\frac{H_0}{2\left(\left(1-\frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega_r}{Q\omega_0}\right)^2\right)^{3/2}} \times \left[2\left(1-\frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right)\times\left(-\frac{2\omega_r}{\omega_0^2}\right) + 2\left(\frac{\omega_r}{Q\omega_0}\right)\times\frac{1}{Q\omega_0}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dG}{d\omega}\right)_{\omega_r} = -\frac{H_0\,\omega_r}{\left(\left(1-\frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega_r}{Q\omega_0}\right)^2\right)^{3/2}} \times \left[\frac{1}{Q^2\omega_0^2} - \frac{2}{\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right)\right]$$

$$\left(\frac{dG}{d\omega}\right)_{\omega_r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{Q^2\omega_0^2} - \frac{2}{\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{2Q^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_r^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}$$

Or $\omega_r \in \mathbb{R}$, donc il faut Q tel que $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$. Ainsi :

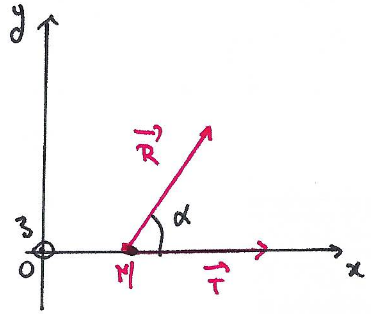
$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

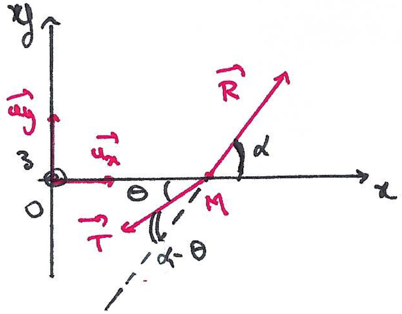
Calcul vectoriel

q1-



$$\begin{cases} \vec{T}\cdot\vec{R} = TR\cos(\alpha) \\ \vec{T}\wedge\vec{R} = TR\sin(\alpha)\,\vec{u_z} \end{cases}$$

avec $\vec{u_z}$ le vecteur unitaire porté par l'axe (Oz)



. $\boxed{\vec{T}\cdot\vec{R} = -TR\cos(\alpha-\theta)}$

. Pour calculer $\vec{T}\wedge\vec{R}$, on exprime $\vec{T}$ et $\vec{R}$ dans le repère $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$:

$$\begin{cases} \vec{T} = -T\cos(\theta)\vec{u_x} - T\sin(\theta)\vec{u_y} \\ \vec{R} = R\cos(\alpha)\vec{u_x} + R\sin(\alpha)\vec{u_y} \end{cases}$$

Ainsi : $\vec{T}\wedge\vec{R} = -TR\cos(\theta)\sin(\alpha)(\vec{u_x}\wedge\vec{u_y}) - TR\sin(\theta)\cos(\alpha)(\vec{u_y}\wedge\vec{u_x})$

Rappel : $\vec{u_x}\wedge\vec{u_x} = \vec{u_y}\wedge\vec{u_y} = \vec{0}$.

$$\vec{T}\wedge\vec{R} = -TR\left[\cos(\theta)\sin(\alpha)\,\vec{u_z} - \sin(\theta)\cos(\alpha)\,\vec{u_z}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{T}\wedge\vec{R} = -TR\sin(\theta-\alpha)\,\vec{u_z}$$

ou $\boxed{\vec{T}\wedge\vec{R} = TR\sin(\alpha-\theta)\,\vec{u_z}}$

Rq : on peut également calculer $\vec{T}\cdot\vec{R}$ à partir de la décomposition de $\vec{T}$ et $\vec{R}$ dans $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$; en remarquant que $\vec{u_x}\cdot\vec{u_y} = 0$:

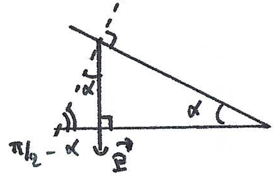
$$\vec{T}\cdot\vec{R} = -TR\cos(\theta)\cos(\alpha) - TR\sin(\theta)\sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \vec{T}\cdot\vec{R} = -TR\left[\cos(\theta)\cos(\alpha) + \sin(\theta)\sin(\alpha)\right] = -TR\cos(\alpha-\theta)$$

On retrouve l'expression obtenue par analyse géométrique.

q2- On écrit chaque vecteur dans le repère $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$:

$$\begin{cases} \vec{N} = N\vec{u_y} \ ; \ \vec{T} = -T\vec{u_x} \\ \vec{F} = F\cos(\beta)\vec{u_x} + F\sin(\beta)\vec{u_y} \\ \vec{P} = +P\sin(\alpha)\vec{u_x} - P\cos(\alpha)\vec{u_y} \end{cases}$$

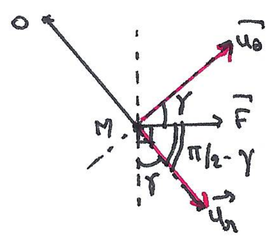


Ainsi :

$$\boxed{\vec{N}+\vec{T}+\vec{F}+\vec{P} = \left(-T + F\cos(\beta) + P\sin(\alpha)\right)\vec{u_x} + \left(N + F\sin(\beta) - P\cos(\alpha)\right)\vec{u_y}}$$

q3- De même :

$$\begin{cases} \vec{T} = -T\vec{u_r} \\ \vec{P} = P\cos(\gamma)\vec{u_r} - P\sin(\gamma)\vec{u_\theta} \\ \vec{F} = F\sin(\gamma)\vec{u_r} + F\cos(\gamma)\vec{u_\theta} \end{cases}$$



On note également : $\vec{OM} = a\vec{u_r}$.

En écriture matricielle dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \vec{P} = \begin{pmatrix} P\cos(\gamma) \\ -P\sin(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} ; \ \vec{F} = \begin{pmatrix} F\sin(\gamma) \\ F\cos(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{T}+\vec{P}+\vec{F} = \begin{pmatrix} -T + P\cos(\gamma) + F\sin(\gamma) \\ -P\sin(\gamma) + F\cos(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

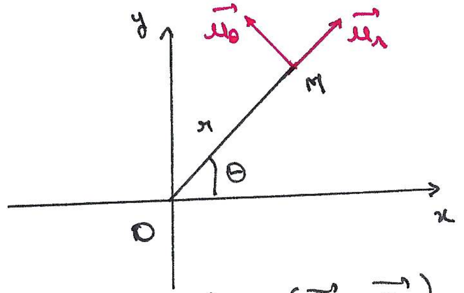
$$\vec{OM}\wedge\vec{T} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \ ; \quad \vec{OM}\wedge\vec{P} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P\cos(\gamma) \\ -P\sin(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OM}\wedge\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -aP\sin(\gamma) \end{pmatrix} = -aP\sin(\gamma)$$

. $\vec{OM}\wedge\vec{F} = aF\cos(\gamma)\,\vec{u_z}$.

Cinématique en coordonnées polaires

q1- Schéma :



La base de travail est la base $(\vec{u_r} ; \vec{u_\theta})$.

q2- On a : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$. On suppose que les grandeurs r et θ dépendent du temps t, et on pose $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ et $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$:

* $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u_r}) = \dot{r}\vec{u_r} + r\frac{d\vec{u_r}}{dt}$

Or $\begin{cases} \vec{u_r} = \cos(\theta)\vec{u_x} + \sin(\theta)\vec{u_y} \\ \vec{u_\theta} = -\sin(\theta)\vec{u_x} + \cos(\theta)\vec{u_y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{u_r}}{dt} = -\sin(\theta)\dot{\theta}\vec{u_x} + \dot{\theta}\cos(\theta)\vec{u_y} \\ \frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{u_x} - \dot{\theta}\sin(\theta)\vec{u_y} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \frac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\vec{u_\theta} \\ \frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u_r} \end{cases}}$$

Donc : $\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}}$.

* $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{u_r} + \dot{r}\frac{d\vec{u_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u_\theta}}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u_\theta}}$$

q3- Dans le cas d'un mouvement circulaire et uniforme :

$\begin{cases} r = \text{constante} \Rightarrow \dot{r} = 0 \text{ et } \ddot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \text{constante} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$

Ainsi, en posant $r = R = $ constante :

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\vec{u_r} \\ \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta} \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r} \end{cases}}$$ avec $v = \|\vec{v}\| = R\dot{\theta}$.