Exercices : outils mathématiques

Consigne

Les exercices ci-dessous sont des exercices d'entraînement. Il faut impérativement être en mesure de réaliser ces calculs avant la rentrée. Vous pouvez vous aider du formulaire pour répondre à certains exercices.

Dans tous les exercices, j désigne le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$.

1 Calculs de modules et d'arguments

Calculer les modules et arguments des nombres complexes suivants, sachant que H_0, ω, ω_0 et Q sont des grandeurs réelles.

Q1. $\underline{g}_1 = 2 + j$

Q2. $\underline{g}_2 = 2 - j$

Q3. $\underline{g}_3 = \dfrac{1}{2 + j}$

Q4. $\underline{g}_4 = \dfrac{\alpha}{2} \exp\left(j\dfrac{\pi}{4}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Q5. $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{-H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

Q6. $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Q7. $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1 - j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

2 Représentations graphiques

Représenter les allures des fonctions suivantes :

Q1. $u(t) = U_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $t \in [0, +\infty[$. U_0 et τ sont des constantes réelles positives.

Q2. $s(t) = A\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau'}\right)\right)$ avec $t \in [0, +\infty[$. A et τ' sont des constantes réelles positives.

Q3.

$$g(r) = \begin{cases} g_0 r & \text{pour } r \in [0, R_1] \\[2ex] \dfrac{\mathcal{G} M}{r^2} & \text{pour } r \in [R_1, +\infty] \end{cases}$$

avec g_0, $\mathcal{G}$, M et R_1 des constantes réelles positives. On considèrera que $g(r)$ est une fonction continue sur l'ensemble de définition de r.

Q4. Représenter sur le même graphique : $v_1(t) = B\cos(2\pi f t)$ et $v_2(t) = B\sin(2\pi f t)$, avec B et f des constantes réelles positives et $t \in \mathbb{R}$.

Q5. Représenter l'allure la fonction $h(t) = h_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(2\pi f t)$ avec h_0, $\alpha > 0$ et $f > 0$ des constantes réelles positives et $t \in [0; +\infty[$.

3 Intégrales simples

On définit a, h, $H > 0$ et $T > 0$ réels. Calculer les intégrales suivantes :

Q1. $I_1 = \displaystyle\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t$

Q2. $I_2 = \displaystyle\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t$

Q3. $I_3 = \displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t$

Q4. $I_4 = \displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t$

Q5. $I_5 = \displaystyle\int_0^\pi \sin^3(\theta)\, \mathrm{d}\theta$

Q6. $I_6 = \displaystyle\int_0^a \frac{x}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x$

Q7. $I_7 = \displaystyle\int_0^a \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \mathrm{d}x$

Q8. $I_8 = \displaystyle\int_0^h z \exp\left(\frac{-z}{H}\right) \mathrm{d}z$

4 Intégrales de surface et de volume

Rappel : Éléments de surface (cf. annexe : Outils mathématiques en Physique-Chimie) :

- en coordonnées cartésiennes : $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- en coordonnées polaires : $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

Éléments de volume :

- en coordonnées cartésiennes : $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- en coordonnées cylindriques : $\mathrm{d}\tau = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
- en coordonnées sphériques : $\mathrm{d}\tau = r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

On cherche à déterminer les surfaces et les volumes de figures géométriques de base. On utilise pour cela les intégrales de surface (ou intégrale double) et de volume (ou intégrale triple) dont les bornes sont celles de la figure géométrique.

Exemple :

- la surface d'un rectangle de largeur ℓ et de longueur L est donnée par : $S = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\ell \mathrm{d}x.\int_0^L \mathrm{d}y = \ell.L$
- le volume d'un pavé de côtés ℓ, L et de hauteur h est donné par : $V = \iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^\ell \mathrm{d}x.\int_0^L \mathrm{d}y.\int_0^h \mathrm{d}z = \ell L h$

Remarque : le passage d'une intégrale double ou triple à un produit d'intégrale n'est possible que si les intégrants sont indépendants les uns des autres, ce qui est le cas des coordonnées spatiales dans un repère orthonormé.

Q1. Retrouver la surface d'un disque de rayon R à partir du calcul de l'intégrale de surface en coordonnées polaires.

Q2. Calculer la surface d'un cylindre de rayon R et de hauteur H à partir de $S = \iint R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$. On bornera convenablement les grandeurs θ et z.

Q3. Calculer la surface d'une sphère de rayon R à partir de $S = \iint R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. On bornera θ et φ de manière à ne pas calculer la surface sur plus qu'un tour de la sphère...

Q4. Calculer le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H.

Q5. Calculer le volume d'une sphère de rayon R.

5 Calculs de dérivées

On rappelle la formule de dérivation composée à utiliser pour les calculs suivants : $(f\circ g)' = g'.(f'\circ g)$

Q1. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $\theta(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

Q2. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f^\alpha(x))$ en fonction de $f(x)$ et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

Q3. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(f(t)))$ en fonction de $f(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$

Q4. On définit a, ϕ_0, k et ω des constantes. Calculer les dérivées suivantes :

a- $\dfrac{\mathrm{d}^2(\sin(kx+\phi_0))}{\mathrm{d}x^2}$

b- $\dfrac{\mathrm{d}^2(\exp(j\omega t))}{\mathrm{d}t^2}$

c- $\dfrac{\mathrm{d}^2\left(\ln\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right)\right)}{\mathrm{d}x^2}$

Q5. Soit la fonction $n(t)$ définie par :

$$n(t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi D t}} e^{\left(-\frac{A}{4Dt}\right)}$$

Calculer $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}(t)$ en supposant que toutes grandeurs autres que t sont des constantes.

Q6. Soit la fonction $V(z)$ définie par :

$$V(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\left(\sqrt{z^2+a^2} - z\right)$$

Calculer $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z)$ en supposant que toutes grandeurs autres que z sont des constantes.

Q7. H_0, ω, ω_0 et Q sont des réels positifs.
Déterminer à quelle condition sur Q la fonction

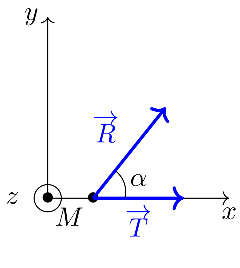
$$G(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

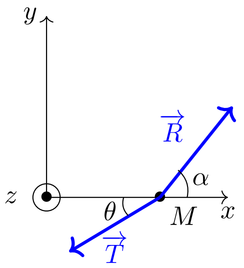
admet un maximum. Déterminer lorsque ce dernier existe la pulsation $\omega = \omega_r$ de ce maximum.

6 Calcul vectoriel

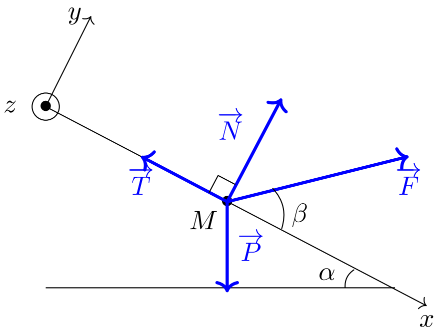
Dans toute la suite T , R , N , P , F désignent les normes des vecteurs $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{R}$, $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{F}$. Les angles sont définis positifs .

Q1. Déterminer, dans les deux cas suivants, $\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{R}$:

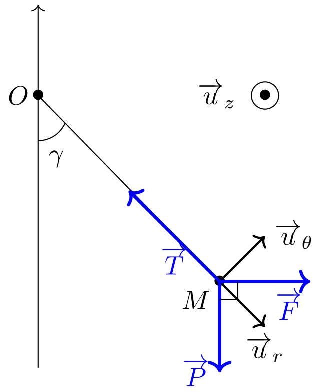




Q2. Déterminer les composantes selon $\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{u}_y$ du vecteur $\overrightarrow{N} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F}$:



Q3. Déterminer, dans la base orthonormée $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P}$. On posera $OM = a$.



7 Cinématique en coordonnées polaires

On se place en coordonnées polaires d'origine O. On considère un point M de l'espace.

Q1. Faire un schéma indiquant les coordonnées permettant de repérer le point M, ainsi que la base de travail.

Q2. **Établir**, à partir de l'expression du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$, les expressions de la vitesse et de l'accélération du point M dans la base polaire.

Q3. Que devient cette expression dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme ? Exprimer le résultat en fonction de la vitesse linéaire v et du rayon de la trajectoire R.