

# Chapitre I

## Stabilité des systèmes linéaires

### Pré-requis

- composants électroniques (résistance, bobine, condensateur) ;
- circuits de base (RC, RLC,...) ;
- filtrage analogique ;
- décomposition d'un signal périodique en série de FOURIER

### Objectifs

Notions et contenus	Capacités exigibles
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (équation différentielle).
Stabilité.	Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 à partir des signes des coefficients de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert.

### Introduction

En première année, de nombreux phénomènes et dispositifs physiques ont été étudiés : oscillateur harmonique, circuits électriques, milieux réactionnels en chimie... Plusieurs de

ces dispositifs peuvent être décrits comme un **système**.

### Définition : système

### Exemples de systèmes :

Système	Entrée	Sortie
Œil		
Radiateur à eau chaude		
Moteur thermique		
Téléphone		

Un **système électronique** transforme un signal électrique en un autre signal électrique.

Dans les chapitres traitant de l'électronique, nous nous placerons dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS).

### Rappel : ARQS

L'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) revient à négliger les retards liés aux phénomènes de propagation dans un circuit électrique.

### Validité de l'ARQS :

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux systèmes électroniques **linéaires**, **continus** et **invariants**, ainsi qu'aux conditions de stabilité de ces systèmes.

## I.1 Système continu, linéaire et invariant

### I.1.1 Système continu

#### Définition : système continu

**Remarque :** lorsque le système n'est pas analogique, il peut être numérique. Il manipule alors des **signaux numériques**, qui sont des signaux discrets de niveaux logiques 0 et 1.

Les convertisseurs analogique-numérique (CAN) ou numérique-analogique (CNA) assurent la conversion d'un type de signal à un autre (cf. chapitre échantillonnage et numérisation).

### I.1.2 Système linéaire

#### Définition

#### Définition : système linéaire

#### Généralisation mathématique : application linéaire

Soit une application linéaire  $A$  telle que  $A(f) = g$  avec  $f_1$  et  $g_1$  des fonctions à valeurs réelles. Alors, pour  $f_1$  et  $f_2$  telles que  $A(f_1) = g_1$  et  $A(f_2) = g_2$ ,  $A$  est linéaire si et seulement si :

$$A(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha A(f_1) + \beta A(f_2) = \alpha g_1 + \beta g_2$$

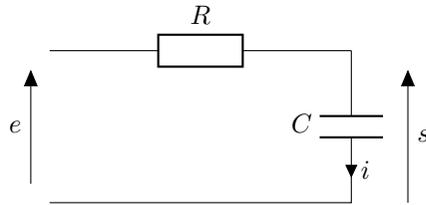
**Exemple 1 :** Vérifier que l'équation différentielle  $\frac{3}{2} \frac{d^3 s}{dt^3}(t) - 5 \frac{ds}{dt}(t) + 3s(t) = 0$  est linéaire.

**Exemple 2 :** L'équation différentielle  $\frac{3}{2} \frac{d^3 s}{dt^3}(t) - 5 \frac{ds}{dt}(t) + 3s^2(t) = 0$  est-elle linéaire ? Justifier.

On retiendra que les **équations différentielles à coefficients constants** appartiennent à l'ensemble des applications linéaires.

**On considèrera par la suite qu'un système linéaire est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants reliant  $e(t)$  et  $s(t)$ .**

**Exemple de système linéaire :** filtre du premier ordre (filtre RC série) :



Équation différentielle associée à  $s(t)$  :

### I.1.3 Système invariant

**Définition :** système invariant dans le temps

**Remarque :** ceci n'est bien sûr pas le cas en réalité. Pour être plus rigoureux, il faudrait préciser que les systèmes sont invariants *durant leur durée de vie*.

#### Conclusion

Les systèmes étudiés dans ce chapitre seront toujours considérés linéaires, invariants dans le temps et les signaux qu'ils manipulent continus.

## I.2 Régime sinusoïdal et fonction de transfert

### I.2.1 Rappel : Régime sinusoïdal

#### Description

De nombreux signaux périodiques en physique peuvent être modélisés par **une fonction sinus** (ou cosinus), ou **une combinaison linéaire de ces fonctions**.

#### Définition : signal périodique sinusoïdal

Un signal périodique, de pulsation  $\omega_0$ , s'écrit sous la forme réelle :

Sous la forme complexe, ce signal s'écrit :

Dans ce dernier cas, le signal physique est la partie réelle de cette représentation complexe ; son module donne l'amplitude  $S_0$ , et son argument donne la phase  $\phi$ .

**Remarque :** Un signal sinusoïdal est un **modèle mathématique qui n'existe pas dans la réalité**. Il convient cependant bien à une description mathématique, au premier ordre, de nombreux phénomènes physiques périodiques.

**Exemples de signaux périodiques rencontrés en physique :**

- 
- 
- 

#### Caractéristiques d'un signal périodique

On considère un signal  $T$ -périodique  $s(t)$ .

#### Définition : Valeur moyenne ; valeur efficace

- Valeur moyenne temporelle du signal :  $\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$
- Valeur efficace :  $s_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt}$

**Exercice : cas du régime sinusoïdal :** soit la tension sinusoïdale à valeur moyenne non-nulle  $s(t) = S_{\text{moy}} + S_{\text{max}} \times \cos(\omega t + \varphi)$ .

**Q1.** Déterminer la valeur moyenne du signal  $s(t)$

**Q2.** Déterminer la valeur efficace du signal  $s(t)$

## 1.2.2 Signal périodique quelconque : représentation spectrale

**Définition :** décomposition en série de FOURIER

Soit  $s(t)$  un signal périodique quelconque, de pulsation  $\omega_0$ . On peut décomposer le signal  $s(t)$  en une **série infinie de signaux sinusoïdaux** que l'on appelle **série de Fourier**. Ainsi, le signal  $s(t)$  de fréquence  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  peut s'écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t))$$

avec :

• $a_0$ :	• $a_k$ et $b_k$ :
• $f_0$ :	• $k \cdot f_0, k \in \mathbb{N}$ :

Un signal périodique quelconque peut ainsi être traité en s'appuyant sur la linéarité des équations modélisant les systèmes électroniques étudiés dans ce chapitre (principe de superposition). Les valeurs de coefficients de FOURIER conditionnent la forme du signal périodique.

**Exemple : signal carré**

Soit le signal carré périodique de période  $T$ , décrit par la fonction  $s(t)$  telle que :

$$\begin{cases} s(t) = E \text{ pour } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ s(t) = 0 \text{ pour } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases}$$

La décomposition en série de Fourier du signal carré  $s(t)$ , de fréquence  $f_0 = \frac{1}{T}$  et dont la valeur varie entre 0 et  $E$  est la suivante :

$$s(t) = \frac{E}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2E}{(2k+1)\pi} \sin(2\pi(2k+1)f_0 t)$$

Le spectre du signal est la représentation graphique de l'amplitude de chaque composante en fréquence du signal.

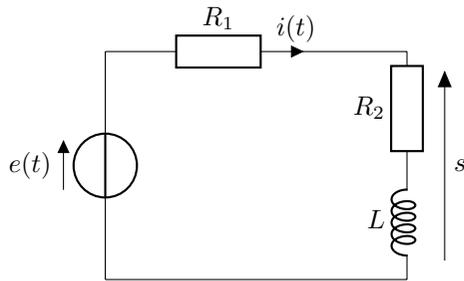
**Représentation graphique de  $s(t)$  :**

**Spectre en fréquences de  $s(t)$  :**

## 1.2.3 Description d'un système électronique - équation différentielle

Des systèmes électroniques ont déjà été abordés en première année ; c'est l'exemple **des filtres analogiques** (passe-haut, passe-bas, passe-bande). Nous allons montrer l'équivalence entre la description d'un système électronique par son équation différentielle ou sa

fonction de transfert à travers l'exemple du système électronique suivant :



**Exercice :** Le générateur de tension (GBF) fournit un signal  $e(t)$  sinusoïdal de pulsation  $\omega$ . Montrer que l'équation différentielle régissant l'évolution du signal  $s(t)$  au cours du temps est :

$$\frac{ds(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L}s(t) = \frac{de(t)}{dt} + \frac{R_2}{L}e(t)$$

**Remarque :** Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1, à coefficients constants. Le système décrit est donc un système d'ordre 1.

## I.2.4 Description d'un système électronique - fonction de transfert

### Rappel : Fonction de transfert harmonique

La **fonction de transfert harmonique**, ou **transmittance harmonique**, notée  $\underline{H}(j\omega)$  est une représentation mathématique décrivant le comportement d'un système physique soumis à un régime sinusoïdal forcé de pulsation connue. Elle est définie par le rapport entre le signal de sortie  $\underline{s}(t)$  et le signal d'entrée  $\underline{e}(t)$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$$

En posant  $j\omega \longleftrightarrow p$ , on retrouve la fonction de transfert de Laplace  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ , qui lie la transformée de Laplace du signal de sortie et celle du signal d'entrée (cf. cours de SI). Il sera par la suite fait mention uniquement de cette dernière sous le nom de fonction de transfert.

**Exercice :** Déterminer la fonction de transfert harmonique du filtre précédent.

## I.2.5 Lien entre équation différentielle et transmittance

En écrivant la fonction de transfert sous la forme d'un rapport entre deux polynômes, le lien avec l'équation différentielle est presque immédiat.

**Exercice :** Établir la relation entre  $\underline{e}$  et  $\underline{s}$  à partir de la fonction de transfert. En déduire une équivalence entre les représentations temporelles et fréquentielles du modélisant le filtre.

Il est ainsi possible de poser les équivalences suivantes pour passer d'une description à une autre (**à retenir !**) :

**Conclusion**

En résumé, on peut retenir l'organigramme suivant pour passer d'une représentation à une autre :

**Exercice :**

- Donner la fonction de transfert harmonique  $\underline{H}(j\omega)$  d'un système décrit par :

$$\alpha \frac{de}{dt}(t) + 3\beta e(t) = \gamma \frac{d^2s}{dt^2}(t) - 2\delta \frac{ds}{dt}(t) + \lambda \cdot s(t)$$

- Donner la fonction de transfert de LAPLACE, puis l'équation différentielle d'un système de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

**I.3 Stabilité d'un système électronique****I.3.1 Définition****Définition : stabilité d'un système**

Cette définition, générale, peut être adaptée au cas de l'électronique sous une forme plus intuitive : un système stable en électronique ne doit pas avoir de signal de sortie divergent. Autrement dit, **si le signal d'entrée est borné, le signal de sortie l'est aussi.**

**Remarque :** En pratique, l'amplitude du signal de sortie d'un système électronique instable ne tend pas vers l'infini : il parvient à une valeur fixe nommée **valeur de saturation**. Nous verrons dans un prochain chapitre l'origine de cette saturation.

Nous allons nous intéresser par la suite à la stabilité des systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2 (seuls exigibles cette année).

**I.3.2 Stabilité d'un système d'ordre 1**

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre, dont la fonction de transfert est la suivante :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{a + jb\omega} \text{ ou } H(p) = \frac{H_0}{a + bp}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles quelconques.

Cette fonction de transfert représente, par exemple, un filtre passe-bas RC d'ordre 1 (mesure de  $s(t)$  aux bornes du condensateur de capacité  $C$ ) en posant  $a = 1$ ,  $H_0 = 1$  et  $b = \tau = RC$ .

## Propriété

## I.3.3 Stabilité d'un système d'ordre 2

## Propriété

## Démonstration :

## Démonstration :

Comme pour l'étude de la stabilité d'un système d'ordre 1, considérons un filtre passe-bas d'ordre 2 dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{H_0}{a + bp + cp^2}$$

où  $c$  est une constante réelle.

L'équation différentielle modélisant ce système est :

$$as(t) + b \frac{ds}{dt}(t) + c \frac{d^2s}{dt^2}(t) = H_0 e(t)$$

Tout comme précédemment, la solution particulière de cette équation différentielle est de la même forme que le signal d'entrée : elle est donc bornée si celui-ci l'est. La stabilité d'un système électronique de second ordre doit donc être étudiée à travers la solution de l'équation à second membre nul  $s_n(t)$  :

$$a \times s_n(t) + b \times \frac{ds_n}{dt}(t) + c \frac{d^2s_n}{dt^2}(t) = 0$$

**Résolution** : on détermine les racines de l'équation caractéristique  $cr^2 + br + a = 0$ , de discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ . 3 cas sont possibles :

**Cas n°1 :  $\Delta < 0$  :**

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes :  $r_{\pm} = \frac{-b \pm j\sqrt{4ac - b^2}}{2c}$ . Dans ce cas, la solution  $s_n(t)$  est de la forme :

$$s_n(t) = e^{(-\frac{b}{2c}t)} \left( s_1 \cos \left( \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2c} t \right) + s_2 \sin \left( \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2c} t \right) \right)$$

Cette solution reste bornée pour  $\frac{b}{2c} > 0$  : il faut donc que  $b$  et  $c$  soient du même signe. Par ailleurs,  $\Delta < 0 \Rightarrow 0 < b^2 < 4ac$ . Il faut donc que  $a$  et  $c$  soient également du même

**Remarque** : on montre que la conclusion est la même pour un filtre passe-haut de fonction de transfert  $H(p) = H_0 \frac{\tau p}{a + bp}$ .

signe. En conclusion, pour que le système du seconde ordre ainsi décrit soit stable, il faut que les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  soient tous du même signe.

**Cas n°2 :  $\Delta = 0$  :**

La racine est alors double :  $r = -\frac{b}{2c}$ . La solution  $s_n(t)$  est alors :

$$s_n(t) = (s_0 + s'_0 t)e^{(-\frac{b}{2c}t)}$$

et la conclusion sur la stabilité est la même que précédemment.

**Cas n°3 :  $\Delta > 0$  :**

Les racines sont dans ce cas réelles :  $r_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$ . La solution  $s_n(t)$  est alors :

$$s_n(t) = s_+ e^{r_+ t} + s_- e^{r_- t}$$

et elle reste bornée à la condition que  $r_+ < 0$  et  $r_- < 0$ . Ceci équivaut à :

- $r_+ + r_- < 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{c} < 0$ , soit  $\frac{b}{c} > 0$  :  $b$  et  $c$  doivent être du même signe.
- $r_+ \times r_- > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{c} > 0$  : de même,  $a$  et  $c$  doivent être de même signe.

### I.3.4 Conclusion sur la stabilité d'un système de premier ou deuxième ordre

#### Conclusion

Un système électronique est stable si, et seulement si, sa solution homogène (donc son régime libre) s'annule quand  $t \rightarrow \infty$ .

De manière équivalente, **un système est stable si tous les coefficients du dénominateur de sa fonction de transfert sont du même signe.**

Concrètement, la marche à suivre pour vérifier la stabilité d'un système est la suivante : on détermine l'équation différentielle (ou de manière équivalente, la fonction de transfert) représentative du système, puis on détermine les signes des coefficients de l'équation à second membre nul, traduisant le régime libre du système :

- si les coefficients sont de même signe, le système est stable.
- sinon, le système est instable.

#### Remarque : systèmes d'ordre supérieurs à 2

Dans le cas d'un système d'ordre strictement supérieur à 2, il n'y a pas de règles simples d'analyse mais un critère à appliquer appelé le critère de ROUTH-HURWITZ (hors-programme).

**Exemple :** Déterminer la stabilité des systèmes représentés par les fonctions de transfert suivantes :

Fonction de transfert $H(p)$	$\frac{5}{1+2p}$	$\frac{2p^2}{5+p-p^2}$	$\frac{p}{-2-p-4p^2}$	3. $\frac{(5+p-p^2)}{3p-6p^2}$
Stabilité				

# Chapitre II

## Amplificateur Linéaire Intégré

### Pré-requis

- loi des mailles, lois des nœuds, diviseur de tension

### Objectifs

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modèle de l'ALI défini par une résistance d'entrée infinie, une résistance de sortie nulle, une fonction de transfert du premier ordre en régime linéaire, une saturation de la tension de sortie. Limites du modèle : vitesse limite de balayage, saturation de l'intensité du courant de sortie.	Citer les hypothèses du modèle et les ordres de grandeur du gain différentiel statique et du temps de réponse. <b>TP</b> : Détecter, dans un montage à ALI, les manifestations de la vitesse limite de balayage et de la saturation de l'intensité du courant de sortie.
Montages amplificateur non inverseur et comparateur à hystérésis.	Analyser la stabilité du régime linéaire. Etablir la conservation du produit bande passante du montage non inverseur.

### Notions et contenus

ALI idéal de gain infini en régime linéaire.

ALI idéal de gain infini en régime saturé.

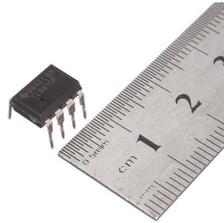
### Capacités exigibles

Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de probable stabilité du régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur. Déterminer les impédances d'entrée de ces montages. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de forte impédance d'entrée et de faible impédance de sortie.

Identifier l'absence de rétroaction ou la présence d'une unique rétroaction sur la borne non inverseuse comme l'indice d'un probable comportement en saturation. Établir la relation entrée-sortie d'un comparateur simple. Associer, pour un signal d'entrée sinusoïdal, le caractère non-linéaire du système et la génération d'harmoniques en sortie. Établir le cycle d'un comparateur à hystérésis. Décrire le phénomène d'hystérésis en relation avec la notion de fonction mémoire.

## Introduction

L'**Amplificateur Linéaire Intégré (ALI)**, connu également sous le nom d'**Amplificateur Opérationnel ("ampli op", AO)**, est un composant fréquemment rencontré en électronique moderne. Il est l'illustration même des **systèmes physiques à rétroaction**, c'est-à-dire dont la sortie possède une influence sur l'entrée (en pratique : asservissement sous consigne, etc.).



Ses propriétés permettent de fabriquer de nombreux composants électroniques complexes, stables comme les suiveurs de tension, les montages inverseurs mais aussi des systèmes instables comme le comparateur à hystérésis. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux caractéristiques générales de l'ALI, et nous étudierons quelques montages fréquemment rencontrés.

## II.1 Amplificateur linéaire intégré

### II.1.1 Description

L'ALI se présente sous la forme d'**une puce électronique** de dimension standardisée (11 mm x 6,6 mm), avec **8 pattes** dont les fonctions sont fournies par le constructeur. De manière générale, un ALI se présente sous la forme suivante :

Schéma ALI

Le brochage est une partie importante dans l'exploitation expérimentale de l'ALI. Les broches les plus importantes à notre niveau sont :

- Entrée inverseuse, repérée par le signe "-";
- Entrée non-inverseuse, repérée par le signe "+";

- $V_{CC}^-$  et  $V_{CC}^+$  : ce sont les entrées d'alimentation de l'ALI ;
- Sortie : connectique sur laquelle peut se lire le signal de sortie de l'ALI.

#### Remarque importante : composant actif

### II.1.2 Représentation électrique

L'ALI est schématisé de la manière suivante :

#### Représentations européenne et américaine de l'ALI

Les représentations US et EU peuvent être utilisées l'une comme l'autre.

**Remarque importante : l'alimentation de l'ALI n'est pas représentée sur le schéma électrique !**

### II.1.3 Propriétés principales d'un ALI

#### a - Fonction de transfert

Détaillons le schéma de l'ALI :

Schéma électrique d'un ALI : grandeurs caractéristiques

**Définition :** entrée différentielle  $\epsilon$

Le principe de l'ALI repose sur l'amplification de cette entrée différentielle. On définit ainsi, en première approche, la fonction de transfert  $A(p)$  de l'ALI, aussi appelée gain différentiel.

**Définition :** gain différentiel

**Expression du gain différentiel :**

Nature du filtre modélisé :

**ATTENTION !** : cette relation n'est valable qu'en **régime de fonctionnement linéaire**.

**Remarque :** la valeur de  $\tau$  est relativement élevée face à d'autres amplificateurs, notamment numériques ( $\tau_{numerique} \simeq 1 \mu s$ ). L'ALI est un composant "lent", mais de grande stabilité.

#### b - Tension et courant de sortie

La tension maximale en sortie d'un ALI n'est pas infinie : elle est limitée par le phénomène dit de **saturation**. Ainsi, la tension de sortie est comprise entre  $\pm V_{sat}$ , où  $V_{sat}$  est la tension de saturation de l'ALI.

Tension de saturation

Le courant de sortie est également limité (ordre de grandeur : dizaine de mA).

#### c - Résistances d'entrée et de sortie

La résistance d'entrée des voies inverseuse et non-inverseuse est très importante devant les autres résistances classiquement utilisées en électronique, au maximum de quelques M $\Omega$ . En effet, cette résistance est de l'ordre de  $10^{12} \Omega$  soit 1 T $\Omega$ . Ainsi, pour des tensions  $v^+$  et  $v^-$  de l'ordre de 10 V, les courants  $i^+$  et  $i^-$  associés sont faibles, **inférieurs au nA**.

### Résistances et courants d'entrée d'un ALI

L'application d'une résistance de charge en sortie de l'ALI n'entraîne pas de changement de la tension de sortie  $s(t)$  : ceci n'est possible que si la résistance de sortie de l'ALI est faible. En pratique, elle est même négligeable devant toutes les autres résistances.

### Résistance de sortie d'un ALI

#### d - Complément : vitesse de balayage, ou slew rate

L'ALI est un composant dont le comportement dépend de la fréquence du signal en entrée ; il suit d'autant moins bien les variations des signaux que leur fréquence est élevée.

#### Définition : Vitesse de balayage (slew rate)

On définit la vitesse de balayage limite d'un ALI comme le temps nécessaire pour faire varier la tension de sortie d'une certaine valeur. Typiquement, un ALI de qualité possède un *slew rate* de l'ordre de  $10 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ . Cela signifie qu'en  $1 \mu\text{s}$ , le signal de sortie varie de  $10 \text{ V}$ .

## II.2 Exemple d'application d'un ALI : l'amplificateur non inverseur

### II.2.1 Présentation du montage

Le schéma de l'amplificateur non inverseur est le suivant :



Le but de cette partie est de décrire les caractéristiques de ce montage en termes de :

- relation entre tensions d'entrée et de sortie ;
- fonction de transfert ;
- stabilité.

#### Relation entre signaux d'entrée et de sortie

**Exercice :** À partir des caractéristiques de l'ALI et du schéma du montage, montrer que la tension de sortie  $s(t)$  est liée à la tension d'entrée  $e(t)$  par les relations suivantes :

$$\begin{cases} S(p) &= \frac{A_0}{1 + \tau p} \varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) &= E(p) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} S(p) \end{cases}$$

en formalisme de LAPLACE.

#### Démonstration :

1. Tension différentielle :

2. Gain de l'ALI en régime linéaire :

3. Loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse :

4. Valeurs de  $i^+$  et  $i^-$  :

**Lois des nœuds en termes de potentiels :**

- aux bornes de  $R_1$  :

- aux bornes de  $R_2$  :

**Bilan :**

Il est possible de retranscrire ce système d'équation sous la forme d'un schéma bloc (ou schéma fonctionnel), associant un soustracteur, un passe-bas du premier ordre et un opérateur proportionnel :

Schéma-bloc : amplificateur non inverseur

On retrouve ainsi le schéma fonctionnel d'un **système bouclé**, avec :

- un comparateur (soustracteur) ;
- une chaîne directe (passe-bas ordre 1) ;
- une chaîne retour (diviseur de tension, ou opérateur proportionnel).

**Étude de la stabilité du système**

Pour étudier la stabilité de ce montage, il faut soit déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de signal de sortie  $s$ , soit étudier la fonction de transfert. Les relations

entre  $S$  et  $\varepsilon$  étant déjà déterminées, il est plus intéressant de trouver la fonction de transfert.

**Exercice :** Montrer que la fonction de transfert du système s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A_0(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2 + R_1 A_0) + (R_1 + R_2)\tau p}$$

À partir des ordres de grandeur des termes intervenant dans son expression, en déduire que l'expression de  $H(p)$  peut être simplifiée pour devenir :

$$H(p) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau}{A_0} p}$$

**Conclusion :** stabilité du système

**Remarque :** Pourquoi appelle-t-on ce montage amplificateur non inverseur ?

Car le terme  $1 + \frac{R_2}{R_1}$  est nécessairement supérieur à 1 ; pour un signal continu en entrée, on observe directement que  $s(t)$  est le produit de  $e(t)$  par une constante  $>1$  : le signal est amplifié. Ceci est valable sur une certaine plage de pulsation (filtre passe-bas). L'étude du diagramme de BODE nous renseigne sur l'allure du gain et du déphasage en fonction de la pulsation du signal en entrée.

## II.2.2 Diagrammes de Bode du système

Nous avons déjà reconnu la fonction de transfert d'un passe-bas d'ordre 1. En prenant pour valeurs caractéristiques  $R_1 = 10^3 \Omega$ ,  $R_2 = 10^5 \Omega$ ,  $A_0 = 2 \cdot 10^5$  et  $\tau = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$  (valeurs d'un TL081), on obtient les diagrammes de BODE en gain et en phase de l'am-

plificateur non inverseur suivants :

#### Diagrammes de BODE de l'amplificateur non inverseur



#### Définition : Bande passante

À partir d'une certaine valeur de fréquence  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 6,3 \cdot 10^3$  Hz, le montage non inverseur intègre le signal d'entrée et le gain chute : **ce montage ne peut être utilisé que dans une certaine plage de fréquence. Cette plage s'appelle la bande passante du système, et se note  $\Delta\omega$ .**

La bande passante est par définition la plage de fréquence dans laquelle le gain est supérieur à  $-3$  dB. Pour un filtre passe-bas, il s'agit donc de l'intervalle  $[0, f_0]$ .

### II.2.3 Compromis gain/bande passante du système

L'utilisation du système précédent est limitée à des pulsations inférieures à la pulsation de coupure  $\omega_0$ . Il n'est pourtant pas rare de travailler avec des signaux d'entrée dont la fréquence dépasse  $10^6$  Hz : le système précédent ne possède pas les caractéristiques

nécessaires. Or, nous avons vu que :

$$\omega_0 = \frac{A_0}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\tau}$$

Un moyen d'adapter le système est donc de modifier les valeurs de  $R_1$  et  $R_2$  : **plus le rapport  $R_2/R_1$  est faible, plus  $\omega_0$  est grande, et la bande passante du système aussi.**

Cependant, le gain statique du système dépend aussi de  $R_1$  et  $R_2$ . En effet :

$$H_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

**Si le rapport  $R_2/R_1$  diminue, le gain diminue aussi.** Le montage amplificateur est alors moins intéressant.

Un compromis doit donc être trouvé entre d'une part, une amplification satisfaisante, et d'autre part une bande passante adaptée aux signaux d'entrée.

Ce compromis se traduit par un produit **gain  $\times$  bande passante constant**. En effet,

$$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{A_0}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\tau} = \frac{A_0}{H_0\tau}, \text{ donc :}$$

$$H_0 \times \Delta\omega = \frac{A_0}{\tau} = \text{constante}$$

#### Produit Gain $\times$ Bande passante

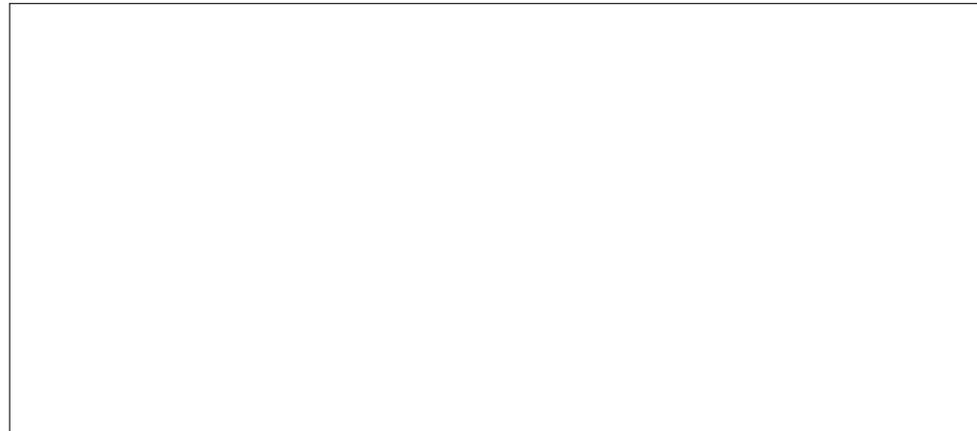


Les montages à ALI avec rétroaction sur la borne inverseuse sont stables. Mais qu'en est-il lorsque la rétroaction s'effectue sur la borne non inverseuse ?

## II.3 Un exemple de montage à rétroaction positive : le comparateur à hystérésis

### II.3.1 Schéma électrique du comparateur à hystérésis

Il s'agit du même schéma que celui du montage inverseur, à l'exception de la rétroaction, qui s'effectue cette fois sur la borne non inverseuse (rétroaction positive).



### II.3.2 Fonction de transfert

Il suffit de reprendre les calculs précédents en inversant les rôles de  $v^+$  et  $v^-$ . Ainsi :

$$v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s \quad \text{et} \quad v^- = e$$

On obtient alors :

$$S(p) = \quad \text{et} \quad \varepsilon(p) =$$

La fonction de transfert est donc :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} =$$

**Conclusion** : stabilité du système

La sortie devrait alors diverger jusqu'à l'infini ; ceci n'est physiquement pas possible, l'ALI limitant la tension de sortie à  $\pm V_{sat}$ . Ainsi, quelque soit la valeur de la tension d'entrée, la tension de sortie sera toujours  $\pm V_{sat}$  : **l'ALI en rétroaction positive n'est pas un système linéaire.**

## II.4 ALI idéal : limite du gain infini en régime linéaire

### II.4.1 ALI idéal

L'étude du montage non inverseur a montré qu'un ALI réel ne fonctionnait correctement que sur une plage limitée de fréquences, la bande passante. La fonction de transfert de ce montage est, pour rappel :

$$\underline{H}(p) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau}{A_0} p}$$

Ainsi, le montage amplificateur non inverseur peut ne pas être limité en fréquence à la condition que le gain de l'ALI tende vers l'infini :

$$\lim_{A_0 \rightarrow \infty} \underline{H}(p) = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

On retrouve alors le comportement amplificateur attendu, sans limite en fréquence.

**Définition** : ALI idéal

On rajoute alors souvent un symbole " $\triangleright \infty$ " en haut à droite du symbole électrique de l'ALI pour signifier le comportement idéal de celui-ci.

### II.4.2 ALI idéal dans un montage électrique

La relation entre le signal de sortie et la tension différentielle est toujours :

$$S(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p} \varepsilon(p)$$

Si  $A_0$  tend vers l'infini, et puisque le signal de sortie est nécessairement borné (régime linéaire, montage stable), il est nécessaire que  $\varepsilon(p)$  tende vers 0.

#### Tension différentielle d'un ALI idéal

Ainsi :  $v^+ = v^-$  pour l'ALI idéal fonctionnant en régime linéaire. Nous allons désormais pouvoir appliquer cette règle de calcul, sauf indication contraire, à tous les circuits électroniques faisant intervenir des ALI.

### II.4.3 Gain de l'ALI idéal

On représente ci-dessous les caractéristiques d'un ALI réel et d'un ALI idéal. Les portions linéaire et saturée sont précisées.

#### Caractéristiques d'un ALI réel et d'un ALI idéal

### II.4.4 Retour sur le montage non inverseur

**Exercice :** Montrer que la fonction de transfert du montage amplificateur non inverseur constitué d'un ALI idéal s'écrit :

$$H = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

## II.5 Montages remarquables

Dans cette section du cours, nous allons déterminer les fonctions de transfert et les impédances d'entrée des différents dispositifs à ALI, en considérant ces derniers comme idéaux et fonctionnant en régime linéaire.

### II.5.1 Montage suiveur

#### Fonction de transfert

#### Montage suiveur

Relation entre  $e(t)$  et  $s(t)$  :

**Utilité du montage suiveur** : il s'agit d'un **adaptateur d'impédance**. Par construction, la puissance délivrée par le générateur est  $e.i^+$ , soit 0 car  $i^+ = 0$ . De même, la puissance en sortie est nulle en circuit ouvert car le courant  $i$  vaut 0.

### Impédance d'entrée

**Définition** : Impédance d'entrée d'un système

L'impédance d'entrée correspond au rapport entre la tension appliquée à l'entrée de ce système et l'intensité du courant d'entrée :  $Z_e = \frac{E}{I_e}$

Dans le cas du montage suiveur,  $E$  étant finie et  $I_e = i^+ \rightarrow 0$  :  $Z_e \rightarrow +\infty$

L'impédance d'entrée du montage suiveur est infinie.

### Impédance de sortie

**Définition** : Impédance de sortie d'un système

L'impédance de sortie comme le rapport entre la tension du signal de sortie et l'intensité du courant de sortie.

On admet que l'impédance de sortie du montage suiveur est **nulle**.

## II.5.2 Montage inverseur

### Fonction de transfert

Montage inverseur

Relation entre  $e(t)$  et  $s(t)$  :

Impédance d'entrée

Impédance de sortie

### II.5.3 Montage intégrateur

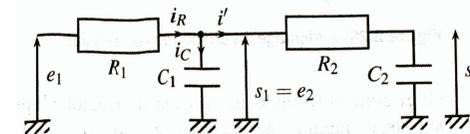
Fonction de transfert

Montage intégrateur

Relation entre  $e(t)$  et  $s(t)$  :

### II.5.4 Mise en cascade de systèmes stables

Lors de la mise en cascade de deux filtres analogiques classiques, la séparation du courant en deux parties rend les deux filtres dépendants l'un de l'autre. Ainsi, si l'on associe deux filtres RC différents :



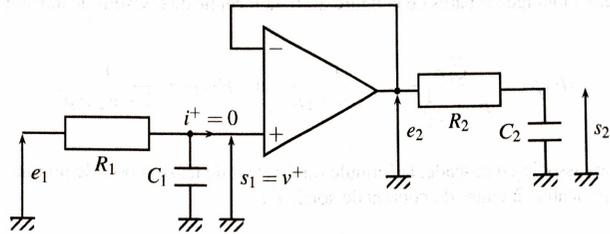
on trouve, après calculs, que la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{S_2(p)}{E_1(p)} = \frac{1}{1 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)p + R_1R_2C_1C_2p^2}$$

. Cette fonction de transfert est différente du produit des fonctions de transfert  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  de chaque circuit :

$$H_1(p)H_2(p) = \frac{1}{1 + (R_1C_1 + R_2C_2)p + R_1R_2C_1C_2p^2}$$

Que se passe-t-il si l'on rajoute un montage suiveur entre les deux parties du montage ?



Grâce à la propriété de l'ALI idéal (en régime linéaire),  $v^+ = v^-$ , et au fait que  $i^+ = i^- = 0$ , il vient :  $s_1 = e_2$ , si bien que :

$$H(p) = H_1(p)H_2(p)$$

On montre de même que grâce à l'impédance nulle en sortie d'un ALI, la fonction de transfert du montage ne dépend pas de l'étage suivant.

#### Conclusion : Mise en cascade

La fonction de transfert d'une association en cascade de filtres d'impédances d'entrée infinies est **le produit des fonctions de transfert de chaque filtre**.

La fonction de transfert totale d'une association en cascade de filtres d'impédances de sortie nulles est **le produit des fonctions de transfert des montages pris séparément**.

On considèrera, sauf indication contraire, que toute mise en cascade d'ALI implique que la fonction de transfert globale du montage est le produit des fonctions de transfert de chaque bloc pris séparément.

#### Conclusion du chapitre

Ce chapitre sur les ALI a été l'occasion d'aborder un nouveau composant électronique, actif, et ses principales caractéristiques : gain, résistances d'entrée et de sortie, tension et courant de sortie, régime linéaire et saturé.

Son utilisation dans des circuits courants à également été discutée. On a ainsi pu mettre en évidence :

- la stabilisation d'un montage en cas de rétroaction sur la borne inverseuse ("-") de l'ALI. Celui-ci fonctionne alors en régime linéaire.
- la déstabilisation d'un montage en cas de rétroaction sur la borne non inverseuse ("+") de l'ALI. Celui-ci fonctionne alors en régime saturé.

Pour chaque mode de fonctionnement, nous avons décrit des montages usuels. L'obtention de leur fonction de transfert se voit grandement simplifiée si l'on considère un ALI idéal, de gain infini fonctionnant en régime linéaire. Les propriétés associées à l'ALI (impédance d'entrée infinie, impédance de sortie nulle) sont exploitées lors de leur association en cascade : la fonction de transfert globale du système est simplement le produit des fonctions de transfert de chaque bloc pris séparément.

Que se passe-t-il désormais si nous appliquons le modèle de l'ALI de gain infini en régime saturé ? C'est, entre autres, l'objet du prochain chapitre traitant des oscillateurs électroniques.

# Chapitre III

## Oscillateurs en électronique

### Pré-requis

- fonction de transfert ;
- ALI ;
- filtrage électronique.

### Objectifs

Notions et contenus	Capacités exigibles
Oscillateur quasi-sinusoidal réalisé en bouclant un filtre passe-bande du deuxième ordre avec un amplificateur.	Exprimer les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoidale d'un système linéaire bouclé. Analyser sur l'équation différentielle l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations. Interpréter le rôle des non linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations. <b>TP</b> : Mettre en œuvre un oscillateur quasi-sinusoidal et analyser les spectres des signaux générés. <i>Capacité numérique</i> : à l'aide d'un langage de programmation, simuler l'évolution temporelle d'un signal généré par un oscillateur.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis.	Décrire les différentes séquences de fonctionnement. Exprimer les conditions de basculement. Déterminer l'expression de la période d'oscillation.
Générateur de signaux non sinusoidaux.	<b>TP</b> : Mettre en œuvre un oscillateur de relaxation et analyser les spectres des signaux générés.

### Introduction

Les ALI peuvent être utilisés afin de faire du filtrage actif, de l'amplification de signal, mais aussi des opérations complexes comme des intégrations, dérivations, sommation de signaux. Sous certaines conditions, ils peuvent également être utilisés dans un montage pour générer des signaux périodiques : c'est le cas des oscillateurs quasi-sinusoidaux et des oscillateurs de relaxation que nous allons étudier dans ce chapitre.

## III.1 Oscillateur quasi-sinusoïdal

### III.1.1 Définition

**Définition** : oscillateur quasi-sinusoïdal

Un **oscillateur quasi-sinusoïdal** produit une tension sinusoïdale sans avoir besoin de signal d'entrée.

On schématise généralement un système auto-oscillant comme un amplificateur bouclé sur un oscillateur, ici un filtre passe-bande :

**Schématisation d'un oscillateur quasi-sinusoïdal :**

Nous considérerons par la suite un filtre passe-bande d'ordre 2 dont la fonction de transfert s'écrit de manière générale :

$$\underline{B}(j\omega) = B_0 \frac{2\xi \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

*Remarque* : n'importe quel système résonant (passe-bas ou passe-haut d'ordre 2, passe-bande...) peut-être utilisé pour réaliser un oscillateur.

### III.1.2 Conditions d'auto-oscillations

**Démarrage des oscillations : équation différentielle**

Pour étudier les conditions sous lesquelles l'une des tensions du montage se met à osciller, il faut **établir l'équation différentielle modélisant ce système**. Nous utilisons pour cela la correspondance entre fonction de transfert d'un système et équation différentielle (cf. chapitre 1 : "Stabilité des systèmes linéaires").

**Exercice** : Soit un circuit amplificateur de fonction de transfert  $\underline{A}(j\omega) = A_0$  indépendante la pulsation du signal oscillant, bouclé sur un circuit résonnant de type passe-bande d'ordre 2. Établir l'équation différentielle portant sur le signal de sortie  $s(t)$  de l'amplificateur. En déduire que les oscillations démarrent dès que  $A_0 B_0 > 1$ . Déterminer la pulsation du signal oscillant correspondant.

On remarque, en divisant l'équation différentielle sur  $s(t)$  par  $A_0$ , qu'on retrouve la même équation différentielle portant sur  $e(t)$  : les signaux  $e(t)$  et  $s(t)$  sont **identiques**.

**Point méthode** : Pour obtenir la condition de démarrage des oscillations, il faut établir l'équation différentielle portant sur la tension au sein de l'oscillateur.

### Conclusion

### Remarque importante : aspects énergétiques

Les oscillations ne viennent pas de nulle part. Elles sont générées sur du bruit dans le circuit, amplifiées par le montage amplificateur. L'énergie nécessaire pour leur génération et leur maintien est fournie par l'alimentation de l'ALI ; cette énergie permet notamment de lutter contre les effets dissipatifs de résistances présentes dans le circuit.

### Démarrage des oscillations : critère de Barkhausen

Ce critère permet d'établir le cas limite de démarrage des auto-oscillations obtenu précédemment, en utilisant simplement les expressions des fonctions de transfert du filtre résonnant et du circuit amplificateur.

### Définition : Critère de BARKHAUSEN

### Démonstration du critère de Barkhausen :

La première condition implique que la pulsation du signal de sortie est **la pulsation de résonance du filtre passe-bande**.

La deuxième condition indique que le gain de la chaîne amplificatrice doit être au moins égal à  $1/B_0$ . Nous montrons par la suite qu'en pratique, afin de s'assurer une bonne stabilité des oscillations et d'éviter un démarrage spontané de celles-ci (à cause de tensions parasites, d'offset électronique...), on adoptera pour critère  $A_0 B_0 > 1$ .

### III.1.3 Exemple : l'oscillateur de Wien

#### Présentation

L'oscillateur de WIEN met en jeu un filtre passe-bande constitué de résistances et de capacités identiques, ainsi qu'un montage amplificateur non-inverseur. Ces deux éléments se retrouvent dans le schéma électrique du montage :

#### Schéma électrique d'un oscillateur de Wien

On remarque que  $v^+$  est la tension d'entrée de l'étage amplificateur, de sortie  $s$ , qui elle-même est l'entrée de l'étage de filtrage, de sortie  $v^+$  : le système est bien bouclé, et aucune tension d'entrée issue d'une source externe existe.

**ATTENTION** : la tension  $s$  N'EST PAS la tension de sortie du montage global ! En effet, en régime établi, le signal est le même dans tout le circuit (oscillations quasi-sinusoidales en phase selon l'ARQS). Il n'y a donc pas de sortie définie.

Déterminons la fonction de transfert de chaque montage afin d'établir les conditions d'oscillation du montage global.

#### Étage amplificateur :

#### Passe-bande :

#### Schéma-bloc :

#### Conditions d'oscillation

*Remarque* : on retrouve ce résultat en établissant l'équation différentielle portant par

exemple sur  $v^+$  : en partant de la fonction de transfert du passe-bande :

$$B(p) = \frac{V^+}{S} = \frac{RCp}{1 + 3RCp + R^2C^2p^2}$$

soit  $(1 + 3RCp + R^2C^2p^2)V^+ = RCpS$ . L'équation différentielle correspondante est donc :

$$v^+(t) + 3RC \frac{dv^+(t)}{dt} + R^2C^2 \frac{d^2v^+(t)}{dt^2} = RC \frac{ds(t)}{dt}$$

En injectant la relation  $s(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v^+(t)$  dans l'équation différentielle, on obtient l'équation respectée par la tension  $v^+(t)$  :

$$R^2C^2 \frac{d^2v^+(t)}{dt^2} + RC \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{dv^+(t)}{dt} + v^+(t) = 0$$

Il faut donc, compte-tenu des coefficients, que la condition  $2 - \frac{R_2}{R_1} < 0$  soit respectée, c'est-à-dire  $R_2 > 2R_1$ . La condition d'oscillation  $R_2 = 2R_1$  n'est donc qu'une condition limite pour le démarrage des oscillations (système en équilibre instable).

### III.1.4 Allure du signal de sortie

#### Allure générale

Allure des signaux  $s(t)$  et  $v^+(t)$  et de leurs spectres :

Tant que le rapport  $\frac{R_2}{R_1}$  est proche de 1, les sorties  $s$  et  $v^+$  possèdent une allure proche d'une sinusoïde, de fréquence égale à la fréquence propre du filtre passe-bande. Leurs amplitudes diffèrent, avec une amplitude à saturation pour le signal  $s$  ( $s_{max} \simeq 15V$ ), mais pas pour le signal  $v^+$ , pour lequel l'amplitude maximale est inférieure à  $V_{sat}$ .

L'observation des tensions  $v^+$  et  $s$  à l'oscilloscope montre que ces deux signaux **ne sont plus sinusoïdaux** lorsque le rapport  $\frac{R_2}{R_1}$  s'éloigne de 1 : on observe une **distorsion harmonique**. L'analyse de la composition spectrale du signal  $s$  montre que plus le rapport  $\frac{R_2}{R_1}$  est grand, plus le spectre présente d'harmoniques : il y a **enrichissement spectral** ; des fréquences absentes dans le signal d'entrée sont présentes dans le signal de sortie.

**Conclusion** : explication du terme "quasi-sinusoïdal"

#### Complément (non-exigible) : Amplitude des oscillations

Lors du démarrage des oscillations, l'équation différentielle décrivant l'évolution de  $s$  dans le temps peut s'écrire (cf. équation conditions de géné) :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} - 2\xi(A_0B_0 - 1)\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2s(t) = 0$$

soit, en posant  $\xi' = \xi(A_0B_0 - 1)$  :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} - 2\xi'\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2s(t) = 0$$

$\xi'$  étant positive, les coefficients de l'équation différentielle ne sont pas tous du même signe : le système est donc instable. La solution  $s(t)$  est donc :

$$s(t) = S_0 e^{\xi'\omega_0 t} \cos\left(\sqrt{1 - \xi'^2}\omega_0 t + \phi\right)$$

Ainsi l'amplitude du signal de sortie croît exponentiellement. Cependant, son amplitude va être limitée par la tension de saturation  $\pm V_{sat}$  : ceci explique que l'amplitude du signal  $s(t)$  est limitée (cf. observation à l'oscilloscope).

**Les non linéarités de l'ALI permettent de limiter l'amplitude des signaux générés par les oscillateurs quasi-sinusoidaux**

On peut noter que le signal  $v^+$  ne présente pas les mêmes caractéristiques que le signal  $s$  : son amplitude est plus faible (on peut vérifier sur l'exemple précédent, que  $v^+ = s \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{V_{sat}}{3} \simeq 5 \text{ V}$ ) ce qui implique un signal non saturé, donc plus sinusoïdal que  $s$ . Ceci est lié au fait que  $v^+$  est issu du filtre passe-bande, centré en  $\omega_0$ , et donc moins riche spectralement que  $s$  : il faut privilégier  $v^+$  si l'on cherche à observer un signal plus sinusoïdal.

## III.2 Oscillateurs de relaxation

Nous avons vu jusqu'à présent comment décrire un montage possédant un ALI, réel ou idéal, fonctionnant en régime linéaire. Que se passe-t-il plus concrètement si la rétroaction s'effectue cette fois sur la borne non inverseuse de l'ALI ?

### III.2.1 Comparateur à hystérésis

Lorsque le bouclage de l'amplificateur opérationnel s'effectue sur la borne "+", nous avons vu que le système électronique résultant était instable. Le signal de sortie est saturé et ne prend que deux valeurs :  $\pm V_{sat}$ . Ce comportement, hautement non linéaire, va être exploité pour détailler le fonctionnement du comparateur à hystérésis décrit au chapitre précédent.

#### Comparateur "négatif"

On reprend le montage du comparateur à hystérésis déjà présenté :

**Schéma du comparateur à hystérésis "négatif" :**

On a déjà noté que ce montage était instable. Pour étudier l'allure du signal de sortie, il faut respecter les 3 étapes suivantes :

1. le calcul de  $\epsilon = v^+ - v^-$  ;
2. l'écriture de la condition pour avoir  $s = +V_{sat}$  ou  $s = -V_{sat}$  ;
3. la représentation de  $s(t)$  suivant la valeur de  $e(t)$ .

On rappelle que, avec la loi des mailles exprimées en termes de potentiels, :  $v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$ . Par ailleurs :  $\epsilon = v^+ - v^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s - e$

**Conditions pour lesquelles  $s = \pm V_{sat}$  :**

En représentant  $s$  en fonction de  $e$ , on obtient donc le graphe suivant :

**Représentation  $s = s(e)$  :**

**Définition : cycle d'hystérésis****Sens de parcours du cycle**

Pour décrire le sens de parcours du cycle d'hystérésis, il faut se rappeler des conditions pour lesquelles  $s = \pm V_{sat}$ .

On suppose que la tension d'entrée initiale est telle que  $e > \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ .

**Tant que**  $e > \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$  :

**Pour**  $e < -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$  :

**Pour**  $e > \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$  :

Ainsi, en cas d'alimentation par une tension sinusoïdale, on observe que le cycle est parcouru dans le sens opposé au sens trigonométrique, d'où le nom de "comparateur à hystérésis négatif".

**Effet mémoire****Définition : effet mémoire****Exercice : Comparateur à hystérésis "positif"**

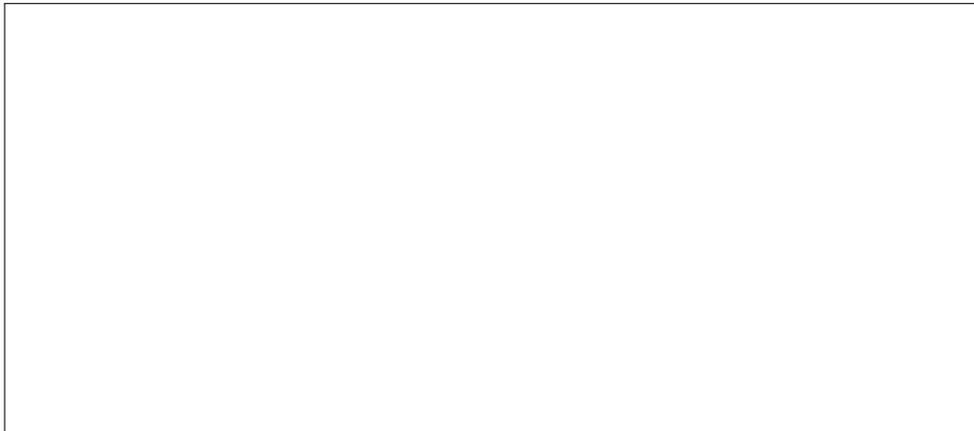
On reprend l'étude précédente, en injectant  $e$  dans la borne "+" de l'AO. La tension  $v^-$  est donc nulle.

**Q1.** Tracer le cycle d'hystérésis de ce montage. Donner l'intervalle de valeurs de  $e$  pour lequel la fonction mémoire de ce montage est observé.

**Q2.** Déterminer le sens de parcours des commutatrices.

**Q3.** Justifier l'appellation "comparateur à hystérésis positif".

**Réponses :**



### Reconnaître un comparateur à hystérésis

**À retenir : structure du comparateur à hystérésis**



### Complément important : comparateur simple

**Schéma d'un comparateur simple**



Que se passe-t-il en cas d'absence de rétroaction de l'ALI? Dans ce cas, l'équation différentielle qui décrit l'évolution du système est directement obtenue par la fonction de transfert propre de l'ALI :

$$\frac{S(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{A_0}{1 + \tau p}$$

soit  $\tau \frac{ds}{dt} + s = A_0 e \epsilon$

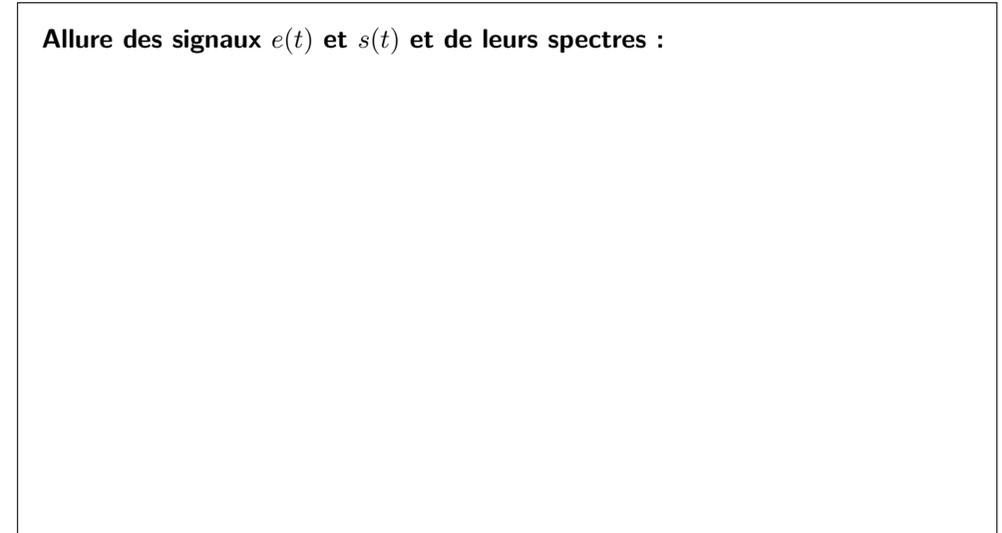
Si on suppose  $\epsilon = \epsilon_0$  constant, la solution de cette équation est  $s(t) = C e^{-t/\tau} + A_0 \epsilon_0$ , ce qui tend vers  $A_0 \epsilon_0$  au bout de  $5\tau$  environ (régime permanent). Du fait de la valeur de  $A_0$  ( $\simeq 10^5$ ),  $s(t)$  arrive à  $+V_{sat}$  dès que  $\epsilon_0 > 100 \mu V$ , ce qui est toujours vérifié en pratique. De même,  $s(t) = -V_{sat}$  pour  $\epsilon_0 < -100 \mu V$ .

**On en déduit qu'un ALI sans rétroaction est un système instable : il sature.**

Pour une entrée  $e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$  branchée sur l'entrée non inverseuse de l'ALI, et la borne "-" mise à la masse, on trouve la loi entrée-sortie du comparateur simple :

- $s = +V_{sat}$  pour ;
- $s = -V_{sat}$  pour ;

**Allure des signaux  $e(t)$  et  $s(t)$  et de leurs spectres :**



Ceci prouve bien **qu'un système non linéaire enrichi le spectre du signal de sortie de fréquences absentes du signal d'entrée.**

### III.2.2 Générateur de signaux

#### Description

Un comparateur à hystérésis permet de générer un signal pouvant varier brutalement d'une valeur de tension à une autre, à partir du moment où la tension d'entrée est suffisamment haute ou basse.

Afin d'obtenir des oscillations, il est nécessaire de coupler le comparateur à hystérésis à un **intégrateur**, ce qui permet de générer un **signal triangulaire à partir du signal carré du comparateur**.

#### Schéma-bloc de l'oscillateur de relaxation

#### Générateur de signaux : exemple

Nous allons étudier le comportement du montage ci-dessous, l'un des générateurs les plus simples basés sur ce principe :

#### Schéma électrique de l'ensemble comparateur-intégrateur

#### Séquences de fonctionnement

##### Équation différentielle :

##### Expressions de $v(t)$ :

Pour décrire le fonctionnement de ce dispositif, nous commençons par supposer que la commutation de  $-V_{sat}$  à  $+V_{sat}$  vient d'être faite.

Nous pouvons ainsi représenter les allures des tensions  $s(t)$  et  $v(t)$  :

##### Représentations graphiques de $s(t)$ et $v(t)$ :

### Période d'oscillation de l'oscillateur de relaxation

**Exercice :** à partir des expressions précédentes de  $v(t)$ , montrer que la période des oscillations  $T$  est donnée par :

$$T = 4 \frac{R_1}{R_2} RC$$

### Contraintes sur les composants

Pour s'assurer d'observer des oscillations, il faut que la tension  $v$  atteigne des valeurs de  $\pm \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$ . Cependant,  $|v| < V_{sat}$  car  $v$  est la tension issue d'un ALI, donc nécessairement inférieure ou égale à la tension de saturation.

Au final, il faut donc respecter la condition :  $\frac{R_1}{R_2} V_{sat} < V_{sat} \Rightarrow R_1 < R_2$ .

### Conclusion générale

Il est possible d'employer des ALI afin d'obtenir des dispositifs oscillants. Voici les points essentiels à retenir :

- oscillateurs quasi-sinusoidaux : couplage amplificateur/passe-bande, critère de BARKHAUSEN, condition de démarrage des oscillations (système instable) ;
- oscillateurs de relaxation : couplage comparateur à hystérésis et intégrateur, obtention des oscillations, séquences de fonctionnement, période d'oscillation.