TD1 - Systèmes linéaires

1 Équation différentielle

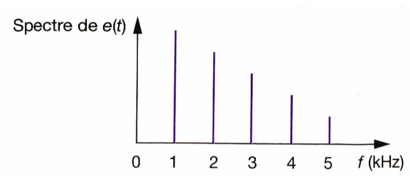
Q1. Donner l'équation différentielle du système ayant pour fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1 + \mathrm{j} \cdot \tau \cdot \omega}{1 + 2 \cdot m \dfrac{\mathrm{j} \cdot \omega}{\omega_0} + \left(\dfrac{\mathrm{j} \cdot \omega}{\omega_0}\right)^2}$$

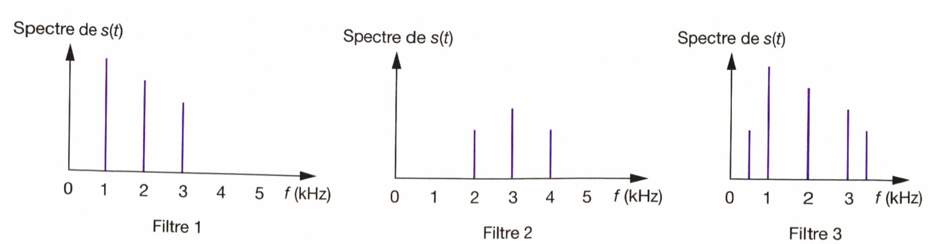
Q2. À quelle condition, portant sur m, τ et ω_0, le système est-il stable ?

2 Linéarité et filtres

On envoie sur différents filtres le signal $e(t)$ dont le spectre est donné par la figure ci-contre :



Les spectres des signaux en sortie de 3 filtres numérotés 1, 2 et 3 sont donnés ci-dessous :



Q1. Que pouvez-vous dire de la linéarité de chacun des filtres ?

Q2. Donner la nature des filtres linéaires repérés. On proposera des ordres de grandeur pour leurs caractéristiques.

3 Filtrage d'un signal triangulaire

Soit le signal triangulaire périodique de période T et de fréquence $f_0 = \dfrac{1}{T}$, décrit par la fonction $s(t)$ telle que :

$$\begin{cases} s(t) = E - \dfrac{4E}{T} t \text{ pour } t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right] \\ s(t) = -3E + \dfrac{4E}{T} t \text{ pour } t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right] \end{cases}$$

La décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$est donnée par :

$$s(t) = \frac{8E_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left((2k+1)\omega_0 t\right) \right)$$

avec $E_0 = 1\,\mathrm{V}$ et $\omega_0 = 2\pi f_0$.

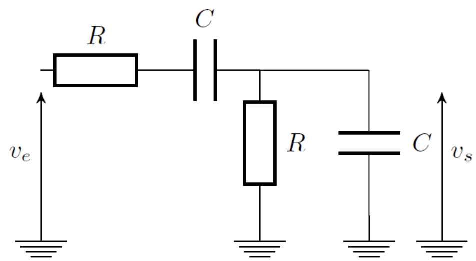
Q1. Représenter, sur deux graphes différents, le signal $s(t)$ et son spectre fréquentiel. On posera $a_1 = \dfrac{8E_0}{\pi^2}$.

Q2. $s(t)$ est le signal d'entrée d'un filtre passe-bas d'ordre 1 de fréquence de coupure $f_c = 2f_0$. En vous aidant du spectre précédent, représenter l'allure du signal de sortie.

Q3. $s(t)$ est désormais le signal d'entrée d'un filtre passe-bande de fréquence de résonance $f_r = 5f_0$ et de grand facteur de qualité. Représenter l'allure du signal de sortie. Que se passe-t-il si la fréquence du filtre est égale à $2f_0$?

4 Filtre de Wien

On considère le système linéaire ci-dessous dit "pont de Wien".



Q1. Donner l'équation différentielle reliant v_s à v_e.

Q2. En déduire la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}}$.

Q3. Mettre la fonction de transfert sous la forme canonique suivante :

$$\underline{H} = H_0 \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Identifier les paramètres intervenant dans son expression.

Q4. Donner, en les justifiant à l'aide de diagrammes de BODE, la nature et l'ordre du filtre.

Q5. Donner, sous forme numérique, la sortie du filtre lorsque l'entrée est de la forme :

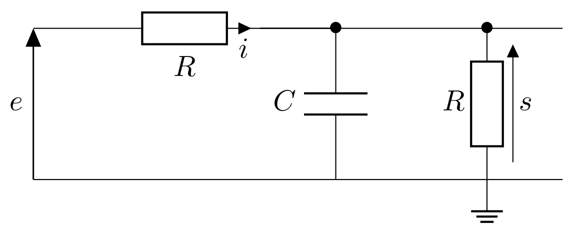
$$v_e(t) = V_0 + V_1\cos(\omega_0 \cdot t) + V_2\cos(4\omega_0 \cdot t - \frac{\pi}{4}) \text{ où } V_0 = 0{,}5\,\mathrm{V}, V_1 = V_2 = 2\,\mathrm{V}$$

Q6. Quelle est l'allure du signal de sortie pour un signal d'entrée de forme carrée de fréquence $f_1 \gg f_0$ ($f_0 = \omega_0/2\pi$) ?

Q7. Même question pour un signal d'entrée triangulaire de fréquence $f_2 \ll f_0$?

5 Stabilité d'un filtre $R - RC$

Soit le circuit électrique représenté ci-dessous :



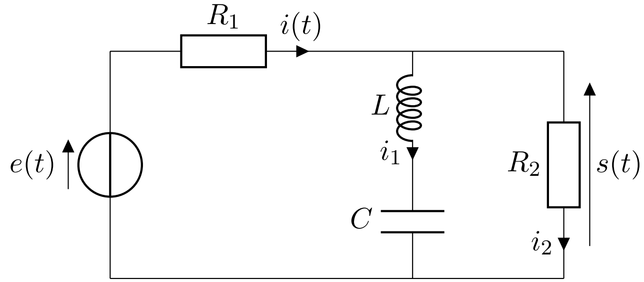
Q1. À partir de la fonction de transfert, établir l'équation différentielle entrée-sortie du filtre $R - RC$.

Q2. Examiner sa stabilité.

Q3. Représenter son régime libre (graphe de $\dfrac{s(t)}{s(0)}$ en fonction de t).

6 Circuit coupe-bande (*)

On considère le circuit électrique représenté ci-dessous :



Le générateur de tension (GBF) fournit un signal $e(t)$ sinusoïdal de pulsation ω.

Q1. Montrer, à l'aide des relations et lois usuelles de l'électrocinétique, que l'équation différentielle régissant l'évolution du signal $s(t)$ au cours du temps est :

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) LC\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} + R_1 C\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) s(t) = LC\frac{\mathrm{d}^2 e(t)}{\mathrm{d}t^2} + e(t)$$

Q2. Retrouver ce résultat en passant par l'expression de la fonction de transfert du système $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$.

Q3. Le système décrit est-il stable ? Justifier.

Q4. La forme canonique d'un tel filtre, nommé réjecteur de bande ou coupe-bande, est :

$$\underline{H} = H_0 \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$$

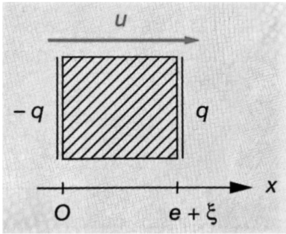
avec H_0 une constante réelle, Q le facteur de qualité du filtre, et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ où ω_0 est une pulsation caractéristique du système. Déterminer les expressions de H_0, Q et ω_0.

Q5. Tracer l'allure des diagrammes de BODE en amplitude et en phase de ce filtre. Justifier son nom.

Q6. On suppose que ce filtre est connecté à un système délivrant une tension $e'(t) = E_0 + \dfrac{E_0}{2}\cos(\omega_1 t) + \dfrac{E_0}{3}\cos(2\omega_1 t) + \dfrac{E_0}{4}\sin(3\omega_1 t)$, avec $\omega_1 = \dfrac{\omega_0}{2}$. Déterminer l'expression du signal de sortie du filtre $s'(t)$.

7 Comportement dynamique d'un transducteur(*)

Une lame de quartz d'épaisseur e a ses deux faces en regard métallisées (cf. figure ci-contre). On applique une différence de potentiel $U(t)$ et on observe l'apparition d'une charge électrique $q(t)$ et une variation de l'épaisseur $e+\xi(t)$.



Une modélisation fournit le jeu d'équations suivant :

$$\begin{cases} U = \dfrac{q}{C} + \alpha\xi \\ \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \delta\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + k\xi + \alpha q = 0 \end{cases}$$

m est proportionnel à la masse de la lame, δ est un coefficient positif.

Q1. Que représente le coefficient δ ?

Q2. **a.** Déterminer l'équation différentielle (E) reliant la vitesse $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$ à la différence de potentiel $U(t)$ appliquée aux bornes du quartz. À quelle condition sur k, α et C le système est-il stable ?

b. Exprimer l'équation différentielle en introduisant les quantités :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k-\alpha^2 C}{m}} \simeq \sqrt{\frac{k}{m}},\ Q = \frac{m\omega_0}{\delta}\,\text{avec}\,Q \gg 1,\ H_0 = -\frac{\alpha C}{m\omega_0}$$

Q3. On suppose que $U(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E, le cristal de quartz étant initialement au repos. Montrer que la solution $v(t)$ de cette équation peut se mettre sous la forme :

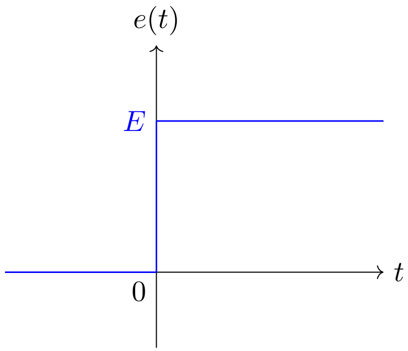
$$v(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\sin(\omega_0' t)$$

et donner les expressions de τ et ω_0' en fonction de Q et ω_0. On ne cherchera pas à déterminer la constante A. Dans la suite, on pourra supposer $\omega_0' \simeq \omega_0$.

Q4. On définit le temps de réponse τ_E de l'émetteur comme le temps au bout duquel l'amplitude de l'enveloppe du signal est inférieure à 5% de sa valeur initiale. Exprimer τ_E en fonction de Q et ω_0.

Q5. Quelle fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{v}}{\underline{U}}$ peut-on associer à l'équation différentielle (E) ? On exprimera $\underline{H}$ en fonction de H_0, Q, ω et ω_0. Quelle est la nature du filtre de fréquences correspondant ?

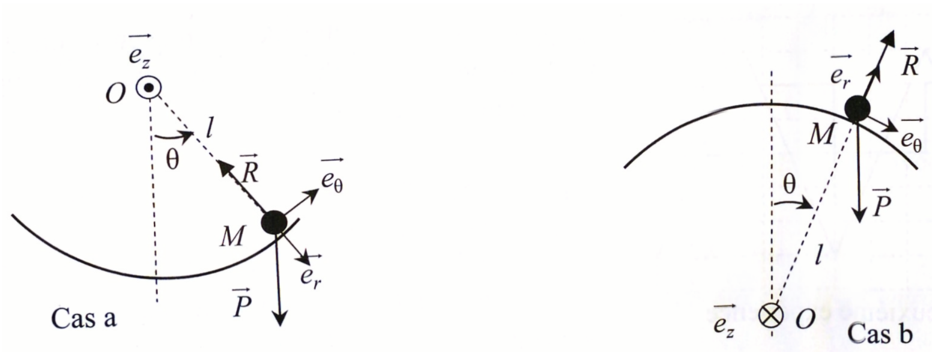
Remarque : *un échelon de tension de valeur E est la fonction dont la représentation graphique est la suivante :*



8 Stabilité d'un système linéaire en mécanique et en électronique (*)

I. Mécanique

Une particule M supposée ponctuelle de masse m se déplace dans le creux d'une calotte de glace de forme circulaire de centre Ode rayon de courbure l (cas a), puis sur le sommet d'une calotte de glace de forme circulaire de centre O de rayon l (cas b). On suppose qu'il n'y a pas de frottement solide, mais simplement un faible frottement de type fluide : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}(M)$, et que le déplacement se limite au plan perpendiculaire à $\vec{e}_z$. On note $\mathscr{R}$ le référentiel supposé galiléen lié aux calottes.



Q1. Déterminer l'équation du mouvement de M pour de petits angles θ dans les deux cas. Comparer les signes des coefficients dans les deux équations différentielles.

Q2. Déduire des équations précédentes la position d'équilibre relative à chaque situation.

Q3. Que se passe-t-il si l'on écarte très légèrement la masse de sa position d'équilibre ? Donner la forme des solutions sans chercher à expliciter les constantes d'intégration. Discuter de la stabilité.

II. Électricité

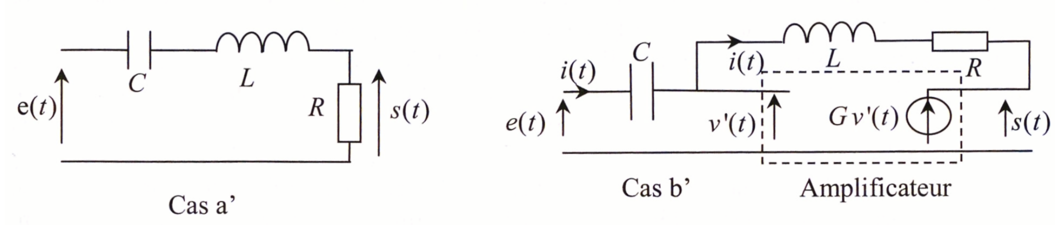
Considérons un circuit RLC (cas a'), avec R petite (faible amortissement) et $s(t)$ la tension aux bornes de R, et un circuit RLC avec amplificateur de gain $G = 2$ (cas b').

Q4. Établir l'équation différentielle reliant e et s dans les deux cas. Les simplifier pour $e(t) = 0$ (régime libre). Comparer les signes des coefficients dans les deux équations différentielles. Peut-on faire une analogie avec l'étude mécanique précédente ?

Q5. En déduire le "régime établi" dans les deux cas.

Q6. Que se passe-t-il si une légère perturbation écarte le signal de sortie de son régime établi ? Donner la forme des solutions sans chercher à expliciter les constantes d'intégration. Discuter de la stabilité.

Q7. Commenter et comparez les résultats obtenus dans les deux situations (mécanique et électrique).



Aides pour les exercices

Exercice 1

Q1. Utiliser l'équivalence $(j\omega)^n \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$, avec $n \geq 1$.

Q2. Penser aux signes des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert.

Exercice 2

Q1. Un filtre est linéaire lorsqu'il n'introduit pas de nouvelles fréquences dans le signal d'entrée.

Q2. Il existe de nombreux cas de filtres linéaires, rencontrés en première année : filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande...

Exercice 3

Q1. Le spectre d'un signal est la représentation de l'amplitude de chacune de ces composantes fréquentielles en fonction de la fréquence. Développer la série de Fourier sur les premières valeurs de k pour analyser le contenu en fréquence du signal $s(t)$.

Q2. Signal sinusoïdal de fréquence .... et de valeur moyenne... (à compléter !)

Q3. Signal sinusoïdal de fréquence... et de valeur moyenne... (à compléter !)

Exercice 4

Q1. $\dfrac{\mathrm{d}^2 v_s}{\mathrm{d}t^2}(t) + \dfrac{3}{RC}\dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}(t) + \dfrac{v_s}{(RC)^2} = \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}(t)$

Q2. cf. exercice 1

Q3. cf. exercice 1

Q4. Diagrammes de Bode en amplitude et en phase. Penser à une analyse asymptotique pour accélérer le raisonnement.

Q5. On suppose que le signal $v_e(t)$ s'écrit sous la forme générale $v_e(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} V_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$. Pour un filtre linéaire, le signal de sortie $v_s(t)$ s'écrit :

$$v_s(t) = |\underline{H}(\omega = 0)| V_0 \cos(\arg(\underline{H}(\omega = 0))) + \sum_{k=1}^{+\infty} |\underline{H}(k\omega_0)| V_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k + \arg(\underline{H}(k\omega_0)))$$

Q6. et **Q7.** Reprendre la décomposition en série de Fourier de ces deux signaux et le raisonnement de l'exercice 3.

Exercice 5

Q1. $\underline{H} = \dfrac{1}{2 + jRC\omega}$. Équation différentielle : cf. exercice 1 pour le raisonnement.

Q2. Filtre stable.

Q3. Résoudre l'équation différentielle en posant $s(t = 0) = s(0)$.

Exercice 6

Q1. Poser toutes les lois des mailles, lois des noeuds et relations constitutives des dipôles R_1, R_2, C et L pour faire le lien entre $s(t)$ et $e(t)$ exclusivement. Il n'est pas autorisé de passer par la fonction de transfert dans cette question ! (cf. **Q2.**)

Q2. Penser au diviseur de tension, après l'avoir correctement justifié.

Q3. Système stable.

Q4. $H_0 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Q5. Distinguer les cas $x < 1$ et $x > 1$: seul l'argument d'un nombre réel **positif** est nul...

Q6. cf. exercice 4 pour le raisonnement.

Exercice 7

Q1. Coefficient d'atténuation.

Q2. Dériver l'équation différentielle une fois, et remplacer $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t)$ par son expression selon U à l'aide de la première équation. On trouve :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 v = H_0\omega_0\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

Q3. E étant une constante, $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 0$. On retrouve le résultat avec $\omega_0' = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$

Q4. Résultat intermédiaire : $\tau_E = \tau \ln(20)$.

Q5. Utiliser l'équivalence $(j\omega)^n \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$, avec $n \geq 1$.

Exercice 8

Q1. Cas a : $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\alpha}{m}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\dfrac{g}{l}\theta=0$. Cas b : $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\alpha}{m}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}-\dfrac{g}{l}\theta=0$

Q2. $\theta_{eq}=0$ dans les deux cas.

Q3. Sans résolution de l'équation différentielle : analyser le signe de $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_{pp}}{\mathrm{d}t^2}$, avec $\mathscr{E}_{pp}$ l'énergie potentielle de pesanteur du système.

Q4. Cas a' (RLC-série "classique") : $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{LC}s=\dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$. Cas b' : avec $v'=\dfrac{s}{G}$ et $v'+u_C=e$, on trouve (via les lois de KHIRCHHOFF) : $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-\dfrac{1}{LC}\left(G-1\right)s=G\dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}+G\dfrac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2}$. En remplaçant $e=0$ et $G=2$, on retrouve des équations similaires à celles étudiées dans la partie mécanique.

Q5. Faire l'analogie avec la question **Q3.**.