

## Corrigé du devoir maison n°1 - Électrocinétique

### Notions générales

### 1

 Associations de résistances

**Q1.** On utilise les règles d'association des dipôles en série et en parallèle.

— **Cas (a)** : deux résistances en série :

$$R_{eq} = 2R$$

— **Cas (b)** : cas (a) avec ajout d'une résistance en parallèle :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{2R}{3}$$

— **Cas (c)** : cas (b) avec une résistance en série :

$$R_{eq} = R + \frac{2R}{3} \Rightarrow R_{eq} = \frac{5R}{3}$$

**Q2. a.**  $R_2$  et  $R_3$  sont en parallèle. Leur résistance équivalente est  $R_{eq}$  telle que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

soit :

$$R_{eq} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad \text{A.N. : } R_{eq} = 8 \Omega$$

De plus,  $R_1$  et  $R_{eq}$  sont en série, donc leur résistance équivalente est :

$$R'_{eq} = R_1 + R_{eq} = \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad \text{A.N. : } R'_{eq} = 30 \Omega$$

Enfin,  $R_4$  et  $R'_{eq}$  sont en parallèle ; leur résistance équivalente est donc, selon le même calcul que pour obtenir  $R_{eq}$  :

$$R''_{eq} = \frac{R_4 R'_{eq}}{R_4 + R'_{eq}}$$

Or :

$$\begin{cases} R_4 R'_{eq} = \frac{R_4 R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3 R_4}{R_2 + R_3} \\ R_4 + R'_{eq} = \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{R_2 + R_3} \end{cases}$$

donc

$$R''_{eq} = \frac{R_4 R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3 R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \quad \text{A.N. : } R''_{eq} = 15 \Omega$$

**b.** On reconnaît dans la branche supérieure un pont diviseur de tension. Ainsi :

$$U_{BC} = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_1} U_{AC} = \frac{R_2 R_3}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3} U_{AC} \quad \text{A.N. : } U_{BC} = 8 \text{ V}$$

**c.** Soit  $i_1$  et  $i_2$  les courants dans les branches supérieure et inférieure du circuit, respectivement. Ces courants s'obtiennent par application directe de la loi d'Ohm aux bornes de  $R'_{eq}$  et  $R_4$  respectivement :

$$\begin{cases} U_{AC} = R'_{eq} i_1 \Leftrightarrow i_1 = \frac{U_{AC}}{R'_{eq}} & \text{A.N. : } i_1 = 1 \text{ A} \\ U_{AC} = R_4 i_2 \Leftrightarrow i_2 = \frac{U_{AC}}{R_4} & \text{A.N. : } i_2 = 1 \text{ A} = i_1 \end{cases}$$

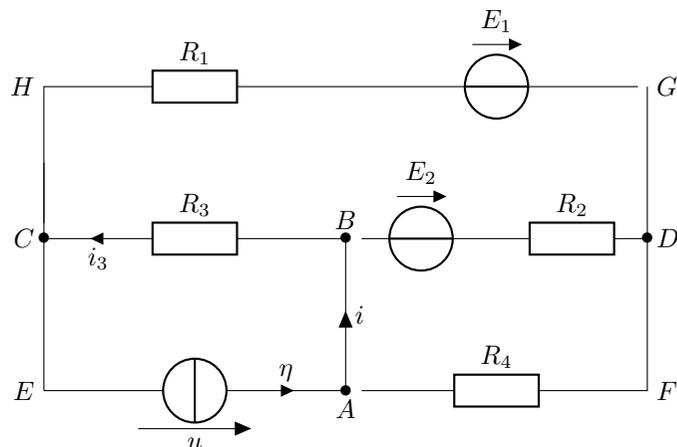
Le courant  $i_1$  traverse la résistance  $R_1$ . Pour obtenir les courants  $i'_1$  et  $i''_1$  qui traversent les résistances  $R_2$  et  $R_3$  respectivement, on applique les relations du pont diviseur de courant :

$$\begin{cases} i'_1 = \frac{R_{eq}}{R_2} i_1 \Leftrightarrow i'_1 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} i_1 & \text{A.N. : } i'_1 = \frac{1}{3} \text{ A} \\ i''_1 = \frac{R_{eq}}{R_3} i_1 \Leftrightarrow i''_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_1 & \text{A.N. : } i''_1 = \frac{2}{3} \text{ A} = 2i'_1 \end{cases}$$

**d.** Par définition :  $P_J = U_{AC} \cdot i_2 = R_4 i_2^2 \quad \text{A.N. : } P_J = 30 \text{ W}$

## 2 Analyse numérique d'un circuit

**Q1.** Les nœuds sont repérés par les lettres  $A, B, C$  et  $D$ , comme le montre le schéma ci-dessous :



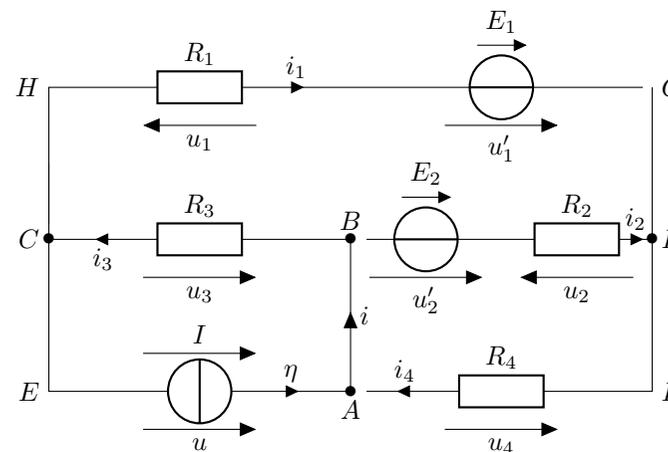
Les lettres  $E, F, G$  et  $H$  ne symbolisent pas des nœuds, mais permettent de repérer des points particuliers du circuit.

Les mailles du circuit sont ainsi repérées par les chemins  $C \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ ,  $A \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$ ,  $C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow C$  et  $E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow E$ , pour les plus "simples" d'entre elles.

Les branches sont les chemins qui relient les nœuds entre eux; on trouve ainsi les branches  $C - B, B - D, A - B, C - E - A, A - F - D, D - G - H - C$ .

- Q2.**
- Deux composants sont en dérivation s'ils sont soumis à la même différence de potentiels (ddp). La ddp aux bornes de  $R_3$  est  $u_3 = V_B - V_C$ , celle aux bornes de la source idéale de courant est  $u = V_A - V_C$ . Or les points  $A$  et  $B$  sont connectés par des fils. Ainsi  $V_A = V_B$ , donc  $u_3 = u$  : les deux composants sont bien branchés en dérivation.
  - Deux composants sont branchés en série s'ils sont traversés par le même courant  $i$ . Puisque les composants  $R_3$  et  $R_4$  n'appartiennent pas à la même branche, il n'y a aucune raison *a priori* que les courants les traversant soient les mêmes. Ces résistances ne sont donc pas branchées en série.

**Q3.** Les notations (avec les conventions demandées) sont données par la figure ci-dessous :



*Remarque :* il est ici évident que  $I = \eta, u'_2 = E_2$  et  $u'_1 = E_1$ .

**Q4.** On cherche à exprimer les intensités des courants  $i_1, i_2$  et  $i_4$  en fonction de  $i, i_3$  et la grandeur déjà connue,  $\eta$ . En appliquant la loi des nœuds en  $A, B, C$  et  $D$ , il vient :

$$\begin{cases} i & = \eta + i_4 \\ i & = i_3 + i_2 \\ i_3 & = \eta + i_1 \\ i_2 + i_1 & = i_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_4 & = i - \eta \\ i_2 & = i - i_3 \\ i_1 & = i_3 - \eta \\ i_2 + i_1 & = i_4 \end{cases}$$

On montre ainsi qu'en connaissant les intensités des courants  $i$  et  $i_3$ , on retrouve les intensités manquantes.

*Remarque :* la quatrième équation est redondante (combinaison linéaire des trois premières).

**Q5.** On rappelle la loi d'OHM aux bornes d'un conducteur ohmique :  $u = Ri$  (attention : convention récepteur !)

- On considère la maille  $C \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$  :

$$u - u_3 = 0 \Rightarrow \boxed{u - R_3 i_3 = 0}$$

- On considère la maille  $A \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$  :

$$u_4 + u_2 - E_2 = 0 \Rightarrow R_4 i_4 + R_2 i_2 - E_2 = 0$$

soit, en remplaçant  $i_2$  et  $i_4$  par leurs expressions selon  $i, i_3$  et  $\eta$  :

$$\boxed{R_4(i - \eta) + R_2(i - i_3) - E_2 = 0}$$

- On considère la maille  $C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow C$  :

$$u_3 + E_2 - u_2 - E_1 + u_1 = 0$$

$$\Rightarrow R_3 i_3 + E_2 - R_2(i - i_3) - E_1 + R_1(i_3 - \eta) = 0$$

Remarque : d'autres choix de maille sont possibles. Par exemple, avec la maille  $E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow E$  :

$$u + u_4 - E_1 + u_1 = 0 \Rightarrow u + R_4 i_4 - E_1 + R_1 i_1 = 0$$

En remplaçant  $i_1$  et  $i_4$  par leurs expressions selon  $i$ ,  $i_3$  et  $\eta$ , on trouve :

$$u + R_4 i - E_1 + R_1 i_3 - (R_4 + R_1)\eta = 0$$

Q6. On écrit, en le complétant, le programme proposé :

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2
3 from sympy import symbols, solve, pprint
4
5 u, i, i3 = symbols('u i i3') # Inconnues
6 E1, E2, eta = symbols('E1 E2 eta') # Donnees
7 R1, R2, R3, R4 = symbols('R1 R2 R3 R4') # Donnees
8 sol=solve((u-R3*i3, R4*(i-eta)+R2*(i-i3)-E2, R3*i3+E2-R2*(i-i3)-E1+
9           R1*(i3-eta)),u,i,i3)
9 pprint(sol)
10 #print(latex(sol)) # Pour un rendu LaTeX de la solution

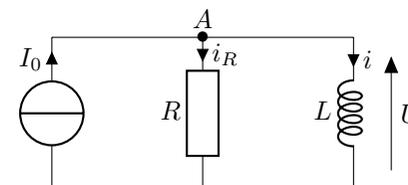
```

On obtient pour résultat :

$$\begin{cases} i &= -\frac{R_2(E_1 - E_2 + R_1\eta) + (E_2 + R_4\eta)(R_1 + R_2 + R_3)}{R_2^2 - (R_2 + R_4)(R_1 + R_2 + R_3)} \\ i_3 &= -\frac{R_2(E_2 + R_4\eta) + (R_2 + R_4)(E_1 - E_2 + R_1\eta)}{R_2^2 - (R_2 + R_4)(R_1 + R_2 + R_3)} \\ u &= -R_3 \frac{R_2(E_2 + R_4\eta) + (R_2 + R_4)(E_1 - E_2 + R_1\eta)}{R_2^2 - (R_2 + R_4)(R_1 + R_2 + R_3)} \end{cases}$$

## Circuits du premier ordre

### 3 Circuit RL



Q1. En appliquant la loi des noeuds au noeud A, on obtient :  $I_0 = i_R + i$ . Or  $U = L \frac{di}{dt}$ , donc, puisque  $U_R = U = R i_R$ ,  $i_R = \frac{U}{R} = \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$ . Ainsi :

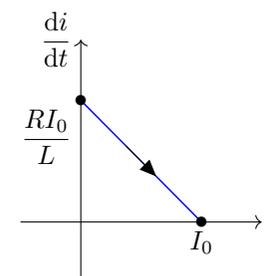
$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = I_0$$

soit :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{R}{L} I_0$$

Portrait de phase :

On trace la courbe représentant  $\frac{di}{dt}$  en fonction de  $i$ . L'équation de cette courbe est  $\frac{di}{dt} = \frac{R}{L}(I_0 - i)$ , comme vu précédemment. Il s'agit donc d'une droite de pente  $-\frac{R}{L}$  et d'ordonnée à l'origine  $\frac{RI_0}{L}$  :



À  $t = 0$ , le courant dans la bobine est nul  $i(0) = 0$ . Une fois l'interrupteur fermé, le courant augmente, d'abord "rapidement" ( $\frac{di}{dt}$  maximum), puis de moins en moins vite, jusqu'à atteindre sa valeur en régime permanent,  $I_0$ .

### Equation horaire du courant $i$ :

On résout l'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants régissant l'évolution de  $i$  :

- **Equation à second membre nul** : une solution de l'équation  $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$  est :

$$i_S(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec  $A$  une constante réelle et  $\tau = \frac{L}{R}$  ;

- **Solution particulière** : une solution particulière de l'équation différentielle est  $i_p = I_0$ .

La solution générale est donc :  $i(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + I_0$ . Or  $i(0) = 0$ , donc  $A + I_0 = 0$ , soit  $A = -I_0$ . Ainsi l'équation horaire du courant est :

$$i(t) = I_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

### Equation horaire de la tension $U$ :

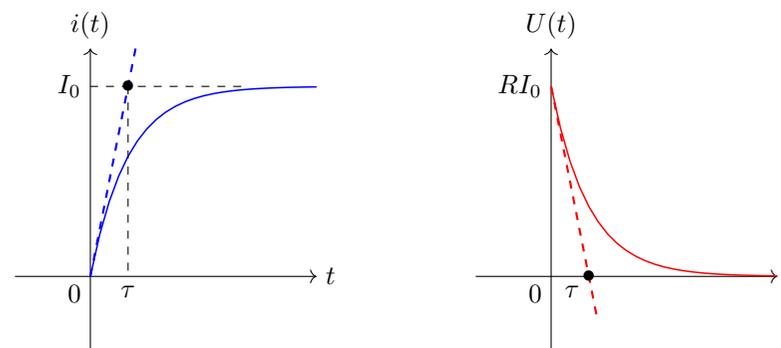
On sait que  $U = L \frac{di}{dt}$ . Ainsi :

$$U(t) = \frac{LI_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

soit :

$$U(t) = RI_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Remarque : représentations graphiques de  $i(t)$  et  $U(t)$  :



On constate que l'évolution de  $i$  respecte la description du portrait de phase : une progression de moins en moins rapide vers la valeur permanente  $I_0$ .

### Q2. Analyse aux limites :

- à  $t = 0$  :  $i(0) = 0$  donc la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert. Tout le courant  $I_0$  passe dans la résistance, dont la tension à ses bornes s'écrit  $U(0) = RI_0$ .
- le régime permanent est atteint pour  $t \rightarrow \infty$ . La bobine se comporte alors comme un fil qui court-circuite la résistance :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = I_0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} i_R(t) = 0$ . Ainsi  $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = 0$  car  $U(t) = Ri_R(t)$ .

Ceci est en accord avec les résultats précédents (cf. représentations graphiques).

### Q3. Cas général : on sait que l'équation différentielle régissant le comportement de $i(t)$ est $\frac{L}{R} \frac{di(t)}{dt} + i(t) = I_0$ . En multipliant cette équation par $U(t)$ , on obtient :

$$U(t) \times \frac{L}{R} \frac{di(t)}{dt} + U(t) \times i(t) = U(t) \times I_0$$

$$U(t) \times \frac{L}{R} \frac{di(t)}{dt} + U(t) \times i(t) = U(t) \times I_0$$

Or  $U(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ , donc  $U(t) \times i(t) = i(t) \times L \frac{di(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2(t) \right) = \mathcal{P}_{\text{mag}}$ , qui est la puissance magnétique stockée par la bobine au cours du temps.

Par ailleurs, la puissance dissipée par effet Joule aux bornes de la résistance s'écrit  $\mathcal{P}_J = U(t)i_R(t)$ . Comme  $i_R = \frac{U}{R} = \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$ , on trouve :  $\mathcal{P}_J = U(t) \times \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$ . En résumé, l'expression précédente relie les trois termes suivants :

- la puissance délivrée par le générateur :  $\mathcal{P}_G = U(t) \times I_0$  ;

- la puissance dissipée par effet Joule aux bornes de la résistance :  $\mathcal{P}_J = U(t) \times \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$ ;
- la puissance magnétique stockée par la bobine :  $\mathcal{P}_{\text{mag}} = U(t) \times i(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2(t) \right)$ .

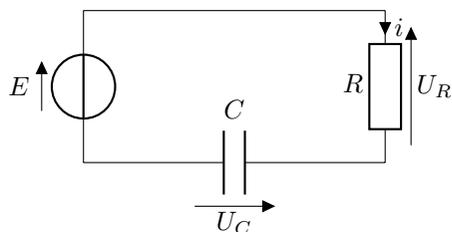
Il y a donc conservation de la puissance électrique délivrée par le générateur à tout instant  $t$  :

$$\mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{\text{mag}} = \mathcal{P}_G$$

## Oscillateurs

### 4 Charge et décharge d'un condensateur

1- Soit le schéma électrique du montage une fois l'interrupteur fermé :



- a. On sait que  $q(t) = CU_C(t)$ , et  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ . Or, selon la loi des mailles :  $U_C(t) + U_R(t) = E$ , donc, avec  $U_R(t) = Ri(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$  :

$$\frac{1}{C}q(t) + R \frac{dq(t)}{dt} = E$$

soit :

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{E}{R}$$

- b. Il s'agit de la résolution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. La condition initiale sur la charge est  $q(0) = 0$  car le condensateur est déchargé à l'instant initial. La solution de cette équation est donc :

$$q(t) = CE \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

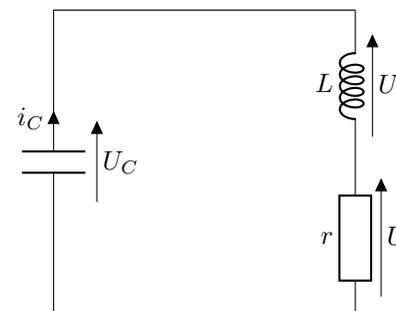
avec  $\tau = RC$ .

- c. En régime permanent  $t \rightarrow +\infty$ . Ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = CE$$

*Remarque : cette relation est cohérente en termes de dimensions, car le produit d'une capacité par une tension donne bien une charge (cf.  $q = CU$ ).*

2- La bobine peut-être vue comme la mise en série d'une inductance idéale  $L$  et d'une résistance  $r$  :



- a. La loi des mailles donne :  $U_C(t) = U_r(t) + U_L(t)$ . Or  $i_C(t) = -C \frac{dU_C(t)}{dt}$  (**attention à la convention générateur adopté pour le condensateur dans ce cas!**) et  $U_L = L \frac{di_C(t)}{dt} = -LC \frac{d^2U_C(t)}{dt^2}$ , donc :

$$U_C(t) = -rC \frac{dU_C(t)}{dt} - LC \frac{d^2U_C(t)}{dt^2}$$

soit :

$$\frac{d^2U_C(t)}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}U_C(t) = 0$$

- b. La courbe représente un signal pseudo-périodique de la forme  $s(t) = \exp(-\alpha t) (A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t))$ , qui est une solution de l'équation différentielle précédente.

*Remarque : les deux autres solutions possibles sont le régime aperiodique et le régime critique.*

Écrivons l'équation différentielle précédente sous forme canonique :

$$\frac{d^2U_C(t)}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \frac{dU_C(t)}{dt} + \omega_0^2 U_C(t) = 0$$

avec :

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \lambda = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

La résolution de cette équation différentielle passe par la résolution du polynôme caractéristique :

$$m^2 + 2\lambda\omega_0 m + \omega_0^2 = 0$$

La solution pseudo-périodique s'obtient pour  $\Delta = (2\lambda\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 < 0$  soit  $4\omega_0^2(\lambda^2 - 1) < 0$ . On pose  $\Delta = 4j^2\omega_0^2(1 - \lambda^2)$ . Les deux solutions sont alors :

$$\begin{cases} m_+ = \frac{-2\lambda\omega_0 + j\sqrt{4\omega_0^2(1 - \lambda^2)}}{2} = -\lambda\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \lambda^2} \\ m_- = \frac{-2\lambda\omega_0 - j\sqrt{4\omega_0^2(1 - \lambda^2)}}{2} = -\lambda\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \lambda^2} \end{cases}$$

Ainsi  $U_C(t) = u_+(t) + u_-(t) = A \exp(r_+t) + B \exp(r_-t)$  avec  $A$  et  $B$  des constantes réelles. Cette expression devient :

$$U_C(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) (A \exp(j\omega t) + B \exp(-j\omega t))$$

avec  $\tau = \frac{1}{\lambda\omega_0}$  le temps de décroissance exponentielle du signal, et  $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \lambda^2}$  la pseudo-pulsation. La pseudo-période  $T$  a donc pour expression :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

À l'aide des expressions de  $\omega_0$  et  $\lambda$ , nous obtenons finalement :

$$\begin{cases} \tau = \frac{1}{\lambda\omega_0} = \frac{2L}{r} \\ T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \lambda^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}} \end{cases}$$

**Lecture graphique :**

On remarque que 5 pseudo-périodes sur la courbe correspondent à 10 divisions, soit  $10 \mu\text{s}$ . La pseudo-période vaut donc  $T = 2 \mu\text{s}$ .

Le temps de décroissance exponentielle s'obtient en traçant l'enveloppe du signal. Cette enveloppe est une exponentielle décroissante sur la partie supérieure de la courbe ; la valeur à 37% de cette fonction correspond est obtenue au bout du temps  $\tau$ . On obtient ici, avec  $U_C(0) = 1,6 \text{ V}$  par lecture graphique donc  $0,37U_C(0) \simeq 0,6 \text{ V}$  :  $\tau \simeq 3 \mu\text{s}$ .

*Remarque : cette dernière mesure reste relativement imprécise.*

c. Le facteur de qualité  $Q$  est lié au coefficient d'amortissement  $\lambda$  par :  $Q = \frac{1}{2\lambda}$ . Ainsi :

$$Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

En combinant les expressions de  $T$  et de  $\tau$ , nous pouvons exprimer  $R$  et  $L$  :

$$\begin{cases} r = \frac{2\tau T^2}{C(4\pi^2\tau^2 + T^2)} & \text{A.N. : } r \simeq 6,4 \cdot 10^2 \Omega \\ L = \frac{r\tau}{2} = \frac{\tau^2 T^2}{C(4\pi^2\tau^2 + T^2)} & \text{A.N. : } L \simeq 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ H} \end{cases}$$

On en déduit la valeur de  $Q$  :  $Q \simeq 5$ .

*Remarque :  $Q > \frac{1}{2}$ , donc le régime d'oscillations est bien pseudo-périodique. Par ailleurs,  $Q \simeq 5$  correspond au nombre de pseudo-périodes observables sur le graphique.*

**Charge initiale du condensateur :** Nous avons obtenu graphiquement  $U_C(0) = 1,6 \text{ V}$ . Or  $q(t) = CU_C(t)$ , donc  $q(0) = CU_C(0)$ .

**A.N. :**  $q(0) \simeq 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ C}$

## Filtres du premier et second ordre

### 5

## Filtre inconnu du premier ordre

1 - Considérons les cas où  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow +\infty$  :

- $\omega \rightarrow 0$  : le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. La tension  $v_s$  est alors celle aux bornes de la résistance  $R/2$ . Cette configuration est un pont

diviseur de tension, donc :

$$v_s = \frac{R/2}{R/2 + R} v_e = \frac{v_e}{3}$$

- $\omega \rightarrow +\infty$  : le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé. La tension  $v_s$  est alors nulle.

Le filtre est donc un filtre passe-bas.

2 - L'impédance complexe à l'association de  $R/2$  et  $C$  en parallèle est :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{R/2} = jC\omega + \frac{1}{R/2}$$

soit :

$$Z_{eq} = \frac{R/2}{1 + j\frac{R}{2}C\omega}$$

On se retrouve de nouveau dans une configuration de pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} v_e \\ \Leftrightarrow \underline{v_s} &= \frac{R/2}{(1 + j\frac{R}{2}C\omega) \left( R + \frac{R/2}{1 + j\frac{R}{2}C\omega} \right)} v_e \\ \Leftrightarrow \underline{v_s} &= \frac{1}{1 + 2(1 + j\frac{R}{2}C\omega)} \\ \Leftrightarrow \underline{v_s} &= \frac{1/3}{1 + j\frac{RC}{3}\omega} \end{aligned}$$

On pose  $H_0 = \frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{\omega_0} = \frac{RC}{3}$ . Ainsi :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$H_0$  représente le gain statique du filtre.  $\omega_0$  est sa pulsation de coupure, pour laquelle  $|\underline{H}(j\omega_0)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$ .

Le comportement asymptotique s'obtient en considérant les deux cas  $\omega \ll \omega_0$  et  $\omega \gg \omega_0$ .

domaines de pulsation	$\omega \ll \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
numérateur	$H_0$	$\frac{H_0}{\omega}$
dénominateur	1	$j\frac{\omega}{\omega_0}$
$\underline{H}(j\omega)$	$H_0$	$-j\frac{H_0}{\omega}$
$G_{dB} = 20 \log( \underline{H}(j\omega) )$	0	$\propto -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
pentés	nulle	-20dB/décades

*Remarque* : en vu du diagramme de Bode en amplitude fourni, le gain en décibel n'est pas normalisé. L'expression classique du cours  $G_{dB} = 20 \log\left(\left|\frac{\underline{H}(j\omega)}{H_0}\right|\right)$  doit donc être remplacée par  $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}(j\omega)|)$ .

3 - Le module et la phase de la fonction de transfert sont :

$$\begin{cases} |\underline{H}(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \\ \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg(H_0) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \end{cases}$$

4 -

a. Le diagramme de Bode en amplitude montre que :

- le gain est maximum pour les fréquences  $f < 100$  Hz ;
- pour  $f \gg 200$  Hz environ, la pente de la caractéristique représentée est de -20 dB/décades. Par exemple,  $G_{dB}(700 \text{ Hz}) = -20$  dB et  $G_{dB}(7000 \text{ Hz}) = -40$  dB.

Ceci est caractéristique d'un filtre passe-bas d'ordre 1.

b. La fréquence de coupure  $f_0$  est obtenue pour un gain diminuer de 3 dB par rapport à sa valeur maximale, soit  $G_{dB}(0) = G_{max} = -20 \log(H_0) = -9,5$  dB. Ainsi :  $G_{dB}(f_0) = G_{max} - 3 = -12,5$  dB. Ceci correspond à une fréquence d'environ 200 Hz par lecture graphique, donc :

$$f_0 \simeq 200 \text{ Hz}$$

5 - On sait que  $\omega_0 = \frac{3}{RC} = 2\pi f_0$ , donc  $C = \frac{1}{6\pi R f_0}$ . A.N. :  $C \simeq 2,7 \cdot 10^{-7}$  F.

6 - Soit un signal d'entrée  $e(t)$  constitué de  $N$  signaux harmoniques :

$$e(t) = \sum_{i=1}^N e_i(t)$$

avec  $e_i(t) = E_i \cos(\omega_i t)$ , des signaux harmoniques de pulsation  $\omega_i$ . Chaque harmonique est modifiée par le filtre de fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega_i)$  et donne un signal de sortie  $s_i(t)$  tel que :

$$s_i(t) = (|\underline{H}(j\omega_i)| \times E_i) \cos(\omega_i t + \arg(\underline{H}(j\omega_i)))$$

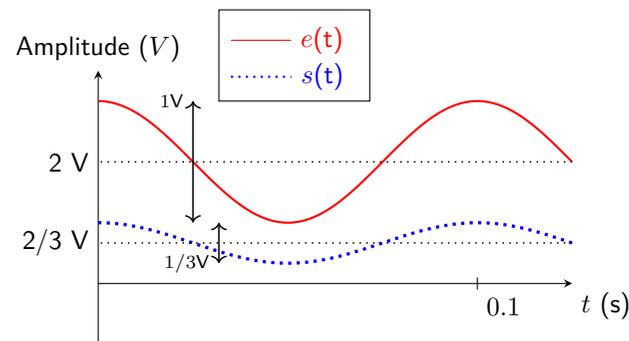
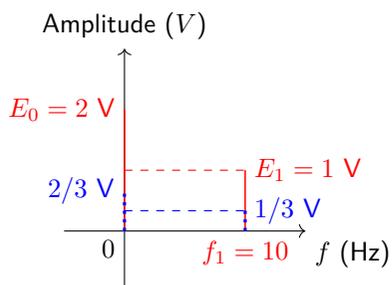
En posant  $f_1 = 10\text{Hz}$ ,  $f_2 = 300\text{Hz}$ ,  $f_3 = 3000\text{Hz}$ , et  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  leurs pulsations associées, nous pouvons écrire :

pulsations	0	$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{20}$	$\frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{3}{2}$	$\frac{\omega_3}{\omega_0} = 15$
$ \underline{H}(j\omega_i) $	$H_0$	$\simeq 0,999H_0$	$\simeq 0,555H_0$	$\simeq 0,067H_0$
$\arg(\underline{H}(j\omega_i))$	0	$\simeq -0,05 \text{ rad}$	$\simeq -0,98 \text{ rad}$	$\simeq -1,50 \text{ rad}$

entrée	sortie
$e_0(t) = E_0$	$s_0(t) = H_0 \times E_0 = \frac{E_0}{3}$
$e_1(t) = E_1 \cos(\omega_1 t)$	$s_1(t) =  \underline{H}(j\omega_1)  \times E_1 \cos(\omega_1 t + \arg(\underline{H}(j\omega_1)))$ $= 0,999 \frac{E_1}{3} \cos(\omega_1 t - 0,05)$
$e_2(t) = E_2 \cos(\omega_2 t)$	$s_2(t) = 0,555 \frac{E_2}{3} \cos(\omega_2 t - 0,98)$
$e_3(t) = E_3 \cos(\omega_3 t)$	$s_3(t) = 0,067 \frac{E_3}{3} \cos(\omega_3 t - 1,50)$

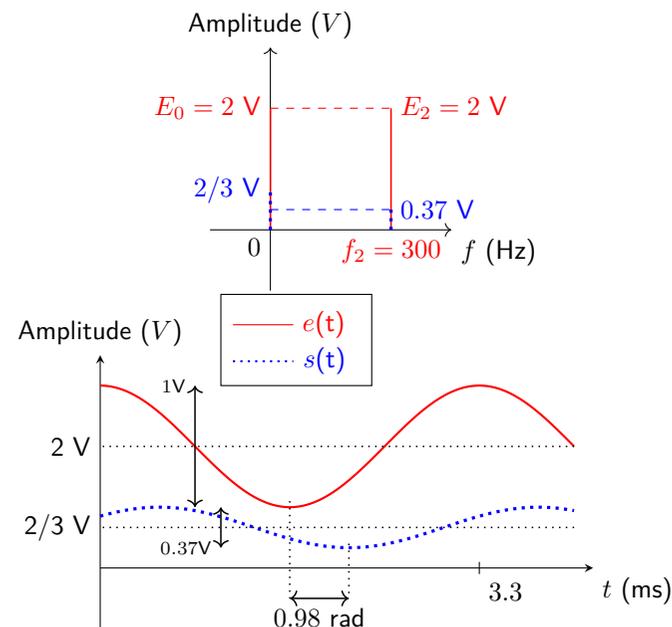
avec  $E_0$  la composante continue des signaux, c'est-à-dire pour  $\omega = 0$  :  $E_0 = 2\text{V}$ .

**Cas 1** :  $f_1 = 10 \text{ Hz}$  :



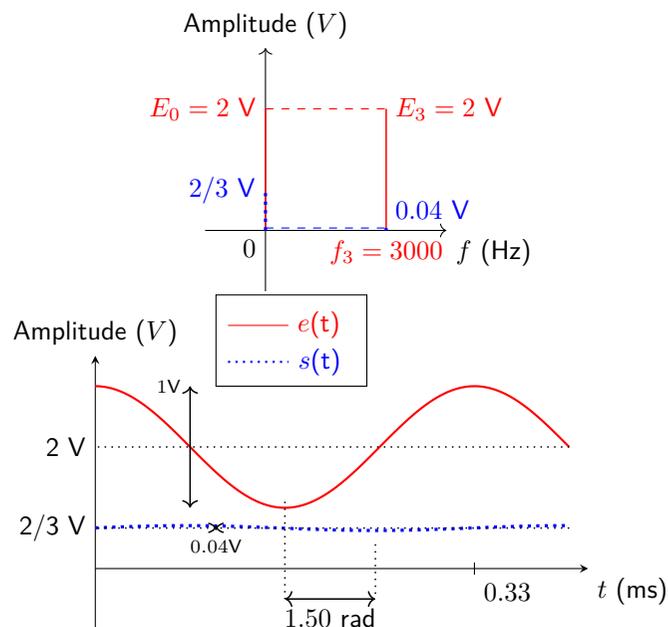
Dans ce cas, les composantes  $e_0$  et  $e_1$  de  $e(t)$  sont atténuées d'environ  $H_0$ , et la composante  $e_1$  est déphasée de  $-0.05 \text{ rad}$  en sortie de filtre, ce qui est négligeable ( $\ll 1^\circ$ ).

**Cas 2** :  $f_2 = 300 \text{ Hz}$  :



Dans ce cas, la composante continue  $e_0$  de  $e(t)$  reste atténuée de  $H_0$  et ne subit pas de déphasage, et la composante  $e_2$  est atténuée du facteur  $|\underline{H}(j\omega_2)| = \frac{0.555}{3}$  et déphasée de  $-0.98 \text{ rad}$  en sortie de filtre, soit environ  $56^\circ$ , ce qui n'est pas négligeable.

**Cas 3** :  $f_3 = 3000 \text{ Hz}$  :



Dans ce cas, la composante continue  $e_0$  de  $e(t)$  reste atténuée de  $H_0$  et ne subit pas de déphasage, et la composante  $e_3$  est fortement atténuée d'un facteur  $|H(j\omega_3)| = \frac{0.067}{3} \simeq 0.02$  et déphasée de  $-1.50$  rad en sortie de filtre, soit environ  $86^\circ$ . Le signal de sortie peut donc être considéré continu.

## 6

## Filtre RLC

**Q1.** Pour analyser sans calculs la nature d'un filtre, il faut étudier son comportement asymptotique :

- Pour  $\omega \rightarrow 0$  : le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert ( $Z_C \rightarrow +\infty$ ) et la bobine comme un fil ( $Z_L \rightarrow 0$ ). La tension  $u_L$  aux bornes de la bobine est donc nulle, et aucun courant ne traverse la résistance, donc  $u_R = 0$ . On en déduit  $v_s = u_R + u_L = 0$ ;
- Pour  $\omega \rightarrow +\infty$  : le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert. Une loi des mailles implique directement  $v_s = v_e \neq 0$ .

Le filtre est donc un passe-haut.

**Q2.** On applique la relation du diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{Z_R + Z_L}{Z_R + Z_L + Z_C}$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{R + jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega - LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

On peut alors identifier les termes selon la forme proposée. Par définition de l'énoncé,  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , donc :

- $LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- $RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0 Q} \Rightarrow Q = \frac{1}{\omega_0 RC} \Rightarrow Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

**Q3.** En très basse fréquence,  $x \ll 1$ . La fonction de transfert se simplifie donc de la manière suivante :

$$\underline{H} \simeq \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1} = j \frac{\omega}{Q\omega_0}$$

Le gain en décibel s'écrit donc :

$$G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) \simeq 20 \log\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right) = 20 \log(\omega) - 20 \log(Q\omega_0)$$

La pente du diagramme de BODE en amplitude est donc de  $+20$  dB/décade à basse fréquence (comportement dérivateur).

En très haute fréquence,  $x \gg 1$ . La fonction de transfert se simplifie donc de la manière suivante :

$$\underline{H} \simeq \frac{-x^2}{-x^2} = 1$$

d'où  $G_{dB} = 0$ , ce qui est conforme avec une asymptote horizontale.

On peut obtenir la valeur de  $Q$  à partir de la valeur de  $G_{dB}$  pour  $x \ll 1$ . Par exemple, pour  $x = 10^{-3}$ ,  $G_{dB} = -80$  dB. Or, nous venons de voir que dans le cas  $x \ll 1$ ,  $G_{dB} \simeq 20 \log(x) - 20 \log(Q)$ . Ainsi :

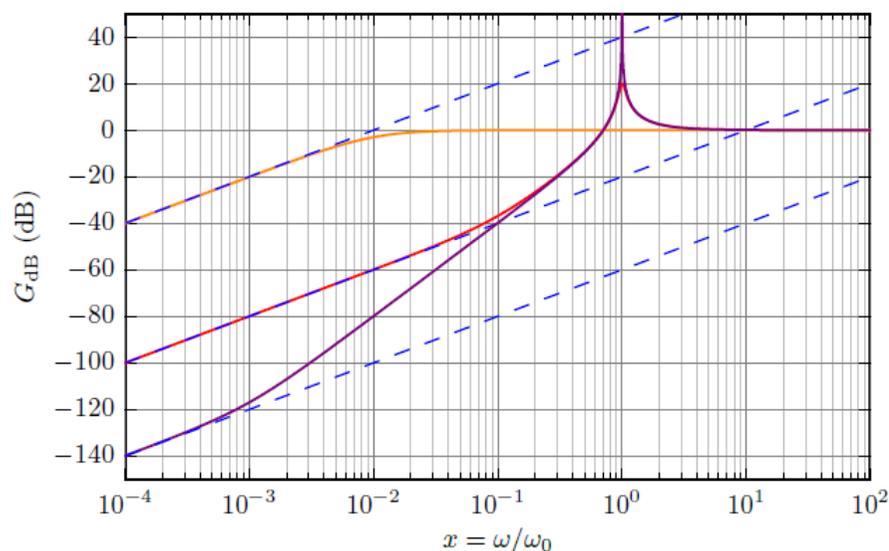
$$20 \log(10^{-3}) - 20 \log(Q) = -80 \Rightarrow -20 \log(Q) = -20 \Rightarrow \boxed{Q \simeq 10}$$

*Remarque : on peut également remarquer que pour  $x = 1$ ,  $G_{dB} = 10 \log(1 + Q^2)$  et selon le diagramme,  $G_{dB}(x = 1) = +20$  dB, d'où  $Q = 10$ .*

**Q4.** L'allure du diagramme de BODE en amplitude est influencée par deux paramètres :  $\omega_0$  et  $Q$ .  $R$  n'intervient que dans  $Q$  et pas dans  $\omega_0$ . Or modifier  $Q$  peut impliquer deux effets :

- une modification de l'ordonnée à l'origine de l'asymptote oblique (repérée par  $x = 0$ , donc  $10^0 = 1$  en échelle logarithmique) ;
- une accentuation ou une diminution ( $Q$  faible) de l'amplitude du pic de résonance observé en  $x = 0$ , respectivement si  $Q$  augmente ou diminue.

Le graphique suivant représente trois situations différentes suivant les valeurs de  $Q$  :



Les trois diagrammes sont tracés pour la même fonction de transfert, la même pulsation propre, seule la valeur du facteur de qualité est modifiée : elle vaut 0,01 pour la courbe supérieure (orange), 10 pour la courbe intermédiaire (rouge, cas de l'énoncé) et 1000 pour la courbe inférieure (violette).

Supposons que le signal d'entrée soit tel que  $x = 1 \cdot 10^{-3}$  (par exemple : le filtre possède une fréquence de résonance  $f_0 = 100$  kHz et  $f = 100$  Hz). Pour rappel, le spectre d'un signal triangulaire de fréquence  $f$  est composé de signaux de fréquence  $f$  et les multiples impairs de  $f$  ( $3f, 5f, 7f \dots$ ).

- Le signal créneau est issu de la dérivation du signal triangulaire : le filtre joue le rôle d'un dérivateur atténuateur sur une grande partie de l'intervalle de fréquences du signal. La valeur de  $Q$  est donc suffisamment élevée pour que le filtre se comporte en dérivateur sur une plage importante de fréquence : le diagramme de BODE d'un tel filtre est typiquement le diagramme proposé dans l'énoncé (rouge sur la figure précédente).
- Les impulsions sont des signaux présentant des variations très brutales d'amplitude donc un contenu spectral très riche en hautes fréquences. Les basses fréquences sont atténuées, et les hautes fréquences conservées. Le diagramme de BODE d'un tel filtre peut donc être le diagramme supérieur (orange) de la figure précédente.