Évaluation des incertitudes

I Contexte

L'évaluation des incertitudes expérimentales constitue une partie importante du travail d'un(e) expérimentateur(trice). C'est par l'estimation des incertitudes que l'on peut critiquer la "qualité" d'un mesurage [1]. Le niveau d'expérience et la maîtrise du protocole expérimental sont essentiels pour cela, mais la formalisation de l'évaluation des incertitudes est régie par un ensemble de règles internationales, définies par le Bureau International des Poids et Mesure dans le document fondamental *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure* (souvent cité en tant que « GUM »). Ce document de référence (en français) est disponible librement sur le site :

https ://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm/wg/jcgm-wg1-gum

Ce document a pour objectifs de rappeler les méthodes d'évaluation des incertitudes. Il est basé sur le travail d'un collègue de CPGE, Maxime Champion, lui-même inspiré des recommandations du GUM.

II Notion d'incertitude-type

II.1 Variabilité d'une mesure

La variabilité d'une mesure est une réalité intrinsèque à l'activité expérimentale. Elle est issue de la complexité du processus de mesure, même le plus élémentaire comme la mesure d'une durée : la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Loin d'être un "défaut de protocole" ou "une erreur expérimentale", cette variabilité renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique !

Parmi les causes de variabilité, nous trouvons le choix de la méthode de mesure (mesurer une distance à la règle ou au pied à coulisse n'implique pas la même précision), les variations de l'environnement (maîtrise des paramètres comme la température, la pression etc.), les instruments de mesure (qualité de l'appareillage etc.), au processus physique lui-même (toute la physique n'est pas déterministe : pensons à la mécanique quantique !) et l'expérimentateur lui-même ! Ce dernier cas est souvent la cause la plus importante de variabilité de la mesure, et s'atténue avec le degré d'expérience de l'expérimentateur : il est donc naturel que deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.

II.2 Incertitude-type

Définition

La quantification de la variabilité d'une mesure x d'une grandeur est appelée **incertitude-type** et notée $u(x)$. Par définition, l'incertitude-type correspond à l'écart-type de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.

Par convention, le résultat d'une mesure sera noté $x \pm u(x)$.

Propriété

La variabilité d'un processus de mesure avec un protocole, du matériel et des conditions expérimentales données, impliquant une ou plusieurs personnes dans l'expérience, est mesurée par une unique incertitude-type.

1. Mesurage : action de mesurer, i.e. ensemble des opérations nécessaires pour obtenir une mesure

Incertitude-type « relative » : On peut définir de plus l'incertitude-type de mesure « relative » la grandeur $\frac{u(x)}{x}$, que l'on donne généralement en pourcentage.

II.3 Interprétation

Revenons à la définition de l'incertitude-type. Soit un ensemble de N mesures notées x_i avec i allant de 1 à N. On définit la moyenne $\bar{x}$ de l'ensemble, qui nous permet de définir l'écart-type, et donc l'incertitude-type, grâce aux relations :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{et} \quad u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Il est à noter qu'il n'y a qu'une incertitude-type $u(x)$ pour l'ensemble des mesures x_i, et non pas une pour chacune. En effet, l'incertitude-type caractérise la variabilité d'un processus de mesure, et donc toutes les mesures issues de ce processus ont logiquement la même incertitude-type.

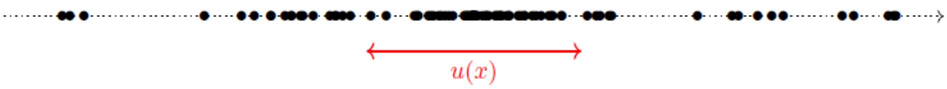


FIGURE 1 – *Représentation d'une série de 100 mesures d'une grandeur x ainsi que de la largeur de l'incertitude-type de cet ensemble.*

La figure 1 représente une distribution de mesures ainsi que l'incertitude-type. On constate qu'en moyenne deux valeurs prises au hasard sont séparées de quelques $u(x)$. Toutefois, on constate aussi que quelques points sont très éloignés des autres. Il ne s'agit pas de points aberrants, mais de valeurs dans des domaines peu fréquents car peu probables mais tout de même possibles.

Propriété

L'incertitude-type permet de quantifier la variabilité d'une mesure. Ainsi, deux mesures x_1 et x_2 issues du même processus sont séparées en moyenne de quelques $u(x)$ par construction de l'incertitude-type en tant qu'écart-type.

II.4 Écart normalisé

L'écart normalisé, ou z-score, est un outil quantitatif de comparaison entre deux mesures connaissant les valeurs de ces mesures et leurs incertitude-types.

Définition

L'écart normalisé E_N entre deux processus de mesure donnant les valeurs m_1 et m_2 d'incertitude-types respectives $u(m_1)$ et $u(m_2)$ est défini par :

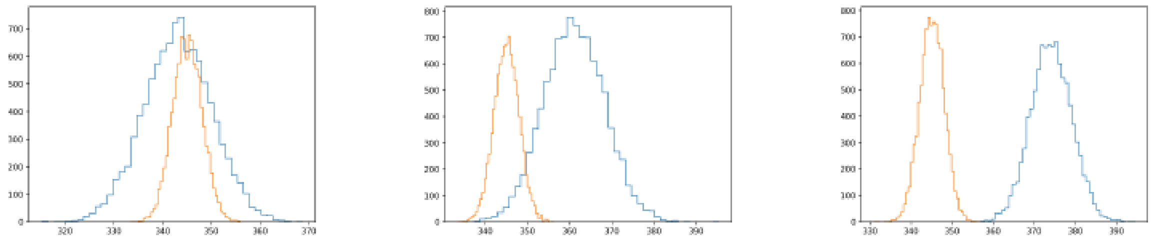
$$E_N = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}$$

Par convention, on qualifie deux résultats de **compatibles** si leur écart normalisé vérifie la propriété $E_N \lesssim 2$.

L'écart normalisé traduit le recouvrement des distributions des mesures m_1 et m_2. On constate avec les trois histogrammes 2a, 2b et 2c que les distributions se chevauchent si E_N est suffisamment petit. Si elles se chevauchent, cela veut dire qu'il est possible que les deux processus de mesure conduisent au même résultat.

III Estimation de l'incertitude-type

Selon les cas expérimentaux, plusieurs approches d'évaluation des incertitude-types peuvent être abordées.



(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$. (b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$. (c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.

FIGURE 2 – *Tracé de deux distributions de résultats de mesures.*

III.1 Expériences sans variabilité observée de la mesure (incertitudes de type B)

Ce cas se rencontre dans deux situations :

- soit la variabilité de la mesure est plus faible que la précision avec l'appareil utilisé (cas de la mesure d'une distance par une règle : répéter l'expérience avec la même règle ne changera pas le résultat final) ;
- soit le protocole expérimental est tel qu'une seule mesure peut être effectuée.

Dans ce dernier cas, une seule valeur est accessible et il faut tout de même estimer son incertitude-type. Il faut donc estimer théoriquement la variabilité de la mesure sans l'observer.

Concrètement, on cherche à estimer la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note $\bar{x}$ la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

Propriété

Dans le cas d'une expérience sans variabilité observée (mesure unique ou répétition de mesures donnant toujours la même valeur), le résultat de la mesure est $\boxed{\bar{x} \pm u(\bar{x})}$ avec $\boxed{u(\bar{x}) = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}}$

Comme toute incertitude-type, elle représente l'écart-type de la **distribution uniforme**[2] des données comprises dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

L'intervalle Δ doit être choisi le plus faible possible en fonction des critères propres à l'expérimentateur et des conditions de l'expérience. Il peut s'agir :

bullet de la précision de lecture lors d'une mesure. Par exemple avec une règle graduée au millimètre, si la valeur tombe directement sur une graduation, il est naturel de prendre $\Delta = 0.25\,\mathrm{mm}$, tandis que si la valeur est entre deux graduations, on prendra plus logiquement $\Delta = 0.5\,\mathrm{mm}$. Et enfin, un étudiant peu sûr de lui peut choisir de prendre dans le même cas$\Delta = 1\,\mathrm{mm}$.

bullet de la précision d'un appareil fourni par le constructeur. Il faut alors se référer à la notice d'utilisation pour estimer la précision de la mesure.

III.2 Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A)

Lorsque la variabilité des mesures est accessible, il convient de répéter un grand nombre de fois le processus de mesure pour estimer l'incertitude-type sur une unique réalisation de la mesure.

Toutefois, comme nous l'avons vu au paragraphe précédemment, certains points de mesure ont statistiquement une chance d'être très éloignés des autres.

2. Cela signifie que chaque valeur de l'intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$ a autant de chance d'être obtenue par la mesure. D'autres distributions permettent de privilégier des valeurs plus proches de la valeur centrale $\bar{x}$, comme la distribution gaussienne. Cependant, la distribution uniforme tend à maximiser l'incertitude-type, ce qui est préférable à une sous-estimation de celle-ci.

Pour gagner en précision, nous changeons d'expérience : l'expérience n'est plus « mesurer un point à l'aide d'un protocole » mais « mesurer la moyenne de N points effectués avec le même protocole ». Cette expérience est différente et a donc une incertitude-type différente. L'intérêt de la moyenne est qu'elle va réduire les variabilités.

Exemple : mesure de l'accélération de la pesanteur g en mesurant la période d'oscillations T d'un pendule simple de longueur L oscillant dans l'air pour une valeur de L donnée. On doit alors évaluer l'incertitude-type sur la longueur du fil (mesure à la règle, peu variable entre deux mesures si effectuée soigneusement...) et l'incertitude-type sur la mesure de la période d'oscillation (mesure à l'aide d'un chronomètre, par exemple) en répétant N fois l'expérience.

Propriété

On réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des points expérimentaux $\{x_i\}$. On note l'incertitude-type $u(x)$ de cet ensemble de mesures qui est évaluée en calculant son écart-type.

Le résultat de l'expérience est $\bar{x} \pm u(\bar{x})$ avec $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ la moyenne de la distribution et $u(\bar{x}) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{N}}$

Ainsi, en une série de mesure, on obtient les points expérimentaux, leur incertitude-type, la moyenne de ces points et grâce à la relation $u(\bar{x}) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{N}}$, l'incertitude-type sur la moyenne. On obtient ainsi une estimation plus précise de la grandeur à mesurer en modérant la variabilité de chaque prise de mesure unique.

Remarque : l'estimation de type B de l'incertitude-type est une estimation "théorique" dans le sens où elle cherche à vérifier si on maîtrise bien toutes les causes de variabilités de l'expérience. Si toutefois on a accès à l'incertitude statistique (type A), l'estimation de l'incertitude de type B au niveau CPGE prend un temps certain et est souvent surestimée. **Ainsi, lorsque cela est possible, on pourra se satisfaire de l'incertitude statistique**.

IV Composition des incertitudes

Un grand nombre de grandeurs physiques et chimiques ne sont pas directement mesurables par l'expérience. Il est souvent nécessaire de combiner les mesures de plusieurs grandeurs pour aboutir au résultat. L'évaluation de l'incertitude repose alors sur la forme de la relation mathématique qui lie ces grandeurs entre elles.

IV.1 Incertitude-type composée de type somme ou différence

Propriété

Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ (α et β de signe quelconque). L'incertitude-type de y est alors donnée par

$$u(y) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2}$$

IV.2 Incertitude-type composée de type produit ou rapport

Propriété

Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = a x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ (α et β de signe quelconque). L'incertitude-type relative de y est alors donnée par

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

IV.3 Incertitude-type composée quelconque

Seules les deux formules précédentes sont à connaître, pour tous les autres cas, nous allons revenir à la définition des incertitudes puis, à l'aide d'une simulation informatique comportant une part d'aléatoire, un **algorithme Monte-Carlo**, calculer l'incertitude-type.

Définition

Un algorithme utilisant la variabilité d'une mesure pour simuler un calcul d'incertitude fait parti des algorithmes de type **Monte-Carlo**.

Remarque : Les algorithmes de Monte-Carlo sont nombreux et ont de nombreuses applications. Leur point commun est qu'ils sont basés sur un processus aléatoire simulé informatiquement.

Nous étudions dans la dernière partie le cas de l'évaluation d'une incertitude-type par composition à l'aide d'un algorithme Monte-Carlo dans le cas de l'évaluation de la valeur en eau d'un calorimètre de TP.

V Méthode Monte-Carlo pour estimer des incertitudes-types

Les codes présentés dans cette partie sont réalisés sous python. Ce n'est absolument pas une obligation, les simulations peuvent être réalisées avec n'importe quel tableur pouvant réaliser un tirage de nombres aléatoires.

V.1 Principe

Supposons que l'on cherche à estimer une grandeur y donnée par $y = f(x_1, x_2, ...)$ avec les x_i des données résultants d'une mesure et f une fonction connue. Chaque x_i est caractérisé par sa valeur et son incertitude-type.

La valeur de y est donnée par l'application de la formule. Pour estimer l'incertitude-type, il faut remonter à la variabilité de y, qui est elle-même une conséquence de la variabilité des x_i.

Pour cela, il faut :

- Fixer un nombre N de simulations à réaliser ;
- Pour k entre 1 et N, réaliser :
  - un tirage aléatoire pour chaque x_k ;
  - utiliser les valeurs de ce tirage et la fonction f pour calculer une valeur y_k ;
  - sauvegarder cette valeur y_k ;
- l'incertitude-type de y est l'écart-type de la distribution des y_k. La moyenne des y_k permet de retrouver la valeur y.

Le choix de la distribution de probabilité de chaque x_i dépend de plusieurs facteurs expérimentaux. La modélisation de cette distribution peut être délicate. Par exemple, il n'est pas du tout naturel de prendre systématiquement une distribution gaussienne.

En règle général en CPGE, les x_i sont mesurés avec une précision. En dessous de cette précision, on est incapable d'accéder à une information sur la distribution de probabilité. On privilégie donc la distribution uniforme de probabilité, cohérente avec l'expérience pratique de l'expérimentateur.

Attention ! Il ne faut pas oublier qu'en notant Δ la précision, l'incertitude-type qui caractérise la variabilité vaut $u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$!

V.2 Exemple d'application : mesure de la valeur en eau d'un calorimètre

Un protocole classique de mesure de la valeur en eau μ d'un calorimètre est la méthode des mélanges : on mélange dans le calorimètre une masse m_1 d'eau froide de température θ_1 connue avec une masse m_2 d'eau chaude de température θ_2 connue, puis on relève la température finale θ_f du mélange à l'équilibre thermique, calorimètre fermé. Dans ce cas, on peut montrer que μ s'exprime par la relation :

$$\mu = m_2 \frac{\theta_2 - \theta_f}{\theta_f - \theta_1} - m_1$$

Cette relation est trop complexe pour passer par une propagation des incertitudes de type somme ou produit. On évalue donc l'incertitude-type sur μ par simulation Monte-Carlo. La trame du code Python correspondant est fournie ci-dessous.

```python
##Simulation d'une incertitude-type : masse en eau d'un calorimetre de TP
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Valeur des parametres
m1 = ............... # masse d'eau froide (en g)
m2 = ............... # masse d'eau chaude (en g)
theta1 = .......... # temperature de l'eau froide (en degre C)
theta2 = .......... # temperature de l'eau chaude (en degre C)
thetaf = ........... # temperature du melange a l'equilibre (en degre C)

# Precision sur la masse et la temperature
# ATTENTION : la precision d'une mesure n'est pas son incertitude-type ! Celle-ci est donnee par u=Delta/sqrt(3) si Delta est la precision.
Delta_m = ............... # en g, precision estimee de la balance
Delta_t = ............... # en degre C, precision estimee du thermometre

# Fonction permettant le calcul de la masse en eau du calorimetre (en g)
def masse_eau(m1,m2,theta1,theta2,thetaf):
    return m2*(theta2-thetaf)/(thetaf-theta1)-m1

# Nombre de simulations a effectuer
N = 100000
# Calcul de la masse en eau mu avec une distribution de probabilite uniforme
mu=[] # liste des N valeurs de mu simulees
for i in range(0,N):
    simu_m1 = np.random.uniform(m1-Delta_m,m1+Delta_m)
    simu_m2 = np.random.uniform(m2-Delta_m,m2+Delta_m)
    simu_theta1 = np.random.uniform(theta1-Delta_t,theta1+Delta_t)
    simu_theta2 = np.random.uniform(theta2-Delta_t,theta2+Delta_t)
    simu_thetaf = np.random.uniform(thetaf-Delta_t,thetaf+Delta_t)
    mu.append(masse_eau(simu_m1,simu_m2,simu_theta1,simu_theta2,simu_thetaf))

plt.figure(1)
plt.hist(mu,bins = 'rice')
plt.title('Resultat du tirage aleatoire du produit apres simulation')
plt.xlabel("masse en eau (g)")
# Calcul et affichage moyenne et ecart type
moy = np.mean(mu)
std = np.std(mu,ddof=1)
print("Moyenne = {:.2f} g".format(moy))
print("Ecart type = {:.2f} g".format(std)) # incertitude-type sur la valeur simulee de mu
```