

## TD 1: Systemes lineaires

Exercice : Equation differentielle

1 - Rappel :  $(j\omega) \leftrightarrow \frac{d}{dt}$  ;  $(j\omega)^2 \leftrightarrow -\omega^2 \leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}$

l'equation differentielle est :

$$\left[1 + \frac{2m}{\omega_0} j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2\right] S = (1 + j\tau\omega) E$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \tau \frac{dE(t)}{dt} + E(t)$$

2 - le systeme est stable si et seulement si ses coefficients  $1, \frac{2m}{\omega_0}$  et  $\frac{1}{\omega_0^2}$  sont de même signe.

Or :

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ \frac{1}{\omega_0^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} > 0 \\ \frac{2m}{\omega_0} > 0 \text{ si } m > 0. (\omega_0 : \text{pulsation, donc } > 0) \end{cases}$$

$\tau$  peut être n'importe quel signe ; cela n'influence pas sur la stabilité du système.

Exercice : Remarques et filtres

1 - Un filtre est linéaire si il n'introduit aucune nouvelle fréquence dans le signal auquel il s'applique.

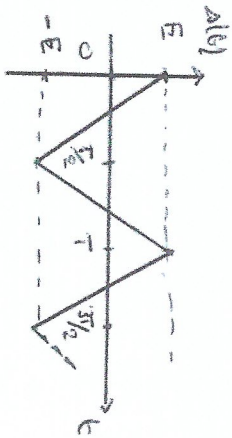
Ainsi, le filtre 3 est non linéaire. Les filtres 1 et 2 sont linéaires.

2 - Le filtre 1 est un filtre passe-bas : les harmoniques de fréquence supérieure à 3 kHz sont coupés. Le filtre 2 est un filtre passe-bande de pulsation à la fréquence d'émission 3 kHz : cette fréquence n'est pas (ou peu) atténuée, et les autres  $\pm 1$  kHz de part et d'autre sont coupés.

Remarque - importante : émission 3 kHz ( $\pm 1$  kHz de part et d'autre de  $\omega_0 = 3$  kHz).

# Signal Rectangulaire

Q1 - Avec la définition donnée :



$$\text{On pose : } \Delta(H) = \frac{8E_0}{\pi^2} \sum_{R=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{(2R+1)^2} \cos((2R+1)\omega_0 t) \right)$$

avec  $E_0 = 1 \text{ V}$ . On pose  $a_1 = \frac{8E_0}{\pi^2}$ .

Développons. On pose différentes valeurs de R :

- $\Delta(H) (R=0) = a_1 \times \cos(\omega_0 t)$ .

- $\Delta(H) (R=1) = a_1 \times \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_0 t) = \frac{a_1}{9} \cos(3\omega_0 t)$

- $\Delta(H) (R=2) = a_1 \times \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_0 t) = \frac{a_1}{25} \cos(5\omega_0 t)$

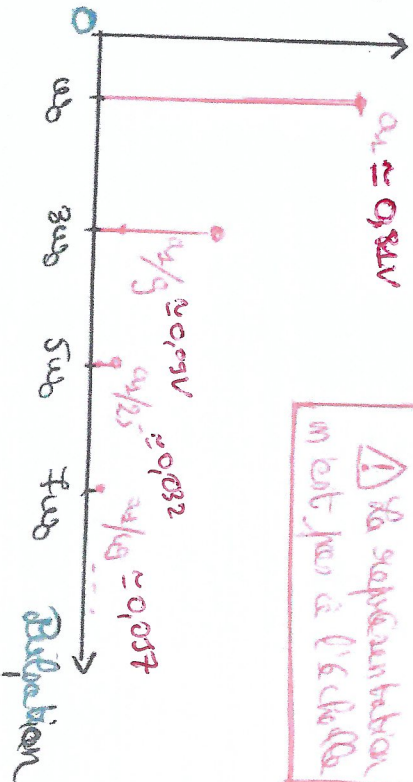
- $\Delta(H) (R=3) = a_1 \times \frac{1}{7^2} \cos(7\omega_0 t) = \frac{a_1}{49} \cos(7\omega_0 t)$

etc.

Le spectre de  $\Delta(H)$  est donc :

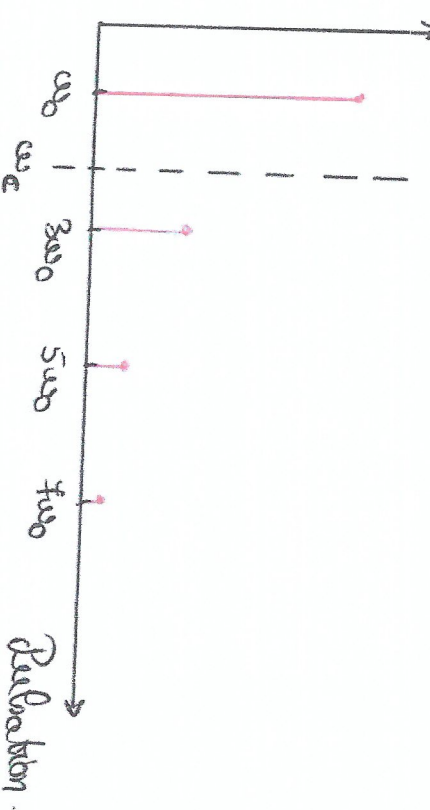
Amplitude  $a_1 \approx 0,81 \text{ V}$

⚠ La superposition n'est pas à l'échelle



Rq : la composante continue ( $\omega=0$ ) est nulle ici : cela signifie que la valeur moyenne du signal est également nulle, ce qui s'explique par la géométrie.

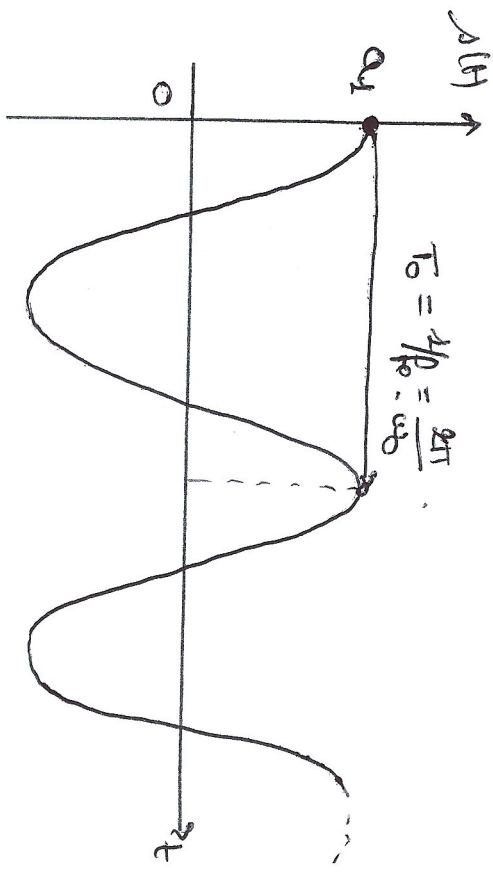
Q2 - On reprend le spectre précédent, et l'on y superpose la pulsation de coupure  $\omega_c = 2\pi f_c = 2\omega_0$ .



On se rend compte que les fréquences inférieures à la fréquence de coupure, soit  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  ici. Le signal de sortie est donc une signal admissibles, de valeur moyenne nulle (pas de composante continue) :



• Adresse de l'ensemble  $\lambda(t)$  :  $\lambda(t) = a_1 \cos(\omega t)$



R<sub>1</sub> : aucune information supplémentaire n'est donnée sur le filtre passe-bas, nous ne pouvons donc pas conclure sur l'amplitude exacte de l'ensemble  $\lambda(t)$ , ni sur son déphasage par rapport à  $\lambda(t)$ .  
 Pour représenter donc le filtre idéal : pas d'atténuation ni de déphasage introduit pour  $\omega < \omega_c$ .

Par exemple, avec un filtre RC définiton de transfert  $H = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$  (ce =  $\frac{1}{RC}$ ), il

Admet :

avec :  $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$

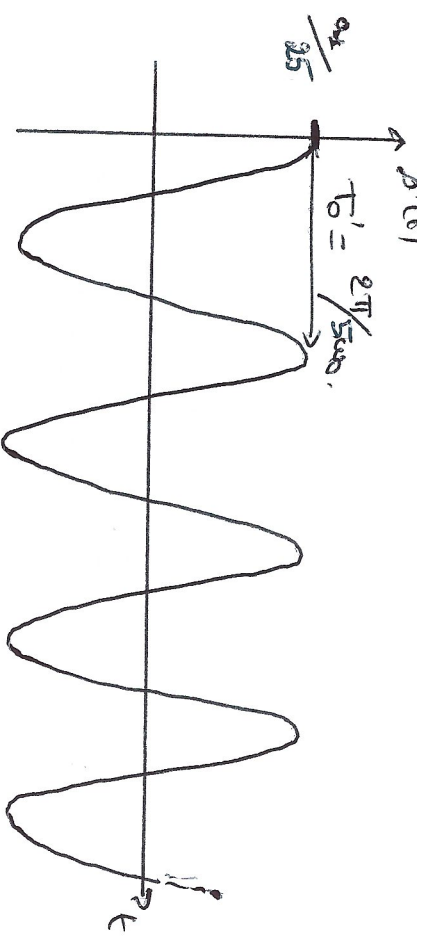
et  $\arg(H(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$   
 $\Rightarrow \arg(H(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,4636 \text{ rad}$   
 soit  $-27^\circ$ .

le signal  $\lambda(t)$  serait alors :  
 $\lambda(t) = 0,89 \times a_1 \times \cos(\omega t - 0,46)$ .

Q<sub>3</sub> - Soit un filtre passe-bande de fréquence de résonance  $f_r = 5 f_0$  et  $Q \gg 1$ .

Rappel :  $Q = \frac{f_r}{\Delta f} = \frac{\omega_r}{\Delta \omega}$  avec  $\Delta \omega$  (ou  $\Delta f$ ) la bande passante du filtre. Plus  $Q$  est petite, plus  $Q$  est grand et le filtre sélectif.

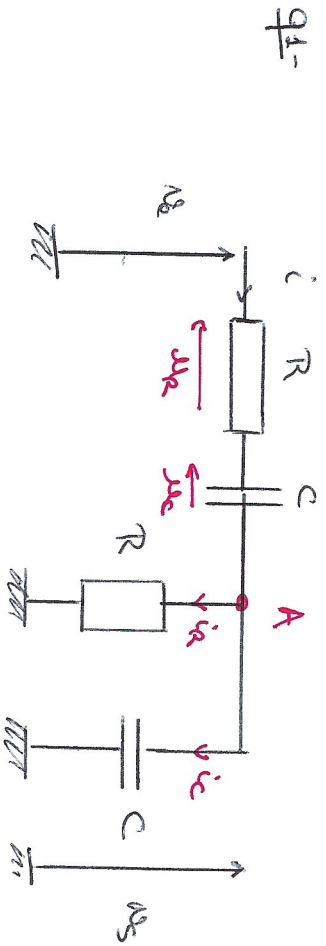
• Le filtre sélectionne uniquement la partie à 5 Hz du signal  $\lambda(t)$  ; en l'absence d'information supplémentaire, on suppose que cette composante n'est pas atténuée en passant dans le filtre. La partie  $\lambda'(t)$  est donc :  $\lambda'(t) = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \cos(5\omega_0 t)$



• Si la fréquence du filtre vaut  $f_0$ , toutes les fréquences (fondamentale comme harmoniques) de  $x(t)$  sont rejetées : le signal de sortie est donc  nul .



# Filtre de WIEN



loi des mailles en A :  $i = i_r + i_c = i_r + C \frac{du_s}{dt}$  (1)

loi des mailles :  $u_s + u_c + u_r = u_s$  (2)

On a : 
$$\begin{cases} u_r = R i \text{ et } i = C \frac{du_c}{dt} \\ u_s = R i_r \Rightarrow i_r = \frac{u_s}{R} \end{cases}$$

Donc, en dérivant (2) par rapport au temps :

(2)  $\Rightarrow \frac{du_s}{dt} + \frac{du_c}{dt} + R \frac{di}{dt} = \frac{du_s}{dt}$

$\Rightarrow \frac{du_s}{dt} + \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} = \frac{du_s}{dt}$

On a (1)  $\Rightarrow i = \frac{u_s}{R} + C \frac{du_s}{dt}$ , donc :

$$\frac{du_s}{dt} + \frac{u_s}{RC} + \frac{du_s}{dt} + \frac{du_s}{dt} + RC \frac{d^2 u_s}{dt^2} = \frac{du_s}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_s}{dt} + \frac{u_s}{(RC)^2} = \frac{1}{RC} \frac{du_s}{dt}$$

Q2- On suppose que  $\frac{d}{dt} \Leftrightarrow j\omega$  et  $\frac{d^2}{dt^2} \Leftrightarrow (j\omega)^2$  : Wien Q

$$(j\omega)^2 u_s + \frac{3}{RC} j\omega u_s + \frac{1}{(RC)^2} u_s = \frac{1}{RC} j\omega u_s$$

$$\Rightarrow H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{3j\omega}{RC} + \frac{1}{(RC)^2}}$$

$$\Rightarrow H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

Rq: on suppose que la signal u(t) est sinusoidal, de pulsation  $\omega$

Q3- Sans forme canonique :

$$H = H_0 \cdot \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

Par analogie :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{1}{3RC\omega_0} = \frac{1}{3}$$

$$H_0 \times \frac{\omega}{\omega_0} = RC\omega \Rightarrow H_0 = Q = \frac{1}{3}$$

Q4- On effectue d'analyse asymptotique de H :

$$\omega \ll \omega_0 : \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1} \approx H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}$$

Avec les expressions de Q3- :  $H(j\omega) \approx jRC \frac{du_s}{dt}$

(Remarque :  $u_s(t) = RC \frac{du_s}{dt}$ )

Donc :  $G_{dB} = 20 \log(|H|) = 20 \log(R_{cu})$

La pente du diagramme de BODE en amplitude est de  $+20 \text{ dB/dec}$ .  
 Le filtre se comporte comme un deuxième.

\*  $\omega \gg \omega_0$  :  $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{H_0 \cdot j \frac{\omega}{\omega_0}}{+ (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} = \frac{H_0 \cdot \omega_0}{j \omega}$

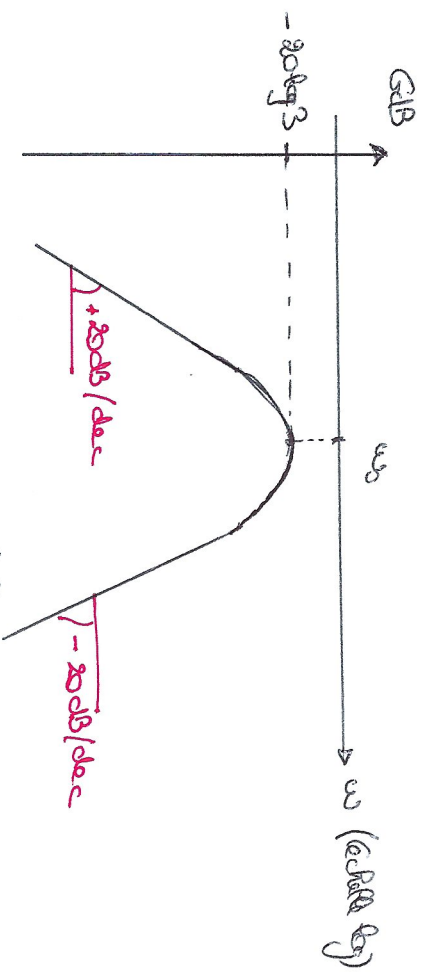
Avec  $q_3$  :  $H(j\omega) \approx + \frac{1}{j R_{cu}}$  (temporal :  $u_3(t) = \frac{1}{RC} \int u_2 dt$ )

Donc  $G_{dB} = 20 \log(|H|) = 20 \log(\frac{1}{R_{cu}}) = -20 \log(R_{cu})$ .

La pente est cette fois de  $-20 \text{ dB/décade}$ ; la filtre se comporte comme un intégrateur.

\*  $\omega = \omega_0$  :  $H(j\omega) = H_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow G_{dB}(\omega = \omega_0) = -20 \log 3 \approx -10 \text{ dB}$ .

Le allure du diagramme de BODE est donc :



Cette allure est caractéristique d'un filtre passe-bande d'ordre 2.

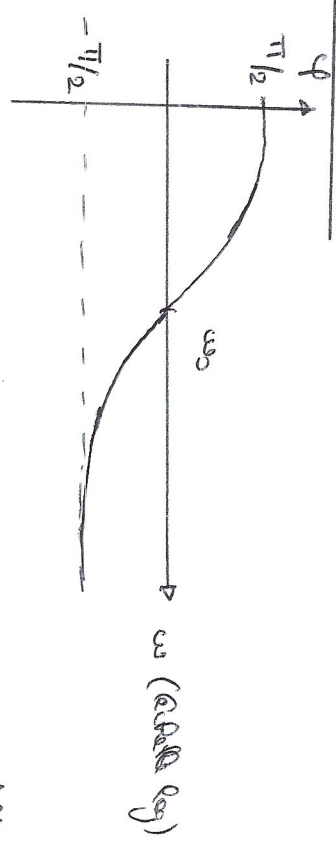
Rq : diagramme de BODE en phase :

\*  $\omega \ll \omega_0$  :  $H \approx j R_{cu} \Rightarrow \arg(H) = +\frac{\pi}{2}$  car  $R_{cu} > 0$ .

\*  $\omega \ll \omega_0$  :  $H \approx \frac{1}{j R_{cu}} = -\frac{1}{R_{cu}} \cdot j \Rightarrow \arg(H) = -\frac{\pi}{2}$ .

\*  $\omega = \omega_0$  :  $H = \frac{1}{3} \Rightarrow \arg(H) = 0$  (car  $\frac{1}{3}$  est réel positif)

On trouve donc :



q5 - Chaque composante de  $u_2$  est modifiée par la phase en fonction de la justation de cette composante. Ainsi :

\*  $V_0 \rightarrow V_0 |H(\omega=0)| \cos(\omega_0 t + \arg(H(\omega=0))) = 0$

car  $|H(\omega=0)| = 0$ .

\*  $V_1 \cos(\omega_0 t) \rightarrow V_1 |H(\omega=\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \arg(H(\omega=\omega_0)))$

$= V_1 \times H_0 \cos(\omega_0 t + 0)$

$= \frac{2}{3} \cos(\omega_0 t)$  car  $V_0 = 2V$  et  $H_0 = \frac{1}{3}$

\*  $V_2 \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}) \rightarrow V_2 |H(\omega=\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \arg(H(\omega=\omega_0)))$

Où  $H(\omega=\omega_0) = \frac{1}{3} \angle -45$

Donc  $|H(\omega = \omega_0)| = \frac{4}{\sqrt{30^2 + 15^2}} \approx 0,24$ .

et  $\arg(H(\omega = \omega_0)) = \arg(4j) + \arg(-15 + 12j)$   
 $= \frac{\pi}{2} - \left( \pi - \arctan\left(\frac{12}{15}\right) \right)$   
 $= \arctan\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{\pi}{2}$ .

Ainsi :

$V_2 \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow 0,24 V_2 \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4} + \arctan(\frac{4}{3}) - \frac{\pi}{2})$   
 $= \underline{0,192 \cos(\omega_0 t - 1,68)}$ .

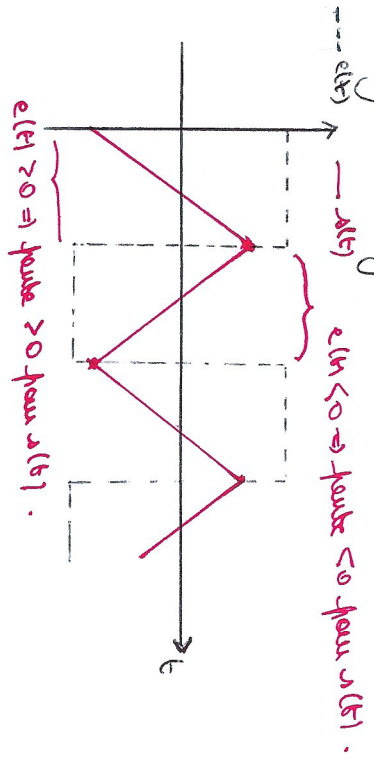
car  $V_2 = 2V$

Finallement :

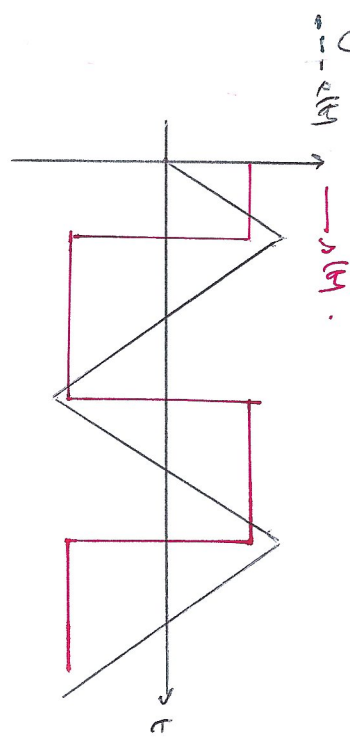
$V_2(t) = \frac{2}{3} \cos(\omega_0 t) + 0,192 \cos(\omega_0 t - 1,68)$ .

pe- Pour  $f \gg f_0$ ,  $H(j\omega) \rightarrow \frac{1}{j\omega C}$  : le filtre se comporte comme un intégrateur. Le signal sortant devient

donc un signal triangulaire :



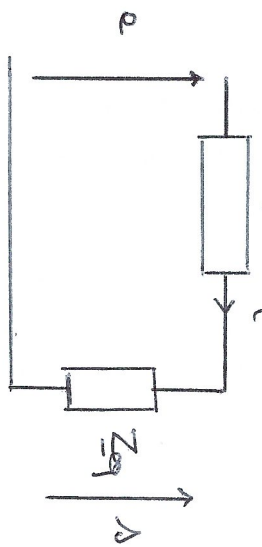
pe- Pour  $f \ll f_0$ , le montage se comporte comme un diviseur de tension. Le signal triangulaire devient donc un signal carré :





## Stabilité R-RC

Q1- On suppose que le circuit est alimenté par un signal sinusoïdal de pulsations de circuit peut être simplifié de la manière suivante:



$$\text{avec } \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} = j\omega C + \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow Z_{eq} = \frac{R}{1+j\omega RC}$$

Selon la relation du pont diviseur de tension :

$$u = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R} e$$

$$\Rightarrow H = \frac{u}{e} = \frac{R}{R + R(1+j\omega RC)} = \frac{1}{2+j\omega RC}$$

l'équation différentielle associée est donnée par :

$$(2 + j\omega RC) u = e$$

$$\Rightarrow RC \frac{du(t)}{dt} + 2u(t) = e(t)$$

Q2- les coefficients au dénominateur de la fonction de transfert sont 2 et RC, leur sens est positif : la

stabilité est donc assurée (coeff. de même signe).

Q3- le régime libre est caractérisé par l'équation différentielle à second membre nul :

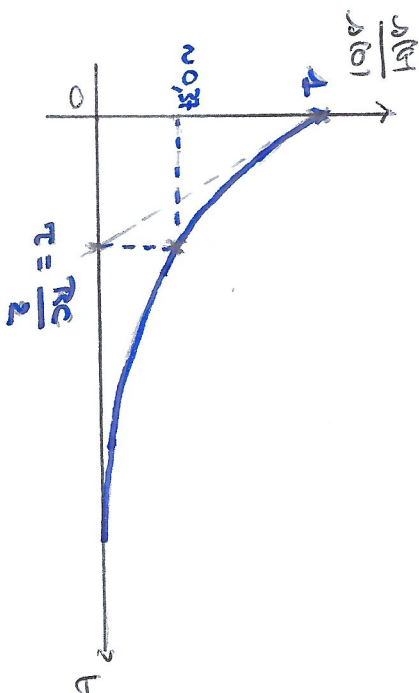
$$\frac{d\lambda(t)}{dt} + \frac{2}{RC} \lambda(t) = 0$$

La solution de cette équation est :

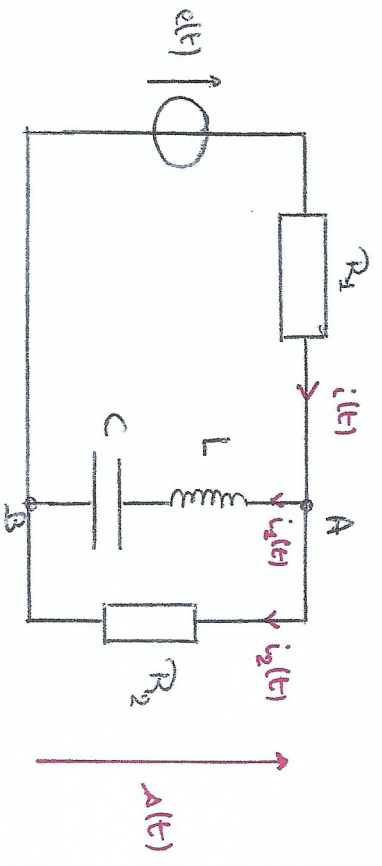
$$\lambda(t) = \lambda(0) e^{-\frac{2t}{RC}}$$

avec  $\lambda(0)$  la valeur initiale de  $\lambda(t)$ .

Représentation graphique :



Circuit cap-inductif



q1- Selon le schéma du circuit :

$$\begin{cases} u(t) = R_1 i_1(t) \\ u(t) = u_C(t) + u_L(t) = u_C(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

et  $i_1(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ . De plus, selon la loi des mailles :

$$\begin{aligned} u(t) + u_{R_2}(t) &= e(t) \\ \Rightarrow u(t) + R_2 i_1(t) &= e(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Selon la loi des mailles appliquée au maillage A :

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \quad (4)$$

On dérive (2) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{du_C(t)}{dt} + L \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} \\ \Rightarrow \frac{du(t)}{dt} &= \frac{i_1(t)}{C} + L \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Or } i_1(t) = i_1(t) - i_2(t) = \frac{e(t) - u(t)}{R_1} - \frac{u(t)}{R_2}$$

d'après les relations (1), (3) et (4).

En injectant dans (5) :

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{e(t) - u(t)}{R_1 C} - \frac{u(t)}{R_2 C} + L \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{e(t) - u(t)}{R_1} - \frac{u(t)}{R_2} \right] \\ \Rightarrow \frac{du(t)}{dt} &= \frac{e(t)}{R_2 C} + L \frac{d^2 e(t)}{dt^2} - \frac{u(t)}{C} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \\ &\quad - L \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{C} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{L}{R_2} \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \frac{e(t)}{R_2 C}$$

$$\Rightarrow LC \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + R_2 C \frac{du(t)}{dt} + \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) u(t) = LC \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \frac{e(t)}{R_2 C}$$

q2 - Expression d'impédance équivalente de l'ensemble (LC || R2) ; de signal et de signal sinusoïdal et pulsation ω :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{eq}} &= \frac{1}{Z_{R_2}} + \frac{1}{Z_C} \\ \Rightarrow \frac{1}{Z_{eq}} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega + \frac{1}{j\omega}} \\ \Rightarrow Z_{eq} &= \frac{R_2 (1 - LC\omega^2)}{1 + jCR_2\omega - LC\omega^2} \end{aligned}$$

En appliquant la relation des ponts diviseurs de tension :

$$u = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + Z_{R_1}} e = \frac{R_2 (1 - LC\omega^2)}{R_2 (1 - LC\omega^2) + R_1 (1 + jCR_2\omega - LC\omega^2)} e$$



$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{2}{\omega} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + \frac{R_1}{R_2}(1 + j\omega R_2 C - LC\omega^2)}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1 - LC\omega^2}{(1 + \frac{R_1}{R_2}) + j\omega R_2 C - LC(1 + \frac{R_1}{R_2})\omega^2}$$

En se rappelant que  $-\omega^2 = (j\omega)^2 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}$  dans le dénominateur temporel, il vient :

$$(1 + \frac{R_1}{R_2}) x(t) + R_2 C \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + LC(1 + \frac{R_1}{R_2}) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = e(t) + LC \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

On retrouve bien le résultat attendu.

Q3- Les coefficients au dénominateur de la fonction de transfert sont :  $1 + \frac{R_1}{R_2}$  ;  $R_2 C$  ;  $LC(1 + \frac{R_1}{R_2})$ . Ces trois

grandeurs sont de même signe : le système est donc stable.

Q4- On cherche pour  $(1 + \frac{R_1}{R_2})$  au dénominateur :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \times \frac{1 - LC\omega^2}{1 + j\omega \times \frac{R_2 R_2 C}{R_2 + R_2} - \omega^2 LC}$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 = (1 + \frac{R_1}{R_2})^{-1} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \omega_Q = \frac{1}{R_2 R_2 C} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{\omega_0 \times \frac{R_2 R_2 C}{R_2 + R_2}} = \left( \frac{1 + \frac{1}{R_2}}{R_2} \right) \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On retrouve alors l'expression de  $H$  sous forme canonique :

$$H(j\omega) = H_0 \times \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = H_0 \times \frac{1 - x^2}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2}$$

on pose  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

Q5- On déduit le gain en dB des pôles/zéros :

$$G_{dB} = 20 \log \left( \left| \frac{H(j\omega)}{H_0} \right| \right)$$

Les pôles  $\varphi$  est obtenue par :

$$\varphi = 20 \log \left( \left| \frac{H(j\omega)}{H_0} \right| \right)$$

$$\left| \frac{H(j\omega)}{H_0} \right| = \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{H(j\omega)}{H_0} \right| = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1 - x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \text{ pour } x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \\ - \frac{1 - x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \text{ pour } x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1 \end{array} \right.$$

Année :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{dB} = 20 \log(1 - x^2) - 20 \log \left( \sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}} \right) \text{ pour } |x| < 1 \\ G_{dB} = 20 \log(x^2 - 1) - 20 \log \left( \sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}} \right) \text{ pour } |x| > 1 \end{array} \right.$$

Rq: comme  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $x$  est positif :  $|x| < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$   
 $|x| > 1 \Rightarrow x > 1$ .



et  $\arg(H(j\omega)) = \arg(H_0) + \arg(1 - \omega^2) + \arg(1 - \omega^2 + j\frac{\omega}{Q})$

$\Rightarrow \arg(H(j\omega)) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\omega/Q}{1-\omega^2}\right) \approx \arctan\left(\frac{\omega}{Q\omega^2}\right) \text{ pour } 0 < \omega < 1 \\ \pi - \arctan\left(\frac{\omega/Q}{\omega^2-1}\right) \text{ pour } \omega > 1 \end{cases}$

car  $\arg(H_0) = 0$  ( $H_0 \in \mathbb{R}^+$ ) et  $\arg(1 - \omega^2) = \pi$  pour  $\omega > 1$   
(argument d'un nombre réel négatif).

Alors :  $\arg(H(j\omega)) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\omega}{Q(1-\omega^2)}\right) \text{ pour } 0 \leq \omega < 1 \\ -\arctan\left(\frac{\omega}{Q(1-\omega^2)}\right) - \pi \text{ pour } \omega > 1 \end{cases}$

Diagrammes de Bode asymptotiques :

\*  $\omega \rightarrow 0$  :  $\begin{cases} GdB \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 20 \log(1) - 10 \log(1) = 0 \\ \varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\arctan\left(\frac{0}{Q}\right) = 0 \end{cases}$

\*  $\omega \rightarrow 1^-$  :  $GdB = 20 \log(0^+) - 10 \log(0^+ + \frac{1}{Q^2})$   
 $\Rightarrow GdB \xrightarrow{\omega \rightarrow 1^-} -\infty$

$\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 1^-} -\arctan\left(\frac{1^-}{Q \cdot 0^+}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

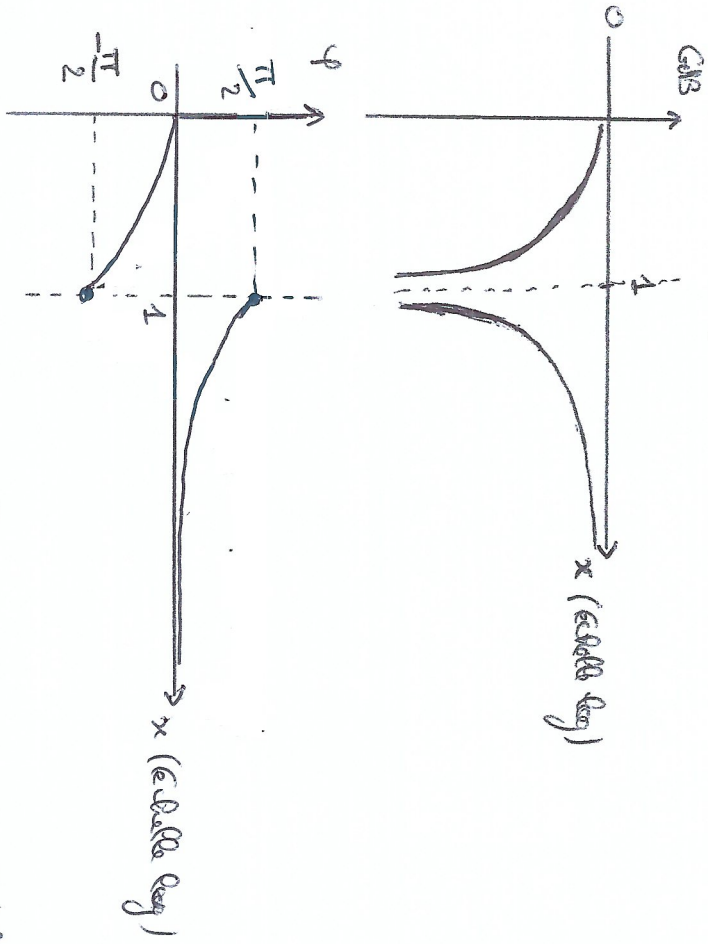
\*  $\omega \rightarrow 1^+$  : De même :  $\begin{cases} GdB \xrightarrow{\omega \rightarrow 1^+} \infty \\ \varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 1^+} +\frac{\pi}{2} \end{cases}$

\*  $\omega \rightarrow +\infty$  :  $H(j\omega) \rightarrow H_0 \approx \frac{-\omega^2}{-\omega^2} = H_0$

Bon :  $GdB \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log(1) = 0$

et  $\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \arg(H_0) = 0$

En effectuant des diagrammes de Bode, on obtient donc les suivants :



On remarque que la gain s'effondre pour  $\omega \rightarrow \omega_0$  : la résonance obtenue par la somme des deux composantes de la réponse de la jonction. proche de zéro. C'est bien un filtre coupe-bande (non-entendu : bande de fréquence).

q6 - En fait :  $e'(t) = E_0 + \frac{E_0}{2} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) + \frac{E_0}{3} \cos(\omega_0 t) + \frac{E_0}{4} \cos\left(\frac{3}{2} \omega_0 t\right)$

Pour obtenir la signal de sortie  $y(t)$ , il faut analyser l'impact des filtres pour chaque composante des signaux  $e'(t)$  en tenant compte de l'amplitude.

- Composante continue de  $i(t)$ : amplitude de  $E_0$ .

À travers la poutre :  $E_0 \rightarrow |H(\omega=0)| E_0 \cos(\omega_0 t + \arg(H(\omega=0)))$   
 $= H_0 \cdot E_0 \cos(0)$   
 $= H_0 \cdot E_0$

- Composante de pulsation  $\omega_1 = \frac{\omega_0}{2}$  (ou  $\alpha = \frac{1}{2}$ ):

$$\frac{E_0}{2} \cos(\omega_1 t) \rightarrow |H(\omega=\omega_1)| \times \frac{E_0}{2} \cos(\omega_1 t + \arg(H(\omega=\omega_1)))$$

$$= H_0 \times \frac{1 - \beta^4}{4} \times \frac{E_0}{2} \cos(\omega_1 t - \arctan(\frac{2}{3Q}))$$

$$= H_0 \times \frac{E_0}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{2}{3Q})^2 + \frac{1}{4Q^2}}} \cos(\omega_1 t - \arctan(\frac{2}{3Q}))$$

- Composante de pulsation  $2\omega_1 = \omega_0$  (ou  $\alpha = 1$ ):

$$\frac{E_0}{3} \cos(2\omega_1 t) \rightarrow |H(\omega=\omega_0)| \cdot \frac{E_0}{3} \cos(\omega_0 t + \arg(H(\omega=\omega_0)))$$

$$= 0$$

- Composante de pulsation  $3\omega_1 = \frac{3\omega_0}{2}$  (ou  $\alpha = \frac{3}{2}$ ):

De la même manière que pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on trouve :

$$\frac{E_0}{4} \sin(3\omega_1 t) = \frac{E_0}{4} \cos(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2})$$

$$\rightarrow \frac{E_0}{4} \times H_0 \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{6}{5Q})^2}} \cos(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{6}{5Q}))$$

En conclusion,  $i'(t)$  a pour expression :

$$i'(t) = H_0 E_0 \times \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + (\frac{2}{3Q})^2}} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} t - \arctan\left(\frac{2}{3Q}\right)\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{4\sqrt{1 + (\frac{6}{5Q})^2}} \cos\left(\frac{3\omega_0}{2} t - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{6}{5Q}\right)\right) \right]$$

$$\Rightarrow i'(t) = H_0 E_0 \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + (\frac{2}{3Q})^2}} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} t - \arctan\left(\frac{2}{3Q}\right)\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{4\sqrt{1 + (\frac{6}{5Q})^2}} \sin\left(\frac{3\omega_0}{2} t + \arctan\left(\frac{6}{5Q}\right)\right) \right]$$



Compétence dynamique d'un triaxeur

On donne : (1)  $M = \frac{g}{c} + \alpha \xi$

(2)  $m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \delta \frac{d\xi}{dt} + b\xi + \alpha q = 0$

Q1-  $\delta$  est son coefficient d'amortissement.

IE mackelise l'ensemble des phénomènes décrits

par la dynamique (frottements, diminution d'ondes sonores, etc.).

Q2- a- On pose  $v(t) = \frac{d\xi}{dt}$ . On dérive (2)

par rapport au temps :

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} + \delta \frac{dv}{dt} + b v + \alpha \frac{dq}{dt} = 0$$

On :  $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dq}{dt} + \alpha \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dq}{dt} + \alpha v$

Bon :  $\frac{dq}{dt} = \left( \frac{dv}{dt} - \alpha v \right) \times c$

Ainsi :

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} + \delta \frac{dv}{dt} + b v + \alpha c \frac{dv}{dt} - \alpha^2 c v = 0$$

(3)

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{\delta}{m} \frac{dv}{dt} + \left( \frac{b}{m} - \frac{\alpha^2 c}{m} \right) v = - \frac{\alpha c}{m} \frac{dv}{dt}$$

Pour obtenir un système stable, il faut que  $\left( \frac{b}{m} - \frac{\alpha^2 c}{m} \right)$  soit du même signe que  $\frac{\delta}{m}$  et 1, donc positif :

$$\frac{b}{m} - \frac{\alpha^2 c}{m} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b > \alpha^2 c} \quad \text{car } m > 0$$

f- On pose :  $\omega_0^2 = \frac{b - \alpha^2 c}{m} = \frac{b}{m} - \frac{\alpha^2 c}{m}$ ,

$$Q = \frac{m \delta}{2} \quad \text{et } H_0 = - \frac{\alpha c}{m \delta}$$

$$\boxed{(5) \Rightarrow \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{m \delta}{2} \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = H_0 \omega_0 \frac{dv}{dt}}$$

Q3- On suppose que  $\mu$  est réel que :

$$\mu \chi(t) = \begin{cases} \in & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Bon  $\frac{dv}{dt} = 0 \quad \forall t \neq 0$ . Rédisons l'équation différentielle pour  $t > 0$  :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{m \delta}{2} \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0$$

Equation caractéristique :  $\chi^2 + \frac{m \delta}{2} \chi + \omega_0^2 = 0$

Forme :  $a \chi^2 + b \chi + c = 0$



$$\Rightarrow \Delta = \omega_0^2 - \omega_0 c = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - \omega_0 c^2 = \omega_0 c^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 1 \right)$$

Or  $Q \gg 1$ , donc  $\Delta < 0$ : il existe donc deux racines complexes telles que :

$$s_{1,2} = \frac{-\omega_0/Q \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}{2}$$

$$= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

et les solutions de l'équation différentielle s'écrivent :

$$v(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} [B \cos(\omega_0' t) + A \sin(\omega_0' t)]$$

avec  $\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$ . On pose  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ .

La condition de résonance initialement au régime,  $v(0) = 0$ . Cette condition initiale permet donc d'écrire, pour  $t > 0$  et presque de suite on est dans un grand état continu :

$$v(0^+) = 0$$

$$\Rightarrow B \times 1 + A \times 0 = 0$$

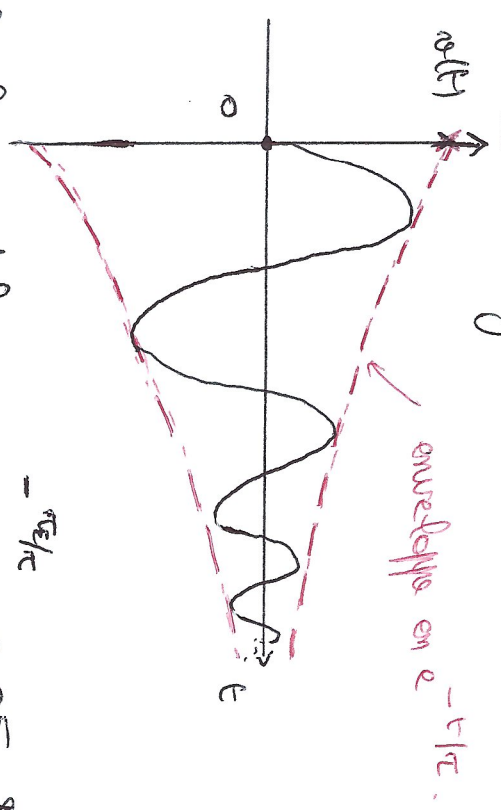
$$\Rightarrow B = 0$$

Alors :

$$v(t) = A e^{-t/\tau} \sin(\omega_0' t)$$

On peut remarquer pour de suite que  $\omega_0' \approx \omega_0$  car  $Q \gg 1$ .

Q4 - Affaire du signal  $v(t)$  ; Transm



On trouve  $\tau_E$  tel que  $e^{-\tau_E/\tau} = 0,05$ , soit :

$$\tau_E = -\tau \ln(0,05) = \tau \ln(20)$$

Or  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ , donc :

$$\tau_E = \frac{2Q}{\omega_0} \ln(20)$$

Q5 - Par analogie avec le cas d'éléctricité, on pose :  $\frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega$  et  $\frac{d^2}{dt^2} \leftrightarrow (j\omega)^2$ . En notation complexe, (E) devient :

$$(j\omega)^2 v + \frac{\omega_0}{Q} j\omega v + \omega_0^2 v = j\omega_0 \omega_0 u$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{v}{u} = \frac{j\omega_0 \omega_0}{(j\omega)^2 + j \frac{\omega_0 \omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

$$\Leftrightarrow H = H_0 \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j \frac{\omega}{Q} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

→ Filtrage passe-bande centré sur  $\omega_0$ .

Stabilité d'un système linéaire en mécanique et en électromagnétique

**Q1 -** Pour établir l'équation différentielle portant sur  $\theta(t)$ , plusieurs méthodes sont possibles. Dans le cas ( $\alpha$ ):

\* Méthode 1: Application du PFD (Principe fondamental de la dynamique)

On se place dans le référentiel  $R$  pour analyser le mouvement du système  $\{ \text{particule } M \}$ . Soit le bilan des actions mécaniques est:

- la poids:  $\vec{P} = m\vec{g} = +mg \cos(\theta) \vec{e}_1 - mg \sin(\theta) \vec{e}_2$ ;
- la réaction normale de la corde:  $\vec{R} = -R\vec{e}_1$ ;
- la force de frottement fluide:  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ .

Or dans le repère helix  $\{ M; \vec{e}_1; \vec{e}_2 \}$ ,  $\vec{OM} = l\vec{e}_1$  et:

$$\begin{cases} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(l\vec{e}_1) = l\dot{\theta}\vec{e}_2 \\ \cdot \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -l\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_1 + l\ddot{\theta}\vec{e}_2 \end{cases}$$

Ainsi  $\vec{f} = -\alpha l\dot{\theta}\vec{e}_2$ . Selon le PFD:

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow mg \cos(\theta) \vec{e}_1 - mg \sin(\theta) \vec{e}_2 + R\vec{e}_1 - \alpha l\dot{\theta}\vec{e}_2 = m(-l\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_1 + l\ddot{\theta}\vec{e}_2)$$

En projection selon  $\vec{e}_1$

$$\Rightarrow mg \cos(\theta) + R = -m l \dot{\theta}^2$$

En projection selon  $\vec{e}_2$

$$\Rightarrow mg \sin(\theta) + \alpha l \dot{\theta} = -m l \ddot{\theta}$$

Pour  $\theta$  petit (approximation des petits angles:  $\sin(\theta) \approx \theta$ ):

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Pour  $\theta$  petit (approximation des petits angles:  $\sin(\theta) \approx \theta$ ).

\* Méthode 2: Application du théorème du moment cinétique (TMC)

On applique le TMC après le même bilan des actions mécaniques

$$\vec{J}(\vec{e}_2)_O + \vec{J}(\vec{R})_O + \vec{J}(\vec{P})_O = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}$$

$$\Rightarrow O M \wedge \vec{R} + O M \wedge \vec{P} = \frac{d}{dt} (m O M \wedge \vec{v})$$

$$\Rightarrow -mg l \sin(\theta) \vec{e}_2 + \vec{0} + \alpha l^2 \dot{\theta} \vec{e}_2 = m l^2 \ddot{\theta} \vec{e}_2$$

car  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ . En projetant selon  $\vec{e}_2$ :

$$m l^2 \ddot{\theta} + \alpha l^2 \dot{\theta} + mg l \sin(\theta) = 0$$

$$\text{avec } \sin(\theta) \approx \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

\* Méthode 3: application du théorème de la puissance mécanique

L'énergie mécanique du système a écrit dans le cas ( $\alpha$ ):

$$E_m = E_{kin} + E_p = -mgz + \frac{1}{2} m v^2 \text{ avec } z = l \cos(\theta)$$

Ainsi:

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{\vec{f}} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\alpha v^2 = -\alpha l^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( -mg l \cos(\theta) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \right) = -\alpha l^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow mgl \dot{\theta} \sin(\theta) + \frac{1}{2} m l^2 \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \alpha l^2 \dot{\theta}^2 = 0$$

$$\Rightarrow mgl \sin(\theta) + m l^2 \ddot{\theta} + \alpha l^2 \dot{\theta} = 0$$

avec  $\sin(\theta) \approx \theta$ .

Les coefficients de l'équation différentielle sont de même signe ( $>0$ ) le système est donc stable.



Dans le cas (b), il faut reprendre les calculs avec les nouvelles expressions des forces et des énergies :

\* Relations :

$$\begin{cases} \vec{E} = -mg \cdot \cos(\theta) \vec{e}_1 + mg \cdot \sin(\theta) \vec{e}_2 \\ \vec{r} = R \vec{e}_1 \\ \vec{v} = -R \dot{\theta} \vec{e}_2 \end{cases}$$

or  $\vec{a} = -R \ddot{\theta} \vec{e}_1 + R \dot{\theta}^2 \vec{e}_2$

les signes des projections de  $\vec{E}$  et  $\vec{r}$  ont changé par rapport au cas (a) :

$$\begin{aligned} (1') & -mg \cdot \cos(\theta) + R = -m R \dot{\theta}^2 \\ (2') & mg \cdot \sin(\theta) - R \dot{\theta} = m R \ddot{\theta} \end{aligned}$$

De (2') :  $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} - \frac{g}{R} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} - \frac{g}{R} \theta = 0$

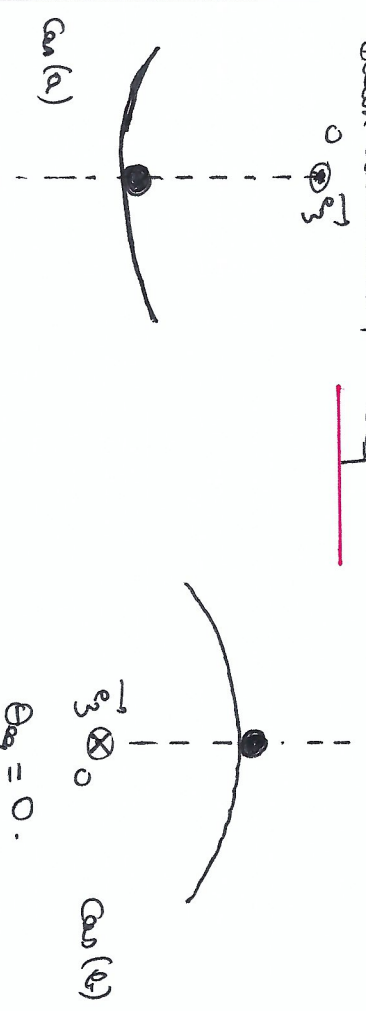
La valeur de la méthode 2 donne le même résultat sur fait des changements de signe dans les projections de  $\vec{E}$ . Pour la méthode 3, il faut remarquer que l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit cette fois-ci :  $E_{\text{pot}} = mgy = mgR \cos(\theta)$

Si l'appli cation du théorème de la puissance mécanique permet de se retrouver  $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} - \frac{g}{R} \theta = 0$

les coefficients de l'équation différentielle mesurent les deux du même signe : le système est instable.

q2 - si l'équilibre :  $\theta_{\text{eq}} = 0$  ;  $\dot{\theta}_{\text{eq}} = 0$ . Donc, dans ces

deux situations,  $\theta_{\text{eq}} = 0$ .



$\theta_{\text{eq}} = 0$

$\theta_{\text{eq}} = 0$

q3 - On cherche à analyser la stabilité de ces positions d'équilibre.

\* Si l'on ne cherche pas à résoudre l'équation différentielle, cherchant sur  $\theta$ , on peut appli que un critère énergétique : l'existence de signe de  $\frac{d^2 E_{\text{pot}}}{d\theta^2}$  proche de l'équilibre.

Cas (a) :  $E_{\text{pot}} = -mgR \cos(\theta) \Rightarrow \frac{d^2 E_{\text{pot}}}{d\theta^2} = mgR \sin(\theta)$

On remarque que  $\frac{d^2 E_{\text{pot}}}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) = 0$  comme attendu pour un équilibre

Or  $\frac{d^2 E_{\text{pot}}}{d\theta^2} = mgR \dot{\theta}^2 \cos(\theta)$ . Pour  $\theta$  proche de  $\theta_{\text{eq}} = 0$  :

$$\frac{d^2 E_{\text{pot}}}{d\theta^2} \approx mgR \dot{\theta}^2 \geq 0$$

$\theta_{\text{eq}}$  est donc un minimum local de  $E_{\text{pot}}(\theta)$  : cette position d'équilibre est stable. La dérivée seconde de  $T$  de même sera vers cette position.

Cas (b) :  $E_{\text{pot}} = +mgR \cos(\theta) \Rightarrow \frac{d^2 E_{\text{pot}}}{d\theta^2} = -mgR \dot{\theta}^2 \leq 0$

pour  $\theta$  proche de  $\theta_{\text{eq}} = 0$ .  $\theta_{\text{eq}} = 0$  est alors un maximum local : cette position d'équilibre est instable. Tout déplacement de



sa particularis de l'équation de cette position.

\* Dans cet exercice, on demande de résoudre (partiellement) l'équation différentielle pour des valeurs de la rigidité.

• Cas (a) :  $\ddot{\theta} + \frac{x}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \Rightarrow s^2 + \frac{x}{m} s + \frac{g}{l} = 0$

Cette dernière équation est l'équation caractéristique. Le discriminant

$\Delta$  est :  $\Delta = \left(\frac{x}{m}\right)^2 - 4 \frac{g}{l}$

Si le faitement est suffisamment faible (cf. exercice),  $\frac{x}{m} < \frac{g}{l}$

donc  $\Delta < 0$ . Ainsi :  $\Theta(t) = A e^{\gamma_1 t} + B e^{\gamma_2 t}$

avec  $\gamma_{1,2} = -\frac{x}{2m} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4 \frac{g}{l} - \left(\frac{x}{m}\right)^2} = -\frac{x}{2m} \pm \frac{j}{2} \sqrt{-\Delta}$

$\Rightarrow \Theta(t) = e^{-\frac{x}{2m} t} \left[ A e^{\frac{j}{2} \sqrt{-\Delta} t} + B e^{-\frac{j}{2} \sqrt{-\Delta} t} \right]$

soit, en posant deux réelles :  $\Theta(t) = e^{-\frac{x}{2m} t} \left[ A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t\right) \right]$

Comme  $\frac{x}{2m} > 0$ ,  $\Theta \rightarrow 0$  :  $\Theta_{eq} = 0$  est donc la position d'équilibre

stable.

• Cas (b) :  $\ddot{\theta} + \frac{x}{m} \dot{\theta} - \frac{g}{l} \theta = 0 \Rightarrow \Delta = \left(\frac{x}{m}\right)^2 + 4 \frac{g}{l} > 0$ .

Ainsi :  $\gamma_{1,2} = -\frac{x}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{x}{m}\right)^2 + 4 \frac{g}{l}} = -\frac{x}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}$ .

Les racines sont réelles, d'où :

$\Theta(t) = e^{-\frac{x}{2m} t} \left[ A e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} t} + B e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} t} \right]$

La solution est divergente :  $e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} t} e^{-\frac{x}{2m} t} = e^{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\Delta} - \frac{x}{m}\right) t}$

mais  $\sqrt{\Delta} - \frac{x}{m} = \sqrt{\left(\frac{x}{m}\right)^2 + 4 \frac{g}{l}} - \frac{x}{m} > 0$

donc  $\Theta(t) = A e^{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\Delta} - \frac{x}{m}\right) t} + B e^{-\frac{1}{2} \left(\sqrt{\Delta} + \frac{x}{m}\right) t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$

La position initiale  $\Theta_{eq} = 0$  n'est pas stable dans ce cas.

Q4 - Dans le cas (a') :

$\gamma(t) + L \frac{di}{dt} + u_C = e(t)$

Or  $i(t) = \frac{u_C}{R}$  (loi d'Ohm) et  $\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i$ . En dérivant

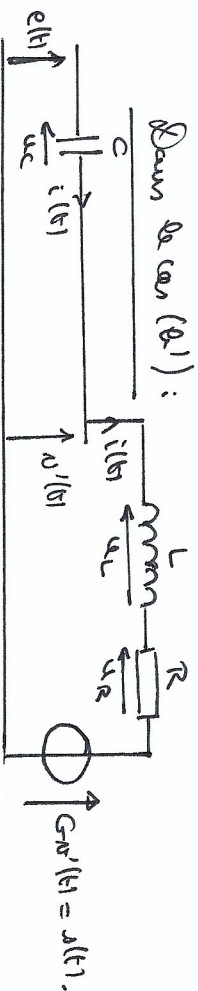
l'expression précédente :  $\frac{du}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} = \frac{de}{dt}$

$\Rightarrow \frac{du}{dt} + L \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{u}{RC} = \frac{de}{dt}$

$\Rightarrow \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u(t) = \frac{R}{L} \frac{de(t)}{dt}$

Pour  $e(t) = 0$  :  $\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u(t) = 0$

Dans le cas (a') :



(1)

$\gamma(t) + u_R + u_L + u_C = e(t)$

$e(t) = u_C(t) + u_L(t) = \frac{u_C(t)}{C} + u_L(t)$  (2)

Or  $i = C \frac{du_C}{dt}$  et  $\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \frac{du_C}{dt} + \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \frac{du_C}{dt} + \frac{di(t)}{dt}$

$\Rightarrow i(t) = C \left( \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{C} \frac{du_C}{dt} \right)$

(3) et (2) :  $\gamma(t) + R i(t) + \frac{1}{C} \frac{du_C(t)}{dt} = e(t) - u_C(t) = \frac{u_C(t)}{C}$

$$\Rightarrow \lambda(H) = \left(1 - \frac{1}{G}\right) + RC \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{1}{G} \frac{d\theta}{dt}\right) + LC \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{2}{G} \frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{LC}{G} \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{RC}{G} \frac{d\alpha}{dt} + \left(1 - \frac{1}{G}\right) \lambda(H) = -RC \frac{d\alpha}{dt} - LC \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{G}{LC} \left(1 - \frac{1}{G}\right) \lambda(H) = G \frac{R}{L} \frac{d\alpha}{dt} + G \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Pour  $d\lambda(H) = 0$  et  $G = R$ :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{1}{LC} \lambda(H) = 0.$$

En posant  $\lambda \leftrightarrow \theta$ ,  $\frac{R}{L} \leftrightarrow \frac{\alpha}{m} \frac{dt}{dt} \leftrightarrow \frac{g}{p}$ , on retrouve les équations différentielles portant sur  $\theta$  dans le cas (a) et (b).

Il est donc possible de reprendre les résultats de l'exercice précédent pour analyser le comportement des circuits électriques.

Entre autres, dans le cas (a) les coefficients de l'ED sont de même signe, contrairement au cas (b): le premier circuit est stable, mais pas le second. (\*)

Q6 - Pour caractériser q3: (a'):  $\lambda(H) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ A \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) \right]$

avec  $\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} < 0$  pour  $R$  suffisamment petite.

(b'):  $\lambda(H) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ A e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} + B e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} \right]$

avec  $\Delta' = \left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC} > 0$ .

Comme en Q3, la cas (a') correspond à un circuit amorti:  $\lambda \rightarrow 0$  et le circuit est stable. En revanche,  $\lambda(H) \rightarrow \pm \infty$  dans le cas (b'): il y a divergence de la tension, le système est donc instable.

(\*) Q5: Régime stable:

Le régime établi est la solution particulière de l'équation différentielle portant sur  $\lambda(H)$ . Dans son cas, cette solution est  $\lambda = 0$ , tout comme Eq = 0 est la fonction nulle dans le cas (a) et (b) équilibré en méconique.

Q7 - Dans les deux situations, on observe un régime stable (cas (a) et (a')) et un régime instable (cas (b) et (b')) les équations décrivent les comportements des deux systèmes ont la même forme et les solutions sont similaires: le régime permanent résulte soit en une position d'équilibre (méconique), soit en un régime établi (électrique) uniquement si le système est stable.