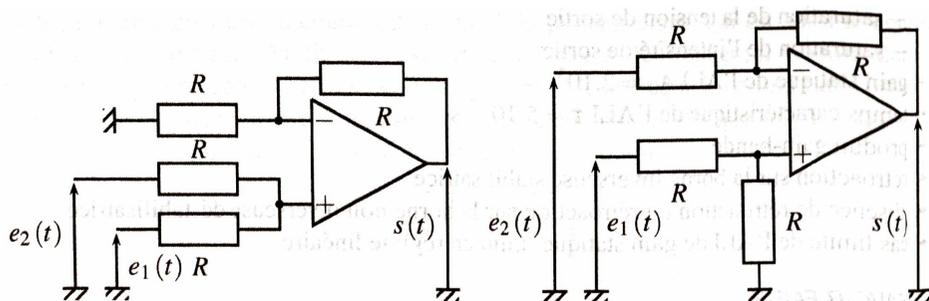


## TD2 - ALI - rétroaction

Remarque générale : sauf indication contraire, les ALI sont considérés dans tous les exercices comme idéaux.

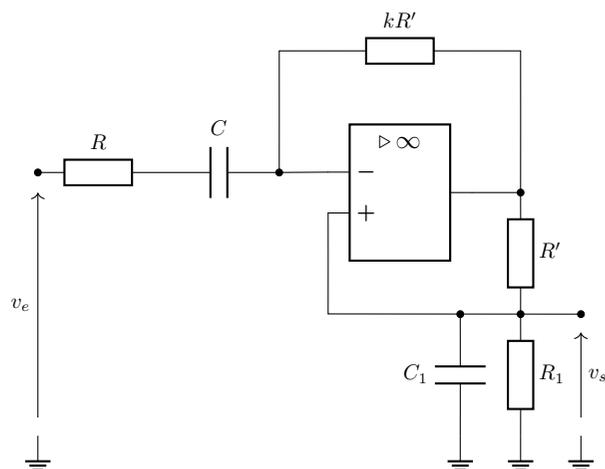
### 1 Opérations linéaires

Déterminer les opérations mathématiques élémentaires qu'effectuent les deux systèmes ci-dessous. Pour cela, exprimer la tension de sortie  $s(t)$  en fonction des tensions d'entrée  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ . On supposera que les ALI sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.



### 2 Filtre réglable

On considère le filtre dont le schéma est représenté ci-dessous. L'ALI est supposé fonctionner en régime linéaire.



Q1. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e}$ .

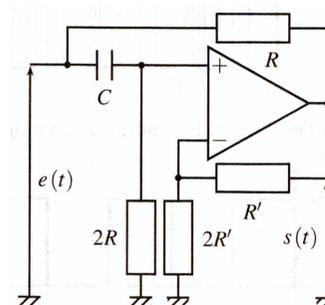
Q2. A quelle condition ce filtre est-il stable ?  
Dans la suite, on impose  $R = R_1$  et  $C = C_1$ .

Q3. Mettre la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{2m \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Q4. Quel est l'intérêt d'un tel montage ?

### 3 Simulateur d'inductance



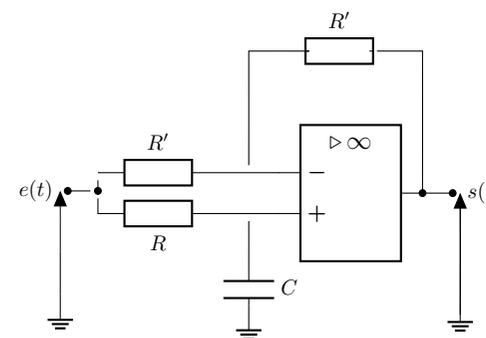
On considère l'ALI comme idéal et fonctionnant en régime linéaire.

Q1. Établir la fonction de transfert du montage ci-contre.

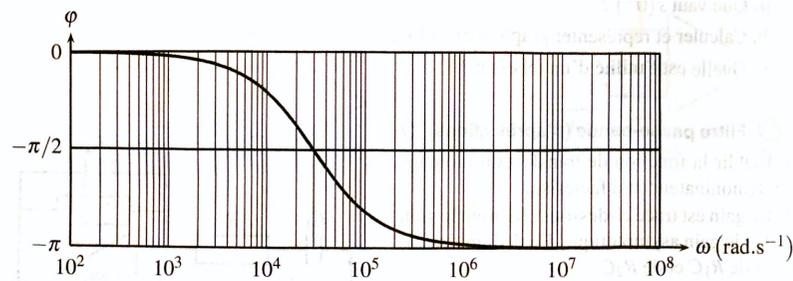
Q2. Calculer l'impédance d'entrée du montage. Montrer que le circuit est équivalent à une bobine réelle dont on déterminera l'inductance  $L$  et la résistance  $r$ .

### 4 Filtre passe-tout

Soit le montage décrit par le schéma suivant :

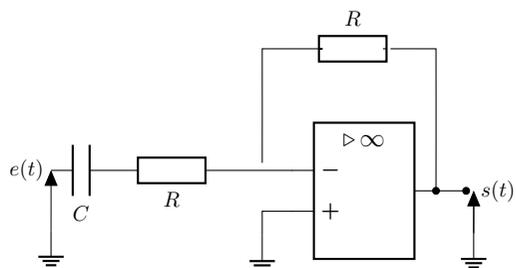


- Q1.** Pourquoi le montage précédent est-il stable ?
- Q2.** Que vaut le gain ? Calculer explicitement la phase en  $\omega = \frac{1}{RC}$ . Identifier la valeur du produit  $RC$  avec le graphe de la phase ci-dessous.



- Q3.** Quelle est l'utilité de ce montage ?
- Q4.** On alimente le circuit avec un échelon de hauteur  $E_0$ . Calculer et représenter la sortie  $s(t)$ . Commenter le phénomène observé en  $t = 0$  en liaison avec le contenu spectral d'un signal.

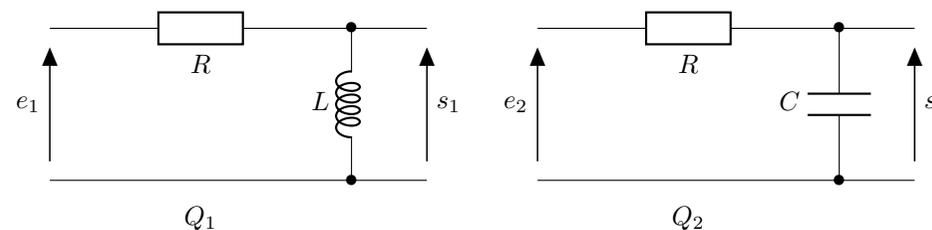
### 5 Dérivateur partiel



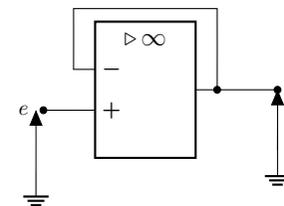
- Q1.** Établir la fonction de transfert  $H(p)$  du montage précédent.
- Q2.** De quel type de filtre s'agit-il (passe-bas, haut, bande ... ) ? Dans quelle zone de fréquence sert-il de dérivateur ? d'intégrateur ? Que vaut alors la phase asymptotique dans cette zone ?
- Q3.** Quelle est l'équation différentielle reliant  $e$  à  $s$  ?
- Q4.** On réalise un essai indiciel d'amplitude  $E_0$ .
- Que vaut  $s(0+)$  ?
  - Calculer et représenter graphiquement  $s(t)$ .
  - Quelle est l'utilité d'un tel essai ?

### 6 Utilité du montage suiveur

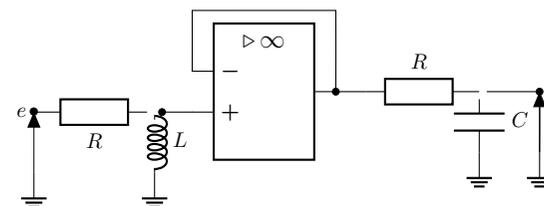
Deux quadripôles  $Q_1$  et  $Q_2$  constituent des filtres du premier ordre, de fonctions de transfert respectives  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$ . Ces deux filtres sont représentés ci-dessous :



- Q1.** Exprimer  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$ .
- Q2.** On envisage de mettre en cascade ces deux filtres : c'est-à-dire de brancher la sortie de  $Q_1$  sur l'entrée de  $Q_2$ . Peut-on considérer la fonction de transfert de l'association comme le produit de  $\underline{H}_1$  et de  $\underline{H}_2$  ?
- Q3.** On utilise le circuit de la figure ci-dessous, appelé étage suiveur, constitué d'un amplificateur linéaire intégré, que l'on suppose idéal.



- Pourquoi peut-on envisager un fonctionnement en régime linéaire ?
  - Quelle relation peut-on écrire entre les tensions d'entrée et de sortie de cet étage suiveur ?
- Q4.** On réalise la mise en cascade du filtre  $Q_1$ , de l'étage suiveur et du filtre  $Q_2$  (figure ci-dessous).

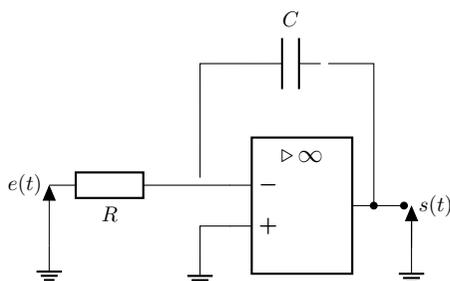


- Quelle est l'intensité absorbée à l'entrée de l'étage suiveur ? Conclure sur le fonctionnement du filtre  $Q_1$ .

- ii. Quelle relation peut être écrite entre le signal de sortie du premier filtre et le signal  $s(t)$ ? En déduire l'expression de la fonction de transfert de l'opérateur complet.
- iii. Quel est le comportement du système complet? Comment ses propriétés caractéristiques sont-elles liées à celles des filtres  $Q_1$  et  $Q_2$ ?

## 7 Intégrateur réel (\*)

On considère le montage de la figure ci-dessous couramment appelé intégrateur-inverseur. On se propose de déterminer l'influence sur sa fonction de transfert, de la variation du gain différentiel de l'amplificateur linéaire intégré avec la fréquence.



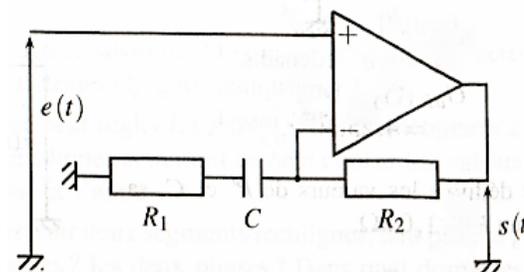
On utilisera les valeurs  $R = 1\text{ k}\Omega$  et  $C = 100\text{ nF}$ , ainsi que les paramètres caractéristiques de l'amplificateur intégré : gain statique  $A_0 = 10^5$ , fréquence de coupure  $f_c = 30\text{ Hz}$ .

On pose  $p = j\omega$  où  $j$  est l'imaginaire pur :  $j^2 = -1$ .

- Q1. Dans le modèle d'amplificateur linéaire intégré idéal, quelle est la fonction de transfert  $H = \frac{s}{e}$  du montage?
- Q2. On tient compte à présent du gain fini  $A_d$  de l'amplificateur linéaire intégré. Proposer une nouvelle expression de la fonction de transfert, en faisant intervenir  $A_d$ .
- Q3. Dans le modèle d'un gain prenant la forme d'une fonction de transfert du premier ordre de gain statique  $A_0$  et de fréquence de coupure  $f_c$ , mettre la fonction de transfert du montage sous la forme d'une fonction du second ordre.
- Q4. Peut-on envisager une factorisation en un produit de fonctions de transfert du premier ordre? Dans l'affirmative, quelles en sont les pulsations de coupure?
- Q5. La gamme des fréquences d'utilisation est choisie égale à [1Hz; 1MHz]. Quel comportement approché peut-on proposer pour ce montage? Conclure.

## 8 Filtre accentuateur (\*)

On considère le circuit ci-dessous, pour lequel  $R_1 C = 10^{-3}\text{ s}$  et  $(R_1 + R_2)C = 10^{-1}\text{ s}$ .

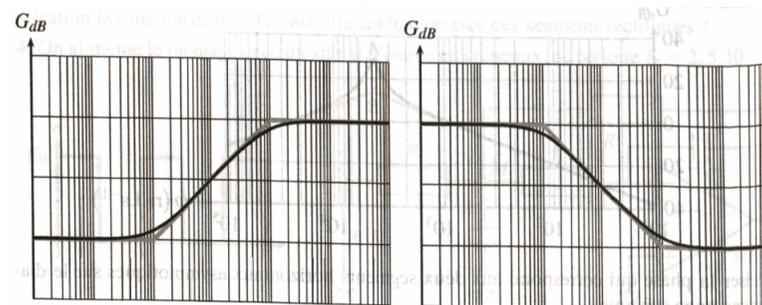


- Q1. Pourquoi le système est-il stable?
- Q2. Établir la fonction de transfert sous la forme :

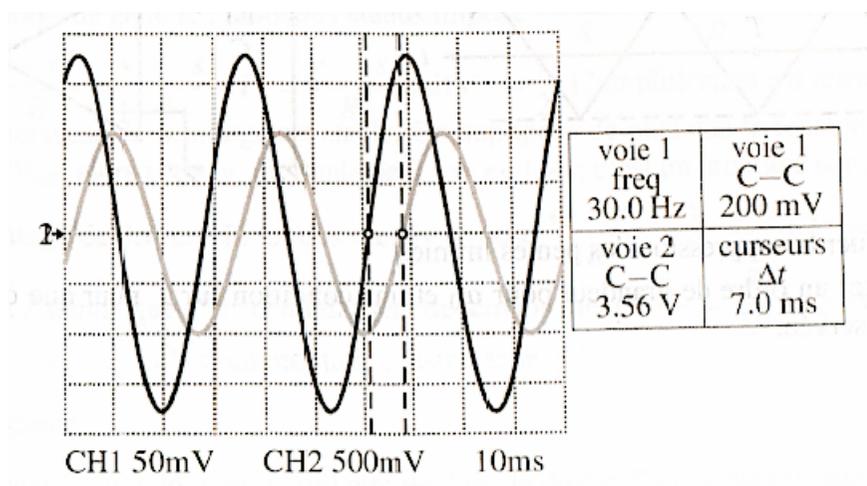
$$H(p) = \frac{1 + \tau_0 p}{1 + \tau_1 p}$$

où  $\tau_0$  et  $\tau_1$  sont à exprimer en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $C$ .

- Q3. On propose deux tracés de gain en décibel. Préciser celui qui correspond au filtre étudié, ainsi que les différentes pentes et les valeurs intéressantes sur les axes. Conclure quant au nom de « filtre accentuateur ». Quelles sont les valeurs de la phase dans chaque domaine asymptotique?



- Q4. On alimente le circuit avec  $e(t) = E_0 + E_1 \cos(2\pi f_e t)$ , où  $E_0 = E_1 = 1\text{ V}$  et  $f_e = 1,6\text{ kHz}$ . Que vaut la sortie  $s(t)$  en régime permanent?
- Q5. Le signal  $e(t)$  est désormais celui représenté en gris sur l'oscillogramme suivant. Lors du câblage du circuit, la valeur de  $R_2$  n'a pas été exactement respectée, ce qui implique  $(R_1 + R_2)C \simeq 10^{-1}\text{ s}$ . Cependant, les valeurs de  $R_1$  et  $C$  sont bien celles de l'introduction, avec  $R_1 C = 1,00 \cdot 10^{-3}\text{ s}$ . On observe expérimentalement le signal de sortie  $s(t)$  (en noir).



- i. En déduire la valeur du produit  $R_2C$ .
- ii. Que vaut le déphasage entre les deux signaux? Quel est le signal en retard sur l'autre?
- iii. Établir et tracer la réponse indicielle du circuit. On exprimera la solution en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $C$ , sans application numérique. Sachant que  $R_2 \simeq 10^2 R_1$ , à quelle condition sur l'amplitude du signal d'entrée peut-on observer un tel signal en sortie de l'amplificateur opérationnel?

**Q6.** On tient dorénavant compte des défauts de l'amplificateur opérationnel, qui est modélisé par un passe-bas du premier ordre, de constante de temps 10 ms.

- i. Rappeler la fonction de transfert de l'amplificateur opérationnel, avec les valeurs numériques des constantes qui y apparaissent.
- ii. Montrer que la fonction de transfert du circuit se factorise sous la forme (on rappelle que  $R_1C \simeq 10^{-3}$  s et  $R_2C \simeq 10^{-1}$  s) :

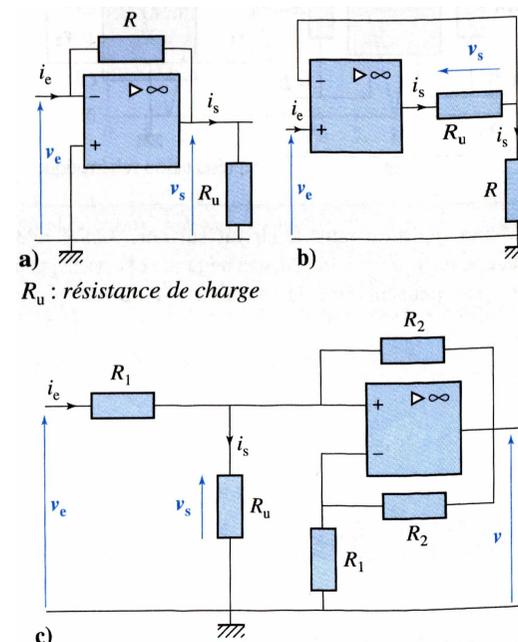
$$H(p) = \frac{1 + \tau_0 p}{(1 + \tau_1 p)(1 + \theta p)}$$

où  $\theta$  dépend de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C$  et des caractéristiques internes de l'amplificateur opérationnel.

- iii. Expliquer pourquoi la tension de sortie n'est alors pas discontinue lorsque l'entrée passe de 0 à  $E_0$  en  $t = 0$ .
- iv. Quelle est la valeur de  $\frac{ds}{dt}(0+)$ ? Qu'en conclure?

## 9 Convertisseurs U-I et I-U (\*)

On considère les trois montages représentés dans la figure ci-dessous :



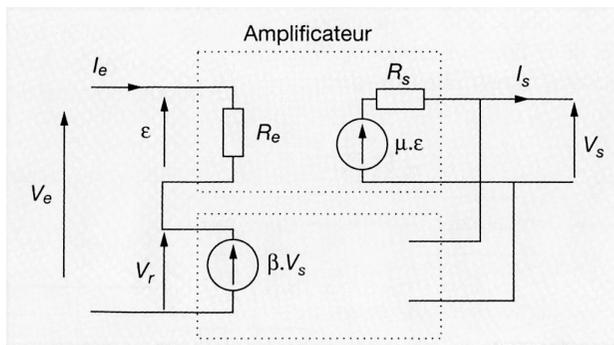
On rappelle qu'un amplificateur idéal réalise l'opération  $v_s = Av_e$ , où  $A$  est le facteur d'amplification : c'est un convertisseur tension-tension. L'impédance d'entrée d'un tel système est infinie, son impédance de sortie nulle.

Un convertisseur courant-tension ( $I - U$ ) idéal réalise l'opération  $v_s = R_t i_e$ , où  $R_t$  est la transrésistance du système. L'impédance d'entrée d'un tel système est nulle, ainsi que son impédance de sortie.

- Q1.** Donner les caractéristiques de ce que pourrait être un convertisseur tension-courant ( $U - I$ ) idéal.
- Q2.** Montrer que le montage **a)** réalise la conversion courant-tension idéale et les montages **b)** et **c)** réalisent la conversion tension-courant.
- Q3.** Quel avantage présente le circuit **c)** par rapport au circuit **b)**?
- Q4.** Comment rendriez-vous le circuit **c)** idéal?

## 10 Impédances d'entrée et de sortie dans le cas d'une rétroaction (\*)

Un quadripôle amplificateur réel est associé à un quadripôle de rétroaction, comme présenté sur le schéma ci-dessous. On adoptera les valeurs numériques suivantes :  $R_e = 1\text{ M}\Omega$ ,  $R_s = 10\ \Omega$ ,  $\mu = 10^5$ .



- Q1.** On suppose pour l'instant le courant de sortie nul. Établir un schéma fonctionnel faisant apparaître les différentes grandeurs  $V_e$ ,  $V_r$ ,  $V_s$  et  $\epsilon$ . En déduire la valeur qu'il convient de donner à  $\beta$  pour que le gain  $G = \frac{V_s}{V_e}$  soit égal à 100.
- Q2.** On définit la résistance d'entrée de l'ensemble par  $R_{in} = \left(\frac{V_e}{I_e}\right)_{I_s=0}$ . Exprimer, puis calculer  $R_{in}$  et comparer à la valeur de  $R_e$ .
- Q3.** On définit la résistance de sortie de l'ensemble par  $R_{out} = \left(\frac{V_{s0} - V_s}{I_s}\right)$  où  $V_{s0}$  est la tension observée en sortie (à la même tension d'entrée) lorsque l'intensité du courant débité est nulle. Exprimer, puis calculer  $R_{out}$  et comparer à la valeur de  $R_s$ .
- Q4.** Conclure sur les avantages apportés par la rétroaction.

## Aides pour les exercices

### Exercice 1

- Circuit de gauche :  $s(t) = e_1(t) + e_2(t)$  ;
- Circuit de droite :  $s(t) = e_1(t) - e_2(t)$ .

### Exercice 2

**Q1.** 
$$H = \frac{-jkR_1C\omega}{1 + j\omega(RC + R_1C_1 - kR_1C) + (j\omega)^2RR_1CC_1}$$

**Q2.**  $k < \frac{R}{R_1} + \frac{C_1}{C}$

**Q3.** On retrouve le résultat par identification :  $H_0 = \frac{k}{k-2}$ ,  $m = 1 - \frac{k}{2}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ .

**Q4.** Réfléchir à la nature du filtre et des grandeurs influençant ses paramètres-clés.

### Exercice 3

**Q1.** 
$$H = \frac{s}{\underline{e}} = \frac{3jRC\omega}{1 + 2jRC\omega}$$

**Q2.** L'impédance d'entrée est définie par  $\underline{Z}_e = \frac{\underline{e}}{\underline{i}_e}$ , avec  $\underline{i}_e$  le courant d'entrée du dispositif. Après calculs :  $\underline{Z}_e = R + 2j\omega R^2C$ .

### Exercice 4

**Q1.** cf. cours (chapitre 2 : critères de stabilité d'un montage à ALI).

**Q2.**  $G = |H(\omega)| = 1$  et  $\varphi = -2 \arctan(RC\omega) \Rightarrow \varphi(\omega_c = 1/RC) = -\frac{\pi}{2}$ . On déduit du graphe  $RC = \frac{1}{\omega_c} = 3.3 \times 10^{-5}\text{ s}$

**Q3.** Analyser le gain et le déphasage en fonction de  $\omega$ .

**Q4.** Résoudre l'équation différentielle sachant que  $e(t) = E_0 = \text{cste}$  pour  $t > 0$ . Le théorème de la valeur initiale (cf. cours de SI) permet par ailleurs d'écrire que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pS(p)$  avec  $S(p) = H(p)E(p)$  à calculer. On obtient :  $s(t) = E_0 \left(1 - 2 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$ . Justifier pourquoi  $s(t)$  est déphasé de  $\pi$  pour  $t \rightarrow 0^+$ .

## Exercice 5

- Q1.  $H(p) = -\frac{pRC}{1+pRC}$
- Q2. Filtre passe-haut; dérivateur pour  $\omega \ll \omega_c = \frac{1}{RC}$ , mais pas de comportement intégrateur.
- Q3.  $\frac{ds}{dt}(t) + \frac{1}{RC}s(t) = -\frac{de}{dt}$
- Q4. Comme dans l'exercice 4, on exploite le théorème de la valeur initiale pour trouver  $s(t) = -E_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ . L'essai indiciel permet de déterminer  $\tau$  (à montrer grâce à la représentation graphique).

## Exercice 6

- Q1.  $H_1 = \frac{jL\omega}{R+jL\omega}$  et  $H_2 = \frac{1}{1+jRC\omega}$
- Q2. La fonction de transfert d'une association de filtres n'est égale au produit des fonctions de transfert que si les filtres ont une impédance de sortie infinie et une impédance d'entrée nulle, i.e. si aucun courant ne circule entre ces filtres.
- Q3. cf. cours.
- Q4. Intensité nulle;  $\underline{s} = \underline{H_1 H_2 e}$ . Le diagramme de Bode en gain du système complet est la somme des diagrammes de Bode de chaque filtre pris séparément : on observe donc un filtre passe-bande.

## Exercice 7

- Q1.  $\underline{H} = -\frac{1}{jRC\omega}$
- Q2.  $\underline{H} = -\frac{A_d}{1+jRC(1+A_d)\omega}$
- Q3.  $\underline{H} = -\frac{A_0}{1+j\omega\left(\frac{1}{\omega_c}+RC(1+A_0)\right)+(j\omega)^2\frac{RC}{\omega_c}}$  avec  $\omega_c$  la pulsation de coupure du filtre passe-bas modélisant l'ALI réel.
- Q4. Pulsations de coupure :  $\omega_1 = \frac{1}{RC(1+A_0)}$  et  $\omega_2 = \omega_c(1+A_0)$
- Q5. Comparer la fréquence  $f$  aux fréquences de coupure, et simplifier  $\underline{H}$  en considérant  $A_0$  "suffisamment grand".

## Exercice 8

- Q1. Rétroaction purement négative.
- Q2.  $\tau_0 = (R_1 + R_2)C = 1 \times 10^{-1}$  s et  $\tau_1 = R_1C = 1 \times 10^{-3}$  s.
- Q3. L'analyse asymptotique de la fonction  $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$  donne le diagramme de gauche. Le déphasage est nul dans chaque domaine asymptotique.

- Q4.  $s(t) \simeq E_0 + 100E_1 \cos(2\pi f_e t)$ .
- Q5. En exploitant  $|\underline{H}|$  et le graphique fourni (notamment les amplitudes  $S_0$  et  $E_0$  des signaux), on obtient  $R_2C \simeq 9.50 \times 10^{-2}$  s;  $\Delta\varphi = 1.32$  rad :  $e$  est en retard sur  $s$ ; la réponse indicelle est la réponse à un échelon de tension. La méthode de résolution est la même que dans les exercices 4 et 5 (utilisation du théorème de la valeur initiale).
- Q6. cf. cours :  $A(p) = \frac{A_0}{1+\tau p}$  avec  $o(A_0) = 10^5$  et  $o(\tau) = 1 \times 10^{-3}$  s. Il faut ensuite reprendre le développement de la question Q2. mais avec un ALI réel : on obtient la forme demandée avec  $\theta = \frac{\tau}{A_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$ . On remarque alors que  $s(0^+) = s(0^-) = 0$ , ce qui justifie la continuité de la tension, et  $\frac{ds}{dt}(0^+) = 10^8 \times E_0$  ce qui est une pente très élevée (temps de montée d'environ  $1\mu\text{s}$ ).

## Exercice 9

- Q1. Convertisseur **tension-courant** : réalise l'opération  $i_s = G_i v_e$  avec  $G_i$  la conductance (inverse de la résistance). Caractéristiques :  $Z_e \rightarrow +\infty$ ;  $Z_s \rightarrow +\infty$
- Q2. Montage **a**) :  $v_s = -Ri_e$ ,  $Z_e = Z_s = 0$  : convertisseur courant-tension idéal ; montage **b**) :  $i_s = \frac{v_e}{R}$ ,  $Z_e$  et  $Z_s \rightarrow +\infty$  : convertisseur tension-courant idéal ; montage **c**) :  $i_s = \frac{v_e}{R_1}$ ,  $Z_s \rightarrow +\infty$  mais  $Z_e = R_1$  : convertisseur tension-courant non-idéal (cf. Q4.).
- Q3. Comparer les situations des charges  $R_u$  dans les montages **b**) et **c**).
- Q4. Quel dispositif rajouté en entrée augmente l'impédance d'entrée ?

## Exercice 10

- Q1.  $G = \frac{\mu}{1+\mu\beta} \simeq \frac{1}{\beta}$  donc  $\beta = 0.01$ .
- Q2.  $R_{in} = (1 + \mu\beta)R_e \simeq 10^3 R_e$ .
- Q3.  $R_{out} = \frac{R_s}{(1+\mu\beta)} \simeq 10^{-3} R_s$ .
- Q4. La résistance de sortie est diminuée d'un facteur 1000.