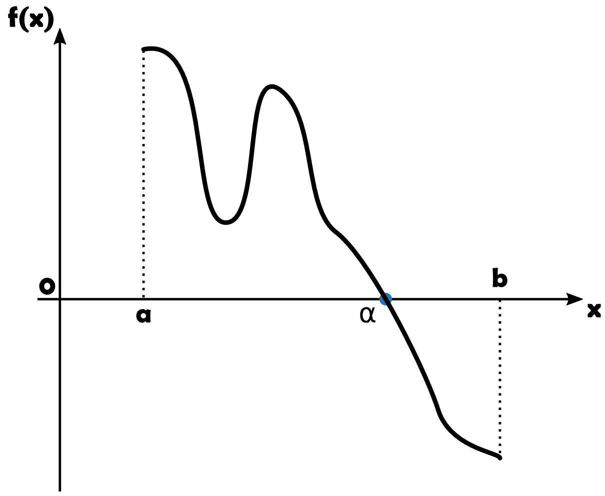
Centre d'intérêt 5

Résolution d'une équation $f(x)=0$

PSI - MP : Lycée Rabelais

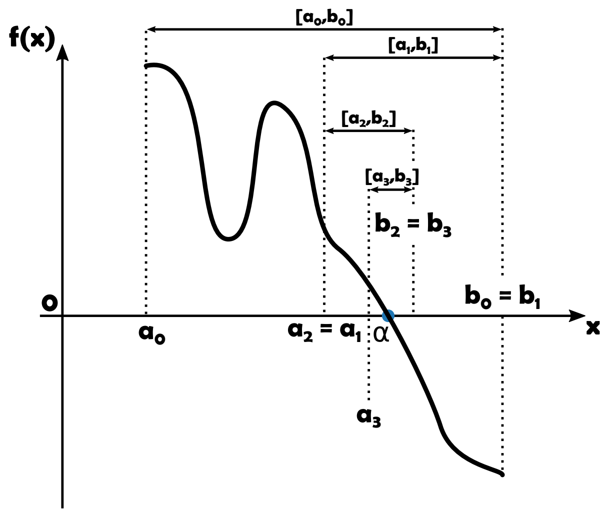
On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$. On cherche $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha)=0$. Cette solution existe si $f(a)\times f(b)<0$. Les méthodes pour approcher la valeur de α consistent à construire une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.



On fixe usuellement une tolérance ε (valeur fixée). On peut utiliser plusieurs critères d'arrêt :

- Critère absolu : $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$
- Critère relatif : $\left|\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\right|<\varepsilon$
- Critère résiduel : $|f(x_n)|<\varepsilon$

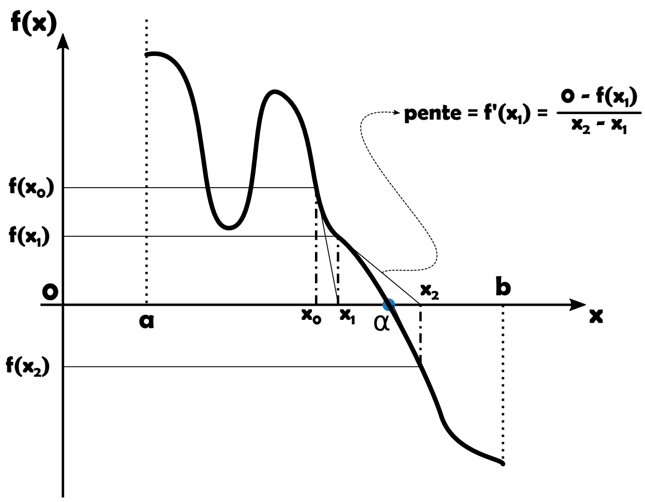
1 Méthode de dichotomie



Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. Calculer le point milieu m de l'intervalle $[a,b]$.
2. Évaluer le signe de $f(a)\times f(m)$.
3. En déduire le sous-intervalle $[a,m]$ ou $[m,b]$ dans lequel chercher la solution.
4. Repartir à l'étape **1** tant que le critère d'arrêt n'est pas vérifié.

2 Méthode de Newton



Pour cette méthode, la fonction f doit être dérivable sur l'intervalle $[a,b]$.

Pour résoudre l'équation $f(\alpha)=0$, il faut suivre les étapes suivantes :

1. Calculer une valeur $x_0\in[a,b]$.
2. Construire la valeur suivante $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n}{f'(x_n)}$.
3. Repartir à l'étape **2** tant que le critère d'arrêt n'est pas vérifié.

Pour retrouver la relation de récurrence, il faut écrire la pente $f'(x_i)$ en un point $(x_i, f(x_i))$.

Exercice d'application

On considère la fonction $f(x) = \sin(\sin(x)) - \sin(\sin(2x))$. On veut trouver la solution $\alpha \in [1,2]$ de l'équation $f(\alpha) = 0$.

Question 1. Définir la fonction `f`.

Question 2. Tracer la courbe représentative de la fonction sur l'intervalle souhaité en utilisant le script ci-dessous :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return ................

Lx = np.linspace(...................) ## documentation numpy fournie ci-dessous

Lf = f(Lx) ## fonctionne car tableaux numpy !

plt.plot(Lx,Lf)
```

Documentation `numpy`

Le module `numpy` permet de gérer notamment des vecteurs et des tableaux. La plupart des opérations sur les listes peuvent s'appliquer sur les tableaux `numpy`. Quelques opérations élémentaires sont données ci-dessous :

- `A = numpy.zeros((a,b))` crée un tableau de `a` lignes et `b` colonnes.
- numpy.shape(A) donne le tuple associé à la taille de `A` (ici `(a,b)`).
- `A[i]` permet d'accéder à la ligne `i` au complet.
- `A[i,j]` permet d'accéder à la valeurs stockée à l'indice `i` de la ligne et `j` de la colonne (cela est équivalent à `A[i][j]`). Les `slices` du type `A[i:j,:k]` permettent de parcourir une portion du tableau (mais ce n'est pas équivalent à `A[i:j][:k]`).
- La fonction `append` ne fonctionne pas pour des tableaux `numpy` !

`numpy.linspace(start , stop , num)` renvoie un vecteur `numpy` de `num` valeurs régulièrement réparties sur l'intervalle [`start , stop`].

Question 3. Postuler sur la solution à trouver.

Question 4. Déterminer la solution $\alpha \in]a,b[$ par la méthode de dichotomie

Question 5. Calculer puis définir la fonction `fprim(x)` qui renvoie la dérivée de la fonction f.

Question 6. En déduire la solution $\alpha \in]a,b[$ par la méthode de Newton.