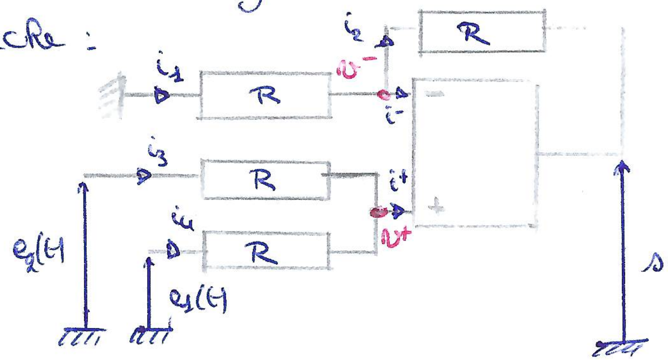
TD n°2 : ALI et rétroactions

Exercice I - Opérations linéaires

Soient les deux systèmes donnés. Étudions le système de gauche :



On suppose l'amplificateur idéal : $\varepsilon = v^+ - v^- = 0$.
On sait que, selon la loi des noeuds exprimée en potentiels et étant donné que $i^- = i^+ = 0$:

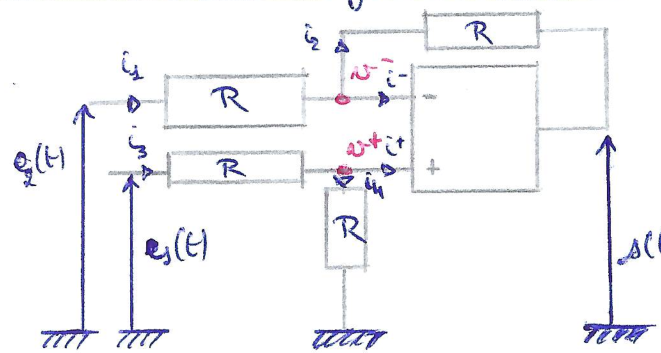
* $\dfrac{0 - v^-}{R} = \dfrac{v^- - s}{R} \Leftrightarrow v^- = \dfrac{s}{2}$.

* $\dfrac{e_2 - v^+}{R} + \dfrac{e_1 - v^+}{R} = 0 \Leftrightarrow e_2 + e_1 = 2v^+ \Leftrightarrow v^+ = \dfrac{e_2 + e_1}{2}$.

Ainsi : $v^+ - v^- = 0 \Leftrightarrow v^+ = v^- \Leftrightarrow \boxed{s = e_2 + e_1}$.

Ce montage est donc un sommateur de tension.

- Étudions désormais le système de droite :



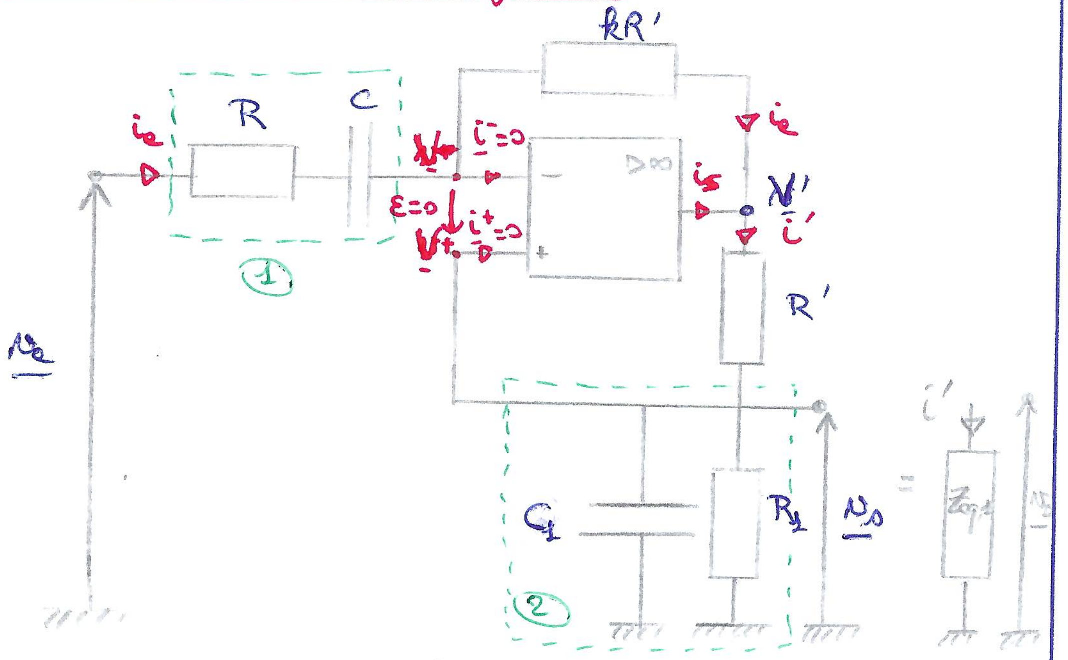
- On suppose l'ALI idéal : $\varepsilon = 0 = v^+ - v^- \Leftrightarrow v^+ = v^-$.
- Sachant que $i^+ = i^- = 0$, appliquons la loi des noeuds en termes de potentiels :
  - $\dfrac{e_2 - v^-}{R} = \dfrac{v^- - s}{R} \Leftrightarrow v^- = \dfrac{e_2 + s}{2}$.
  - $\dfrac{e_1 - v^+}{R} = \dfrac{v^+ - 0}{R} \Leftrightarrow v^+ = \dfrac{e_1}{2}$.

Ainsi : $v^+ = v^- \Leftrightarrow e_1 = e_2 + s$

$\Leftrightarrow \boxed{s = e_1 - e_2}$.

Ce montage est donc un soustracteur de tension.

Exercice : Filtre réglable.



1 - • Le bloc ① est équivalent à une impédance

$$\underline{Z_{eq}} = R + \underline{Z_c} = R + \frac{1}{jC\omega} = \boxed{\frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}}$$

• Le bloc ② est équivalent à une impédance $\underline{Z_{eq,1}}$ telle que

$$\frac{1}{\underline{Z_{eq,1}}} = \frac{1}{\underline{Z_{c_1}}} + \frac{1}{R_1} = jC_1\omega + \frac{1}{R_1} = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{R_1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z_{eq,1}} = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}}$$

• L'ALI fonctionne en régime linéaire et est idéal :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{V}^+ - \underline{V}^- = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{V_s} - \underline{V}^- = 0 \Leftrightarrow \boxed{\underline{V}^- = \underline{v_s}}$$

• On applique la loi des nœuds à l'entrée inverseuse :

$$\frac{\underline{v_e} - \underline{v_s}}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{\underline{v_s} - \underline{V}'}{kR'}.$$

Or : $\dfrac{\underline{V}' - \underline{v_s}}{R'} = \dfrac{\underline{v_s}}{\underline{Z_{eq,1}}}$ car $i^+ = 0$ donc le même courant i' traverse R' et $\underline{Z_{eq,1}}$.

Ainsi : $\underline{V}' = R'\underline{v_s}\left(\dfrac{1}{R'} + \dfrac{1}{\underline{Z_{eq,1}}}\right)$

et : $$\frac{\underline{v_e}}{\underline{Z_{eq}}} = \underline{v_s}\left[\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} + \frac{1}{kR'} - \frac{1}{k}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{\underline{Z_{eq,1}}}\right)\right].$$

$$= \underline{v_s}\left[\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} - \frac{1}{k\underline{Z_{eq,1}}}\right].$$

$$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{1}{1 - \frac{\underline{Z_{eq}}}{k\underline{Z_{eq,1}}}} = \frac{1}{1 - \frac{\frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}}{\frac{kR_1}{1 + jC_1R_1\omega}}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{(1 + jRC\omega)(1 + jR_1C_1\omega)}{jkR_1C\omega}}.$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{jkR_1C\omega}{jkR_1C\omega - \left[1 + j\omega(RC + R_1C_1) + (j\omega)^2 RR_1C_1C\right]}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{jkR_1C\omega}{-1 + j\omega(kR_1C - RC - R_1C_1) - RR_1CC_1(j\omega)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{-jkR_1C\omega}{1 + j\omega(-kR_1C + RC + R_1C_1) + RR_1CC_1(j\omega)^2}}$$

2 - Filtre stable :

$$-kR_1C + RC + R_1C_1 > 0.$$

$$\Leftrightarrow k < \frac{RC + R_1C_1}{R_1C}.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k < \frac{R}{R_1} + \frac{C_1}{C}}$$

q3- <u>Par identification :</u>

$$\begin{cases} H_0 \cdot \dfrac{2m}{\omega_0} = -kR_1C \\ \dfrac{2m}{\omega_0} = -kR_1C + RC + R_1C_1 \\ \dfrac{1}{\omega_0^2} = RCR_1C_1 \end{cases}$$

On pose $R = R_1$ et $C = C_1$. Alors :

$$\boxed{\begin{cases} H_0 = -\dfrac{k}{2-k} \\ \dfrac{2m}{\omega_0} = RC(2-k) \Rightarrow m = 1 - \dfrac{k}{2}. \\ \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \end{cases}}$$

<u>Rq:</u> m est le facteur d'amortissement.

- <u>Pour $k < 2$ (système stable, cas $R = R_1$ et $C = C_1$) :</u>

  $m > 0 \Rightarrow$ amortissement du signal.

- <u>Pour $k > 2$ (système instable) :</u>

  $m < 0 \Rightarrow$ amplification du signal.

q4- <u>Intérêt :</u> filtre passe-bande dont le facteur de qualité est réglé par k, de manière indépendante de R et C qui contrôlent ω_0.

$Q = \dfrac{1}{2m} = \dfrac{1}{2-k} \Rightarrow Q \to +\infty$ pour $k \to 2^-$, donc en limite de stabilité. On peut obtenir un filtre passe-bande très sélectif.

Simulateur d'inductance

q1- On suppose l'ALI idéal et fonctionnant en régime

$$\underline{\varepsilon} = \underline{V_+} - \underline{V_-} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{V_+} = \underline{V_-}}$$

Selon la loi des noeuds en termes de potentiel, avec $i_+ = i_- = 0$:

$$\begin{cases} (\underline{e} - \underline{V_+}) \times jC\omega = \dfrac{\underline{V_+}}{2R} & \Leftrightarrow \boxed{\underline{V_+} = \dfrac{2jRC\omega}{1+2jRC\omega}\,\underline{e}} \\[2ex] \dfrac{\underline{s} - \underline{V_-}}{R'} = \dfrac{\underline{V_-}}{2R'} & \Leftrightarrow \boxed{\underline{s} = \dfrac{3}{2}\underline{V_-}} \end{cases}$$

Puisque $\underline{V_+} = \underline{V_-}$: $\underline{s} = \dfrac{3}{2}\underline{V_-} = \dfrac{3}{2}\underline{V_+}$

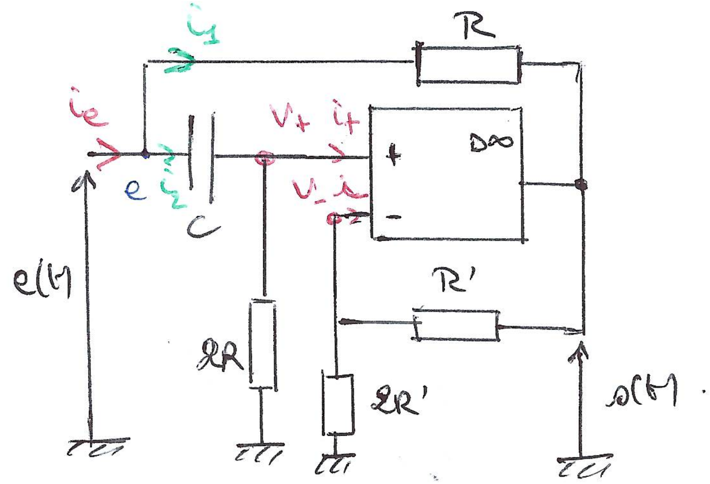
$$\Leftrightarrow \underline{s} = \frac{3}{2} \times \frac{2jRC\omega}{1+2jRC\omega} \cdot \underline{e}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{s} = \frac{3jRC\omega}{1+2jRC\omega}\,\underline{e} = \underline{H}(j\omega).\underline{e}}$$

avec $\underline{H}(j\omega)$ la fonction de transfert du système.

q2- L'impédance d'entrée du montage est $\underline{Z_e}$ telle que :

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{e}}{\underline{i_e}}.$$



Or : $\underline{i_e} = \underline{i_1} + \underline{i_2}$

avec $\underline{i_2} = \dfrac{\underline{V_+}}{2R} = \dfrac{jC\omega}{1+2jRC\omega}\,\underline{e}$

et $\underline{i_1} = \dfrac{\underline{e} - \underline{s}}{R}$

Or $\underline{e} - \underline{s} = \underline{e}\left[1 - \dfrac{3jRC\omega}{1+2jRC\omega}\right]$

$$= \underline{e} \times \frac{1 - jRC\omega}{1+2jRC\omega}$$

Ainsi : $\underline{i_1} = \dfrac{\underline{e}}{R} \times \dfrac{1-jRC\omega}{1+2jRC\omega}$

Donc :

$$\underline{i_e} = \underline{i_1} + \underline{i_2} = \underline{e}\left[\frac{1}{R} \times \frac{1-jRC\omega}{1+2jRC\omega} + \frac{jC\omega}{1+2jRC\omega}\right]$$

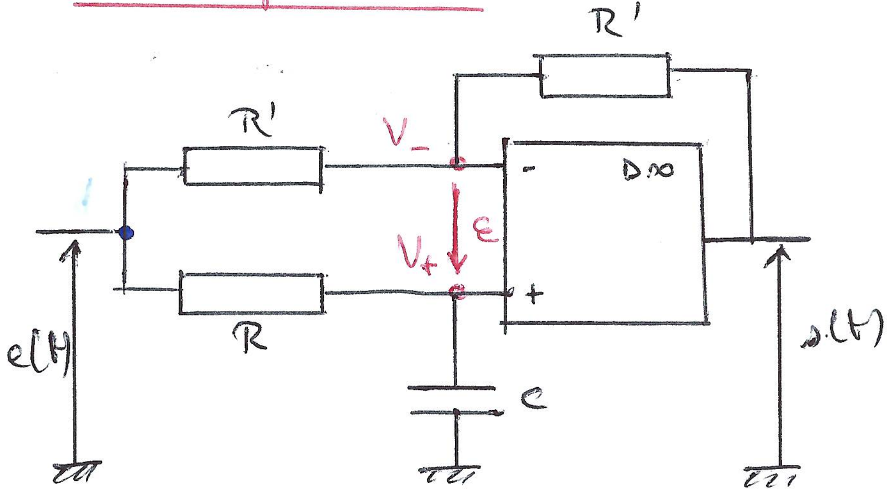
$$= \underline{e} \times \frac{1 - jRC\omega + jRC\omega}{R(1+2jRC\omega)} = \underline{e} \cdot \frac{1}{R + 2jR^2C\omega}$$

Ainsi : $\underline{Z_e} = \dfrac{\underline{e}}{\underline{i_e}} = R + 2jR^2C\omega = r + jL\omega$

avec $\boxed{r = R \text{ et } L = 2R^2C}$.

Avantages :
- gain de ~~place~~ place par rapport aux bobines classiques.
- fortes valeurs d'inductance possibles : $L \sim 10^3\,H$ pour $\begin{cases} R \sim 1 \\ C \sim 10 \end{cases}$

Filtre passe-tout



q1 - Le montage est stable car il existe une rétroaction négative, uniquement, aux bornes de l'ALI.

q2 - Déterminons la fonction de transfert du montage. L'ALI étant idéal : $\varepsilon = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\underline{V}_+ = \underline{V}_-}$

Selon la loi des noeuds en termes de potentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{\underline{e} - \underline{V}_-}{R'} = \dfrac{\underline{V}_- - \underline{s}}{R'} & \text{car } i_- = 0. \\ \dfrac{\underline{e} - \underline{V}_+}{R} = \dfrac{\underline{V}_+}{1/jC\omega} & \text{car } i_+ = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{V}_- = \dfrac{\underline{e} + \underline{s}}{2} \\ \underline{V}_+ = \dfrac{\underline{e}}{1 + jRC\omega}. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\underline{V}_- = \underline{V}_+ \Rightarrow \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2} = \frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega}.$$

$$\Leftrightarrow \underline{s} = \frac{2}{1 + jRC\omega}\underline{e} - \underline{e}$$

$$\Leftrightarrow \underline{s} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{e}.$$

La fonction de transfert est donc :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}}.$$

- Le gain est donc :

$$G = |\underline{H}(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + (RC\omega)^2}{1 + (RC\omega)^2}} = 1.$$

quelque soit ω.

- Pour $\omega = \frac{1}{RC} = \omega_c$: $\underline{H}(j\omega_c) = \frac{1 - j}{1 + j}$

Donc : $\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg(1 - j) - \arg(1 + j)$
$= + \arctan(-1) - \arctan(1)$
$= -\frac{\pi}{2}$ ou $-90°$.

- La courbe donne le déphasage provoqué par le filtre en fonction de la pulsation du signal d'entrée. On observe que la valeur de ω à $-\pi/2$ est :

$$\underline{\omega_c = 3{,}0 \times 10^4 \ \text{rad.s}^{-1}}.$$

Ainsi : $RC = \frac{1}{\omega_c} \Rightarrow \underline{RC \simeq 3{,}3 \times 10^{-5} \ \text{s}}$.

q3- Ce montage est un déphaseur : il provoque un déphasage pour une fréquence donnée, sans atténuation du signal d'entrée.

q4- L'équation différentielle portant sur $s(t)$ est, d'après la fonction de transfert :

$$RC\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)-RC\frac{de(t)}{dt}.$$

Or, pour $e(t)=E_0$: $\frac{de(t)}{dt}=0$.

Ainsi :

$$RC\frac{ds}{dt}+s(t)=E_0.$$

La résolution donne :

$$s(t)=A\cdot e^{-t/RC}+E_0.$$ (A : constante réelle)

Or, à $t=0^+$, en utilisant le théorème de la valeur initiale :

$$s(0^+)=\lim_{p\to+\infty}p\cdot S(p)$$

avec $p\Leftrightarrow j\omega$ (variable de Laplace).

Or : $S(p)=H(p)\cdot E(p)$ et $E(p)=\frac{E_0}{p}$ pour un échelon de tension, donc :

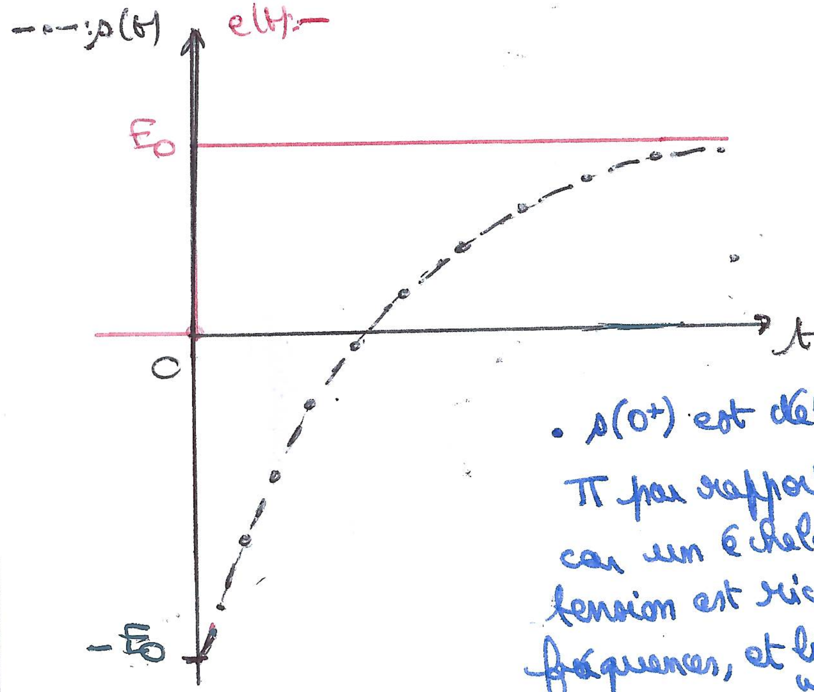
$$\lim_{p\to+\infty}pS(p)=\lim_{p\to+\infty}E_0\cdot H(p)=-E_0.$$

Ainsi : $\boxed{s(0^+)=-E_0}$.

Finalement : $s(0^+)=A+E_0 \Rightarrow A=s(0^+)-E_0=-2E_0$.

Ainsi :

$$\boxed{s(t)=E_0\left(1-2e^{-t/RC}\right)}.$$



• $s(0^+)$ est déphasée de π par rapport à $e(0^+)=E_0$ car un échelon de tension est riche en hautes fréquences, et $\lim_{\omega\to+\infty}\varphi=\pi$.

Dérivateur partiel

q1- L'ALI est supposé idéal : $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{V_+ = V_-}$

Or : $\boxed{V_+ = 0}$ donc $\boxed{V_- = 0}$.

Selon la loi des nœuds en termes de potentiel, au nœud V_-, et avec $i_- = i_+ = 0$ (impédance d'entrée de l'ALI supposée infinie), on peut écrire :

$$\frac{E(p) - V_-}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{V_- - S(p)}{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(p) = -\frac{(R + 1/pC)}{R} S(p) \quad \text{car } V_- = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad S(p) = -\frac{pRC}{1 + pRC} E(p)$$

Ainsi :

$$\boxed{H(p) = -\frac{pRC}{1 + pRC}}$$

q2- Comportement asymptotique du filtre : on pose $\omega_c = \frac{1}{RC}$ et $p \leftrightarrow j\omega$:

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{j\omega/\omega_c}{1 + j\,\omega/\omega_c}.$$

	$\omega \ll \omega_c$	$\omega \gg \omega_c$
$\underline{H}(j\omega)$	$-j\frac{\omega}{\omega_c}$	-1
$G_{dB} = 20\log(\lvert\underline{H}(j\omega)\rvert)$	$20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$	0
Pentes	$+20$ dB / décade	nulle
Déphasage : $\arg(\underline{H})$	$-\pi/2$	$-\pi$
Comportement	Dérivateur (et inverseur)	Inverseur

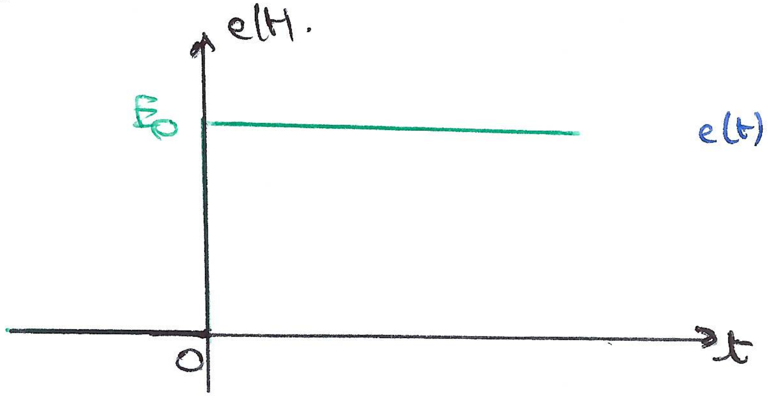
Ce filtre se comporte donc comme un dérivateur pour $\omega \ll \omega_c = \frac{1}{RC}$. La phase asymptotique vaut $-\frac{\pi}{2}$ dans ce cas. En revanche, ce filtre ne possède pas de comportement intégrateur.

q3- Avec $H(p)$ et l'analogie $p \leftrightarrow \frac{d}{dt}$, il vient :

$$RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = -RC\frac{de(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{RC}s(t) = -\frac{de(t)}{dt}}$$

q4- Essai indiciel de hauteur E_0 :



$$e(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ E_0 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

i- On utilise le théorème de la valeur initiale (cf. cours de SI), avec, pour un échelon E_0 :

$$E(p) = \frac{E_0}{p}$$

Rappel : $E(p)$ est la transf. de Laplace de $e(t)$:

$$E(p) = \int_0^{+\infty} e(t) e^{-pt} dt = E_0 \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} = \frac{E_0}{p}.$$

Ainsi :

$$s(0^+) = \lim_{p \to +\infty} p\,S(p) = \lim_{p \to +\infty} \left(p \times H(p) \times \frac{E_0}{p}\right) = \lim_{p \to +\infty} (E_0\, H(p))$$

Or $\lim_{p \to +\infty} H(p) = -1$, donc :

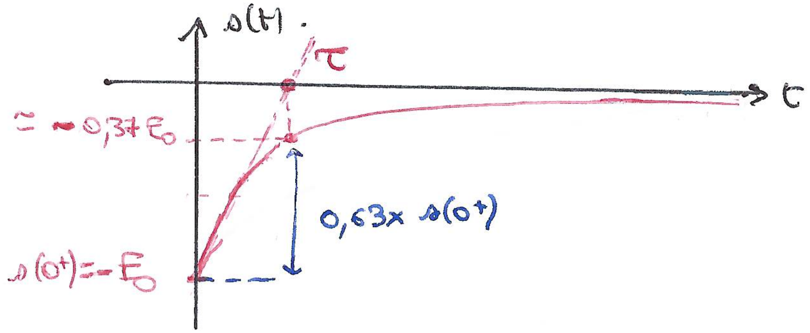
$$\boxed{s(0^+) = -E_0}$$

ii- Pour $t \geq 0$: $\frac{de}{dt} = 0$ car $e(t) = E_0 =$ constante

Donc :

$$s(t) = s(0^+) e^{-t/\tau} \quad \text{avec } \tau = RC = \frac{1}{\omega_c}.$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = -E_0 e^{-t/\tau}}$$



iii- L'essai indiciel permet de mesurer la constante de temps τ du filtre (cf. graphe).

Utilité du montage suiveur

q1- • $\underline{H}_1 = \dfrac{\underline{s}_1}{\underline{e}_1} = \dfrac{jL\omega}{R+jL\omega}$ (pont diviseur de tension)

• $\underline{H}_2 = \dfrac{\underline{s}_2}{\underline{e}_2} = \dfrac{(1/j\omega)}{R+(1/j\omega)} = \dfrac{1}{1+jRC\omega}$ (idem).

q2- La fonction de transfert $\underline{H}_1$ est supposée correspondre au circuit Q1 fonctionnant à vide. L'ajout du montage Q2 à la sortie de Q1 entraîne l'apparition d'un courant en sortie de Q1, modifiant $\underline{H}_1$. Le circuit issu de l'association de Q1 et Q2 ne peut donc pas avoir pour fonction de transfert le produit de $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$.

q3-

i- La rétroaction s'effectue sur la borne inverseuse ("-") de l'ALI : cette rétroaction est stabilisatrice. L'ALI fonctionne donc en régime linéaire.

ii- L'ALI est supposé idéal : $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$

Or : $\begin{cases} V_+ = e \\ V_- = s \end{cases} \Rightarrow \boxed{e = s}$

La tension de sortie est donc identique à celle d'entrée.

q4-

i- L'impédance d'entrée de l'ALI est supposée infinie : **l'intensité du courant i_+ à l'entrée non-inverseuse est donc nulle.** Le filtre Q1 a donc le même comportement qu'à vide ; sa fonction de transfert est $\underline{H}_1$.

ii- Soit $\underline{s}_A(t)$ la sortie de l'ALI et $\underline{s}_1(t)$ le signal de sortie de Q1. Selon la question q3-ii-, on a :

$$\underline{s}_A(t) = \underline{s}_1(t).$$

Par ailleurs, selon q1- :

$$\underline{s}(t) = \frac{1}{1+jRC\omega}\underline{s}_A(t) = \frac{1}{1+jRC\omega}\underline{s}_1(t) = \underline{H}_2\underline{s}_1$$

* Or : $\underline{s}_1(t) = \underline{H}_1 \cdot \underline{e}(t) = \dfrac{jL\omega}{R+jL\omega}\underline{e}(t)$.

Donc : $\boxed{\underline{s}(t) = \underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1 \cdot \underline{e}(t)}$

iii- On a : $\underline{s}(t) = \dfrac{jL\omega}{(1+jRC\omega)(R+jL\omega)}\underline{e}(t)$

$\Leftrightarrow \underline{s}(t) = \dfrac{1}{(1+jRC\omega)\left(1+\dfrac{R}{jL\omega}\right)}\underline{e}(t)$

$\Leftrightarrow \underline{s}(t) = \dfrac{1}{1+\dfrac{R^2C}{L}+j\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)}\underline{e}(t)$.

INUTILE.

La fonction de transfert du système est donc :

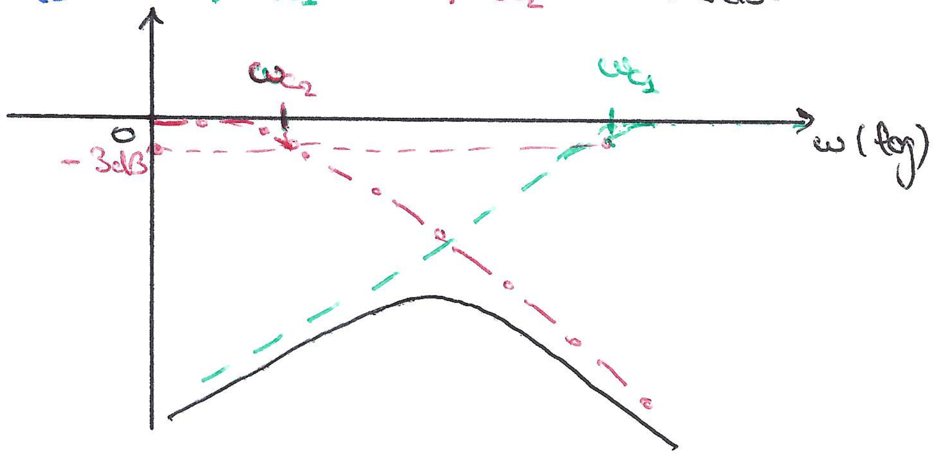
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R^2C}{L} + j\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}.$$

On pose $\omega_{c_1} = \frac{R}{L}$ et $\omega_{c_2} = \frac{1}{RC}$; ses pulsations sont respectivement les pulsations de coupure de Q_1 (passe-haut) et Q_2 (passe-bas). Le gain (en dB) du système est donc :

$$G_{dB} = 20\log\left(|\underline{H}(j\omega)|\right)$$
$$= 20\log\left(|\underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1|\right)$$
$$= 20\log\left(|\underline{H}_2|\right) + 20\log\left(|\underline{H}_1|\right)$$

$$\boxed{G_{dB} = G_{dB,1} + G_{dB_2}.}$$

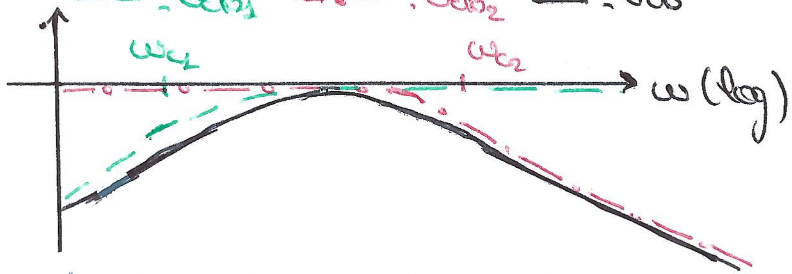
Le diagramme de Bode du système est donc issu de la somme des courbes des diagrammes de Bode de Q_1 et Q_2 : — — : G_{dB_1} — · — : G_{dB_2} —— : G_{dB}.



Il s'agit donc d'un filtre passe-bande, dont les pulsations de coupure sont fixées indépendamm[ent] l'une de l'autre par les circuits Q_1 et Q_2.

Rq : pour $\omega_{c_1} < \omega_{c_2}$:

— — : G_{dB_1} — · — : G_{dB_2} —— : G_{dB}



La modification de ω_{c_1} et ω_{c_2} permet de régler le gain maximal et la largeur de bande (donc le facteur de qualité) du système.

Intégrateur réel

q1- Si l'ALI est idéal : $\underline{\varepsilon} = \underline{V}^+ - \underline{V}^- = 0$.

Or : $\begin{cases} \underline{V}_+ = 0 \\ \underline{V}_- = ? \end{cases}$

Selon la loi des noeuds en termes de potentiel, on peut écrire :

$$\frac{\underline{e} - \underline{V}_-}{R} = \frac{\underline{V}_- - \underline{s}}{1/jC\omega} = jC\omega(\underline{V}_- - \underline{s})$$

Ainsi :

$$\underline{V}_- = \frac{\underline{e} + jRC\omega\,\underline{s}}{1 + jRC\omega}.$$

Or $\underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0$, donc :

$$\underline{e} + jRC\omega\,\underline{s} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{s} = -\frac{\underline{e}}{jRC\omega}.$$

La fonction de transfert du système est donc :

$$\boxed{\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{1}{jRC\omega} = \underline{H}(j\omega)}$$

Il s'agit donc d'un intégrateur inverseur.

IR(1)

q2- On écrit cette fois :

- $\underline{\varepsilon} = \underline{V}_+ - \underline{V}_- \neq 0$ en régime linéaire
- $\underline{s} = \underline{Ad} \cdot \underline{\varepsilon}$

Or $\underline{\varepsilon} = \underline{V}_+ - \underline{V}_- = -\underline{V}_-$ car $\underline{V}_+ = 0$

Donc $\boxed{\underline{s} = -\underline{Ad} \times \underline{V}_-.}$

Or : $\underline{V}_- = \dfrac{\underline{e} + jRC\omega\,\underline{s}}{1 + jRC\omega}$, donc :

$$(1 + jRC\omega)\underline{V}_- = \underline{e} + jRC\omega \times (-\underline{Ad} \cdot \underline{V}_-)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + jRC\omega(1 + \underline{Ad}))\underline{V}_- = \underline{e}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{V}_- = \frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega(1 + \underline{Ad})}$$

Ainsi :

$$\underline{s} = \frac{-\underline{Ad}}{1 + jRC(1 + \underline{Ad})\omega} \cdot \underline{e}.$$

et la fonction de transfert s'écrit :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{-\underline{Ad}}{1 + jRC(1 + \underline{Ad})\omega}.}$$

q3- On pose :

$$\underline{Ad} = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec } \omega_c = 2\pi f_c$$

Ainsi :

$$jRC\omega(1+\underline{Ad}) = jRC\omega\left(1 + \frac{A_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}\right)$$

$$= \frac{jRC\omega\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c} + A_0\right)}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

et

$$1 + jRC\omega(1+\underline{Ad}) = \frac{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_c}\right) + jRC\omega\left(1+j\frac{\omega}{\omega_c}+A_0\right)}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Finalement :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c} + jRC\omega(1+A_0) + (j\omega)^2 \cdot \frac{RC}{\omega_c}}.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{-A_0}{1 + j\omega\left[\frac{1}{\omega_c} + RC(1+A_0)\right] + (j\omega)^2\frac{RC}{\omega_c}}}$$

q4- On cherche à écrire :

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H_1} \cdot \underline{H_2}$$

$$= \frac{A_1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{A_2}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

$$= \frac{A_1 A_2}{1 + j\omega\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) + (j\omega)^2 \cdot \frac{1}{\omega_1\omega_2}}$$

Rq : $\underline{H}$ a un numérateur réel, et indépendant de ω ; on choisit donc deux fonctions de transfert $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$ de type passe-bas

Par analogie :

$$\begin{cases} A_1 \cdot A_2 = -A_0 & (1) \\ \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_c} + RC(1+A_0) & (2) \\ \frac{1}{\omega_1\omega_2} = \frac{RC}{\omega_c} & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{1}{\omega_1} = \frac{RC\omega_2}{\omega_c}$$

Donc :

$$(2) \Rightarrow \frac{RC\omega_2}{\omega_c} + \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_c} + RC(1+A_0)$$

$$\Leftrightarrow RC\omega_2^2 + \omega_c = \omega_2 + RC\omega_c(1+A_0) \cdot \omega_2$$

$$\Leftrightarrow RC\omega_2^2 - \omega_2\left[1 + RC\omega_c(1+A_0)\right] + \omega_c = 0.$$

Or $o(RC\omega_c(1+A_0)) \simeq 10^3 \gg 1$, donc on peut écrire :

$$RC\omega_2^2 - \omega_2 \times RC\omega_c(1+A_0) + \omega_c = 0.$$

- Résolution :

$$\Delta = (RC\omega_c(1+A_0))^2 - 4RC\omega_c$$

$$= RC\omega_c\left[\underbrace{RC\omega_c(1+A_0)^2}_{\gg 4} - 4\right]$$

$$\Rightarrow \Delta > 0.$$

Il existe donc deux racines réelles :

$$\omega_{2,\pm} = \frac{+RC\omega_c(1+A_0) \pm \sqrt{[RC\omega_c(1+A_0)]^2 - 4RC\omega_c}}{2RC}$$

$$\Leftrightarrow \omega_{2,\pm} = +\frac{\omega_c(1+A_0)}{2} \pm \frac{\omega_c(1+A_0)}{2}\underbrace{\sqrt{1 - \frac{4}{RC\omega_c(1+A_0)^2}}}_{>1}$$

On ne conserve que la solution positive :

$$\omega_2 = \omega_{2,+} = +\frac{\omega_c(1+A_0)}{2} + \frac{\omega_c(1+A_0)}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{RC\omega_c(1+A_0)^2}}$$

Or : $o\left(RC\omega_c(1+A_0)^2\right) >> 1$, donc on peut écrire :

$$\sqrt{1-\frac{4}{RC\omega_c(1+A_0)^2}} \simeq \sqrt{1-0} \simeq 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{\omega_2 \simeq 2\times\frac{\omega_c(1+A_0)}{2} \simeq \omega_c(1+A_0)}$$

et :

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\omega_c}{RC\omega_2} \simeq \frac{1}{RC(1+A_0)}}$$

Ainsi :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-A_0}{\left[1+j\omega RC(1+A_0)\right]\left[1+j\frac{\omega}{\omega_c(1+A_0)}\right]}$$

A.N. :

$$\begin{cases}\omega_2 \simeq 1{,}88\times10^{7}\ \text{rad.s}^{-1}\\ \omega_1 \simeq 1{,}0\times10^{-2}\ \text{rad.s}^{-1}\end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases}f_2 \simeq 3{,}0\times10^{6}\ \text{Hz}.\\ f_1 \simeq 1{,}6\times10^{-3}\ \text{Hz}.\end{cases}$$

q5- Dans la gamme de fréquences choisies :

$$f_1 << f < f_2.$$

Le filtre de fréquence de coupure f_2 laisse passer sans atténuation le signal (filtre passe-bas), sauf à très hautes fréquences. ($f_{max} \approx \frac{f_2}{3}$).

Le filtre de fréquence de coupure f_1 est alimenté par un signal de fréquence présente dans sa bande d'atténuation ($f >> f_1$) : il joue donc le rôle d'intégrateur.

La fonction de transfert devient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-A_0}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} \approx -\frac{A_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

car $\omega < \omega_2$ et $\omega >> \omega_1$.

Ainsi :

$$\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{-A_0}{1+jRC\omega(1+A_0)}$$

et, pour $A_0 >> 1$, $RC\omega(1+A_0) >> 1$:

$$\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{-1}{jRC\omega}.$$

On retrouve la fonction de transfert de la question q1 en considérant le gain statique A_0 infini (ALI idéal).

IR 3

Filtre accentuateur

q1- Le système est stable grâce à la rétroaction négative aux bornes de l'ALI.

q2- On suppose que l'ALI est idéal. Du fait de son fonctionnement en régime linéaire (système stable) :

$$\varepsilon = V^+ - V^- = 0 \Rightarrow \boxed{V^+ = V^-}$$

On suppose aussi que $e(t)$ est sinusoïdal, de pulsation ω.

Les courants d'entrée de l'ALI sont nuls (grande résistance d'entrée). Selon la loi des nœuds en termes de potentiel, en V^- :

$$\frac{0 - \underline{V}^-}{R_1 + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\underline{V}^- - \underline{s}}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{jR_2C\omega}{1+jR_1C\omega}\underline{V}^- = \underline{V}^- - \underline{s}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{s} = \underline{V}^-\left[1 + \frac{jR_2C\omega}{1+jR_1C\omega}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \underline{s} = \underline{V}^-\left[\frac{1+j(R_1+R_2)C\omega}{1+jR_1C\omega}\right]$$

Or $\underline{V}^- = \underline{V}^+ = \underline{e}$ par construction. On en déduit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1+j(R_1+R_2)C\omega}{1+jR_1C\omega}$$ ou, en formalisme de LAPLACE :

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1+\tau_0 p}{1+\tau_1 p}}$$

avec $\begin{cases} \tau_0 = (R_1+R_2)C \\ \tau_1 = R_1 C. \end{cases}$ A.N. : $\begin{cases} \tau_0 = 10^{-1}\,s \\ \tau_1 = 10^{-3}\,s \end{cases}$

q3- Reprenons l'expression de $\underline{H}(j\omega)$ pour calculer le gain logarithmique GdB et le déphasage φ :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1+j\tau_0\omega}{1+j\tau_1\omega}$$

$$\Rightarrow \quad |\underline{H}(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+(\tau_0\omega)^2}{1+(\tau_1\omega)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad G_{dB} = 20\log(|\underline{H}(j\omega)|) = 10\log(1+(\tau_0\omega)^2) - 10\log(1+(\tau_1\omega)^2)$$

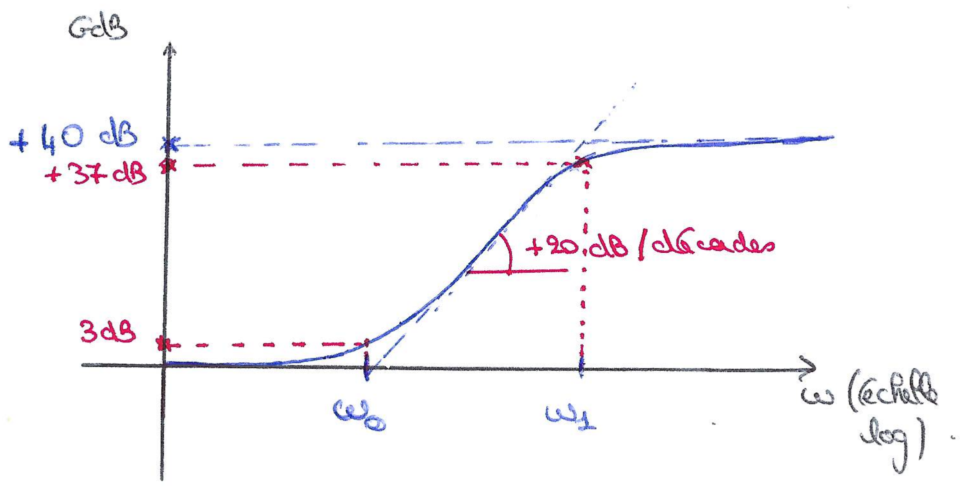
et $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}) = \arctan(\tau_0\omega) - \arctan(\tau_1\omega)$.

Étudions le comportement asymptotique du filtre :

	$\omega \ll \omega_0, \omega_1$	$\omega \gg \omega_0, \omega_1$
$G_{dB}(\omega)$	0	$20\log\left(\frac{\tau_0}{\tau_1}\right) = 20\log(10^2) = 40\,dB$
$\varphi(\omega)$	$\simeq \arg(1) = 0$	$\simeq \arg\left(\frac{\tau_0}{\tau_1}\right) = 0.$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau_0}$ et $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$

Le gain GdB est plus élevé à hautes fréquences qu'à basses fréquences. Le diagramme de BODE en amplitude correspondant est celui de gauche.



$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\tau_0} = 10 \text{ rad.s}^{-1} \\ \omega_1 = \frac{1}{\tau_1} = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}. \end{cases}$$

- Pour $\omega = \omega_0$: $G_{dB} = 10 \log(2) - 10 \log(1 + 10^{-4})$

$\Rightarrow G_{dB} \simeq +3 \text{ dB}$

- Pour $\omega = \omega_1$: $G_{dB} \simeq 10 \log(1 + 10^4) - 10 \log(2)$

$\Rightarrow G_{dB} \simeq 37 \text{ dB}$.

- Pour $\omega \gg \omega_0$ mais $\omega \ll \omega_1$:

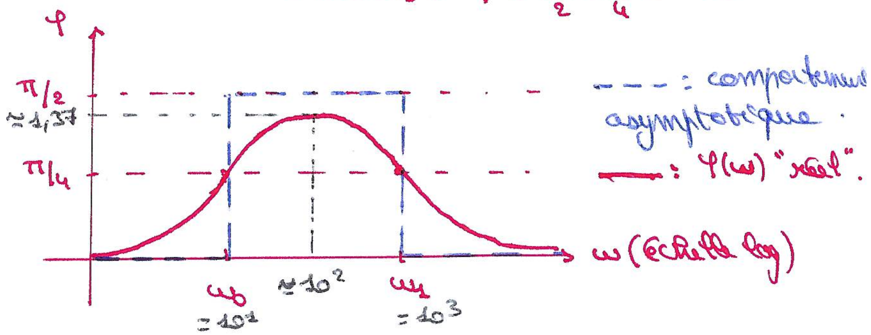
$$\underline{H} \simeq \frac{j\,\omega/\omega_0}{1} = j\frac{\omega}{\omega_0}$$

Donc : $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow$ pente de +20 dB / décade.

Ce filtre amplifie les composantes à haute fréquence sans atténuer les basses fréquences : il accentue les fréquences élevées, d'où le nom "accentuateur".

Pour $\omega \ll \omega_0, \omega_1$ et $\omega \gg \omega_0, \omega_1$, le déphasage est nul.

Complément : pour $\begin{cases} \omega_0 \ll \omega \ll \omega_1, \ \varphi \simeq \arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{2}. \\ \omega = \omega_0 : \ \varphi \simeq \frac{\pi}{4} - 0 = \pi/4 \\ \omega = \omega_1 : \ \varphi \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi/4. \end{cases}$



Q4- La sortie $s(t)$ est telle que :

$$s(t) = E_0 \cdot |\underline{H}(\omega = 0)| \cos(\arg(\underline{H}(\omega=0)))$$
$$+ E_1 |\underline{H}(\omega = 2\pi f_e)| \cos(2\pi f_e t + \arg(\underline{H}(\omega = 2\pi f_e)))$$

Or : • $|\underline{H}(\omega=0)| = 1$ et $\arg(\underline{H}(\omega=0)) = 0$

$\begin{cases} |\underline{H}(\omega = 2\pi f_e)| \simeq 100 \quad \text{(après calculs)}. \\ \arg(\underline{H}(\omega = 2\pi f_e)) \simeq 0 \end{cases}$

Donc : $s(t) \simeq E_0 + 100 E_1 \cos(2\pi f_e t)$.

25- i- La fonction de transfert du filtre est conservée :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 + j(R_1+R_2)C\omega}{1 + jR_1C\omega}.$$

Donc : $|\underline{s}| = S_0 = \sqrt{\dfrac{1+(R_1+R_2)^2C^2\omega^2}{1+R_1^2C^2\omega^2}} \cdot E_0$

avec S_0 et E_0 les amplitudes des signaux $s(t)$ et $e(t)$.

Selon la figure fournie :

$$\begin{cases} E_0 = \dfrac{200}{2} = \underline{100\ mV} \\ S_0 = \dfrac{3{,}56}{2} = \underline{1{,}78\ V}. \end{cases}$$ ("C-C" : crête à crête)

De plus : $f = 30{,}0\ Hz \Rightarrow \omega = 2\pi f \simeq \underline{188{,}5\ rad.s^{-1}}$.

En réécrivant l'expression de S_0, on obtient :

$$\boxed{R_2C = \frac{1}{\omega}\sqrt{(1+R_1^2C^2\omega^2)\frac{S_0^2}{E_0^2} - 1} - R_1C.}$$

A.N. : avec $R_1C = 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ s$:

$$\underline{R_2C \simeq 9{,}50 \times 10^{-2}\ s}.$$

Rq : Ainsi $(R_1+R_2)C \simeq 9{,}60 \times 10^{-2}\ s \neq 10^{-1}\ s$.

ii- Le décalage temporel entre les signaux est $\Delta t = 7{,}0\ ms$.

Or un décalage temporel d'une période T correspond à un déphasage de 2π. Ainsi :

$$T \leftrightarrow 2\pi$$
$$\Delta t \leftrightarrow \Delta\varphi$$

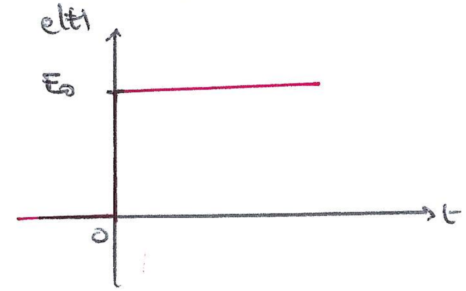
$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta t}{T}}.$$

A.N. : avec $T = \frac{1}{f}$: $\Delta\varphi = 2\pi f \cdot \Delta t \Rightarrow \underline{\Delta\varphi \simeq 1{,}32\ rad}$.

$s(t)$ atteind sa valeur maximale avant $e(t)$: $\underline{e(t)}$ est donc en retard de phase sur $s(t)$.

iii- La réponse indicielle d'un circuit correspond à l'allure du signal de sortie lorsque le signal d'entrée $e(t)$ est un échelon de tension :

$$e(t) = \begin{cases} E_0 \text{ pour } t \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



On passe dans le domaine temporel :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1+\tau_0 p}{1+\tau_1 p}$$

$$\Rightarrow S(p)(1+\tau_1 p) = (1+\tau_0 p)E(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) + \tau_1\frac{ds(t)}{dt} = e(t) + \tau_0\frac{de(t)}{dt}}.$$

Or pour $t \geq 0$, $e(t) = E_0 = $ cste. Donc :

$$s(t) + \tau_1\frac{ds(t)}{dt} = E_0 \qquad \left(\frac{de(t)}{dt} = \frac{dE_0}{dt} = 0\right).$$

Solution : $\underline{s(t) = E_0 + Ae^{-t/\tau_1}}$ avec A : cste $\mathbb{R}$.

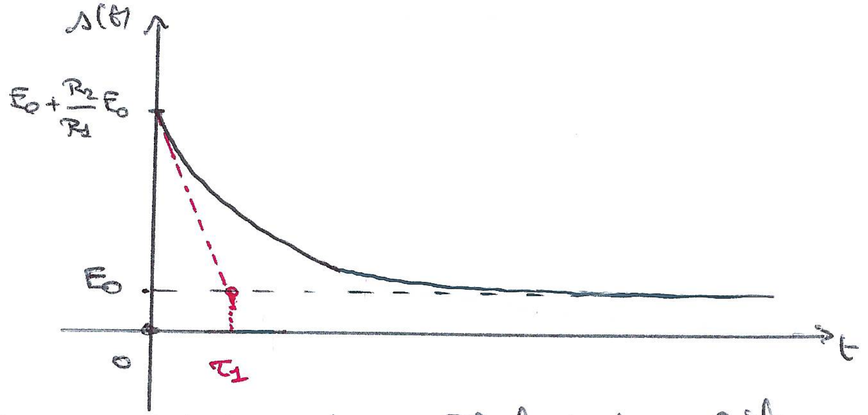
Point méthode : la constante d'intégration, pour une réponse indicielle, est obtenue en appliquant le théorème de la valeur initiale : $\boxed{s(0^+) = \lim_{p\to+\infty}(p\, H(p)\, E(p))}$

Or : $E(p) = \frac{E_0}{p}$ pour un échelon de tension (cf. transformée de LAPLACE), donc :

$$s(0^+) = \lim_{p \to +\infty} \left(H(p) E_0 \right) = \frac{\tau_0}{\tau_1} E_0 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) E_0 .$$

Or $s(0^+) = E_0 + A \Rightarrow \boxed{A = \frac{R_2}{R_1} E_0}$

- Représentation graphique : $s(t) = E_0 + \frac{R_2}{R_1} E_0 e^{-t/\tau_1}$.



- L'ALI ne doit pas saturer. Il faut donc vérifier :

$$\boxed{E_0 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) < V_{sat}}$$

$$\Rightarrow \quad E_0 < \frac{V_{sat}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \simeq 10^{-2} \cdot V_{sat} .$$

soit, pour $V_{sat} = 15$ V (valeur typique), $E_0 < 0{,}15$ V .

q6 - i - Par définition : $A(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p}$ en formalisme de LAPLACE.

Avec : $\begin{cases} o(A_0) = 10^5 \\ o(\tau) = 10^{-3} s . \end{cases}$

ii - On reprend le développement de la question q2 -, en rappelant que pour un ALI réel, $\varepsilon = V^+ - V^- \neq 0$.

En formalisme de LAPLACE, on a toujours (cf. q2) :

$$V^-(p) = S(p) \times \frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_0 p} \quad \text{avec } \tau_1 = R_1 C \text{ et } \tau_0 = (R_1 + R_2) C .$$

De plus, $V^+(p) = E(p)$.

Ainsi : $\varepsilon(p) = E(p) - S(p) \frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_0 p}$

Or $S(p) = A(p) \varepsilon(p) \Rightarrow S(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p} \cdot \varepsilon(p)$

Donc :

$$\frac{1 + \tau p}{A_0} S(p) = E(p) - S(p) \frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_0 p} .$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S(p) \left[\frac{1 + \tau p}{A_0} + \frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_0 p} \right] = E(p)} .$$

Or $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \Rightarrow H(p) = \frac{A_0 (1 + \tau_0 p)}{(1 + \tau p)(1 + \tau_0 p) + A_0 (1 + \tau_1 p)}$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{A_0 (1 + \tau_0 p)}{1 + (\tau + \tau_0 + A_0 \tau_1) p + \tau \tau_0 p^2 + A_0} .$$

On sait cependant que :

- $A_0 \simeq 10^5 \Rightarrow A_0 \gg 1$.
- $A_0 \tau_1 \simeq 10^2 \gg \tau$ et τ_0 .

Donc :

$$H(p) \simeq \frac{A_0 (1 + \tau_0 p)}{A_0 + A_0 \tau_1 p + \tau \tau_0 p^2} = \frac{1 + \tau_0 p}{1 + \tau_1 p + \frac{\tau}{A_0} \tau_0 p^2} .$$

Mettons $(1 + \tau_1 p)$ en facteur au dénominateur :

$$1 + \tau_1 p + \frac{\tau}{A_0} \tau_0 p^2 = (1 + \tau_1 p) \left(1 + \frac{\tau \tau_0 p^2}{A_0 (1 + \tau_1 p)} \right)$$

$$\simeq (1 + \tau_1 p) \left(1 + \frac{\tau \tau_0}{A_0 \tau_1} p \right)$$

Ce dernier développement est justifié par le fait que :

$$(1+\tau_1 p)\left(1+\frac{\tau\tau_0}{A_0\tau_1}p\right) = 1+\tau_1 p + \frac{\tau\tau_0}{A_0\tau_1}p + \frac{\tau\tau_0}{A_0}p^2$$

Or $o\left(\frac{\tau\tau_0}{A_0\tau_1}\right) = \frac{10^{-3}\cdot 10^{-1}}{10^5\cdot 10^{-3}} \approx \underline{10^{-6}\,s}$ et $o(\tau_1) = \underline{10^{-3}\,s}$

Donc $\frac{\tau\tau_0}{A_0\tau_1} \ll \tau_1$; on retrouve bien :

$$\underline{(1+\tau_1 p)\left(1+\frac{\tau\tau_0}{A_0\tau_1}p\right) \simeq 1+\tau_1 p + \frac{\tau\tau_0}{A_0}p^2}.$$

<u>Ainsi :</u> $$H(p) \simeq \frac{1+\tau_0 p}{(1+\tau_1 p)\left(1+\frac{\tau\tau_0}{A_0\tau_1}p\right)} = \frac{1+\tau_0 p}{(1+\tau_1 p)(1+\Theta p)}$$

avec $\boxed{\Theta = \frac{\tau\tau_0}{A_0\tau_1} = \frac{\tau}{A_0}\times\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}$.

<u>iii-</u> On remarque cette fois-ci que, lors d'un essai indiciel,

$s(0^+) = \lim_{p\to+\infty}(H(p)\cdot E_0) = 0$ car $\underline{\lim_{p\to+\infty} H(p) = 0}$.

Ainsi $s(0^-) = s(0^+) = 0$: <u>la tension de sortie n'est pas discontinue</u>.

<u>iv.</u> Par définition : $\frac{ds}{dt}(0^+) = \lim_{p\to+\infty}\left[(pS(p) - s(0^+))\times p\right]$.

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt}(0^+) = \lim_{p\to+\infty}\left(p^2 H(p)E(p)\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(p\,H(p)E_0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{ds}{dt}(0^+) = \frac{\tau_0}{\tau_1\Theta}E_0}.$$

ou $\frac{ds}{dt}(0^+) = \frac{A_0}{\tau}E_0 \simeq \underline{10^8\times E_0\,(V\cdot s^{-1})}$.

La pente est très élevée : la montée en tension se fait très brièvement. Pour passer de 0V à $\frac{R_2 E_0}{R_1} \simeq 100E_0$, il faut environ <u>$10^{-6}\,s$ soit $1\,\mu s$!</u>

Convertisseurs courant - tension et tension - courant

Q1- On sait que :

- convertisseur tension - tension : $v_s = A v_e$;
  $Z_e \to +\infty$, $Z_s \to 0$. (cas idéal)
- convertisseur courant - tension (idéal) :
  $v_s = R_t\, i_e$, $Z_e \to 0$, $Z_s \to 0$.

Donc : convertisseur tension - courant (idéal) :

$$i_s = G_t v_e \quad (G_t : \text{transconductance}).$$

$\boxed{Z_e \to +\infty}$; $\boxed{Z_s \to +\infty}$

(⇒ pas d'influence sur v_e). (pas d'influence sur i_s).

Q2- On suppose les ALI idéaux. Ainsi :

Montage a- $\varepsilon = 0 \Rightarrow v^+ = v^- = v_e = 0$

Or : $\dfrac{v_e - v_s}{R} = \dfrac{-v_s}{R} = i_e \Rightarrow \boxed{v_s = -R i_e}$

On retrouve la caractéristique d'un convertisseur courant - tension, avec $R_t = -R$.

* $Z_e = \dfrac{v_e}{i_e} = 0$ car $v_e = 0$ et $i_e \neq 0$.
* $Z_s = ?$ On sait que : $v_s = -R i_e$ indépendant de i_s ; retrouve dans le même cas que le montage suiveur, donc $Z_s = 0$ (cf. cours)

• Montage b -

- $\varepsilon = v^+ - v^- = v_e - (v^-) \Leftrightarrow \boxed{v^- = v_e}$
  $ = 0$
- Par ailleurs, il n'y a aucun courant $i^- \Rightarrow v_e = R i_s$.
  $\Leftrightarrow \boxed{i_s = +\frac{1}{R} v_e}$.

Il s'agit bien d'un convertisseur tension-courant.
L'impédance d'entrée est infinie (car $i_e = i^+ = 0$), et l'impédance de sortie est aussi infinie car i_s est indépendant de v_s. (Désavantage : R_u pas à la masse ⇒ charge flottante)

• Montage c - $\varepsilon = 0 \Rightarrow v^+ = v^- = v_s$.

On applique la loi des nœuds à l'entrée non inverseuse :

$$\frac{v_e - v_s}{R_1} = \frac{v_s - v}{R_2} + i_s.$$

et à l'entrée non-inverseuse :

$$\frac{-v_s}{R_1} = \frac{v_s - v}{R_2}$$

Ainsi, en remplaçant $\dfrac{v_s - v}{R_2}$: $\dfrac{v_e - v_s}{R_1} = -\dfrac{v_s}{R_1} + i_s$.

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{v_e}{R_1} = i_s}.$$

Il s'agit bien d'un convertisseur tension - courant.

Q3- L'impédance de sortie est ∞ car i_s est indépendant de v_s. En revanche, l'impédance d'entrée vaut $\dfrac{v_e}{i_e} = R_1$.

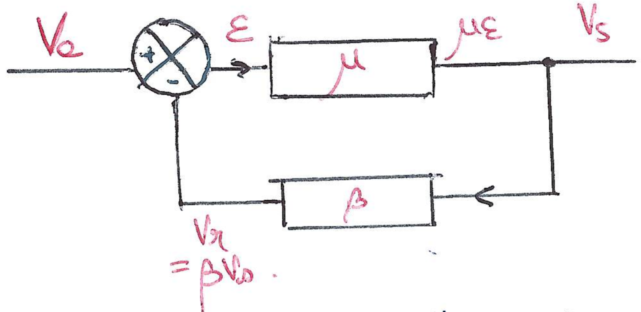
Q4- Pour rendre le circuit c idéal, il faut rajouter un montage suiveur au niveau de l'entrée (ainsi : $Z_e \to +\infty$)

Impédances d'entrée et de sortie dans le cas d'une rétroaction

q1- On suppose que $I_s = 0$. Ainsi :

$$V_s = \mu \cdot \varepsilon .$$

L'amplificateur admet en entrée ε, fourni V_s en sortie et une partie de V_s est prélevée dans la boucle de rétroaction pour fournir V_r. Avec $V_e = \varepsilon + V_r$, on trouve le schéma fonctionnel suivant :



- On a : $V_e = \varepsilon + V_r \Rightarrow \varepsilon = V_e - V_r$
$= V_e - \beta V_s$.

Ainsi : $V_s = \mu V_e - \mu\beta V_s$

$$\Leftrightarrow \quad V_s = \frac{\mu}{1+\mu\beta} V_e .$$

$$\Rightarrow \quad G = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\mu}{1+\mu\beta} \; ; \text{ avec } \mu\beta \gg 1 : \boxed{G \simeq \frac{1}{\beta}}$$

Il faut donc choisir $\beta = 0{,}01$.

q2- On donne $R_{in} = \left(\frac{V_e}{I_e}\right)_{I_s=0}$. Or :

$$\begin{cases} I_e = \dfrac{\varepsilon}{R_e} \\ \varepsilon = V_e - \beta V_s = V_e(1-\beta G). \end{cases}$$

Ainsi :

$$I_e = \frac{V_e}{R_e}(1-\beta G)$$

d'où :

$$R_{in} = \frac{R_e}{1-\beta G} = \frac{1+\mu\beta}{1+\mu\beta-\mu\beta} R_e$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{R_{in} = (1+\mu\beta) R_e}.$$

A.N. : $R_{in} \simeq 10^3 R_e = 10^9\ \Omega \gg R_e$.

La rétroaction renforce le caractère idéal de l'entrée de l'amplificateur (impédance d'entrée très grande).

q3- Lorsque $I_s \neq 0$, on observe une chute de tension en sortie de l'amplificateur (cf. TP 1 $\Rightarrow$ générateur connecté à $R \simeq R_s$ interne du générateur). Or :

$$\begin{cases} V_s = \mu\varepsilon - R_s I_s \\ \varepsilon = V_e - V_r = V_e - \beta V_s . \end{cases}$$

Donc : $$V_s = \frac{\mu V_e}{1+\mu\beta} - \frac{R_s}{1+\mu\beta} I_s$$

Ainsi : $V_s = V_{s0} - \frac{R_s}{1+\mu\beta} I_s \Leftrightarrow \boxed{R_{out} = \frac{R_s}{1+\mu\beta}}$.

Rq : si $I_s = 0$:

$$\boxed{V_s = \frac{\mu V_e}{1+\mu\beta} = V_{s0}}$$

On retrouve q1

A.N. : $R_{out} \simeq 10^{-2}\ \Omega \ll R_s$.

q4- Amélioration de la résistance de sortie d'un facteur 10^3