

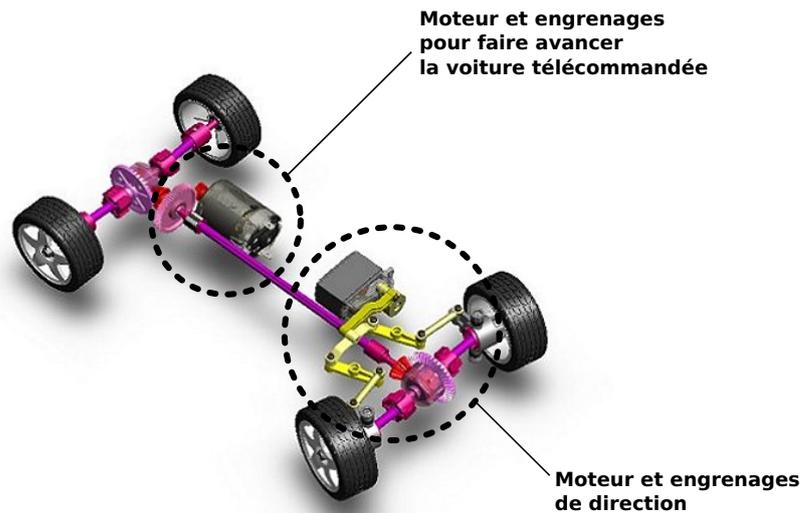
TP : Asservissements

Modélisation numérique d'un système asservi

PSI : Lycée Rabelais

Le système étudié est une voiture télécommandée dont la technologie est présentée ci-dessous. On s'intéressera particulièrement à un asservissement en vitesse permettant de piloter le moteur de propulsion qui permet de faire avancer la voiture.

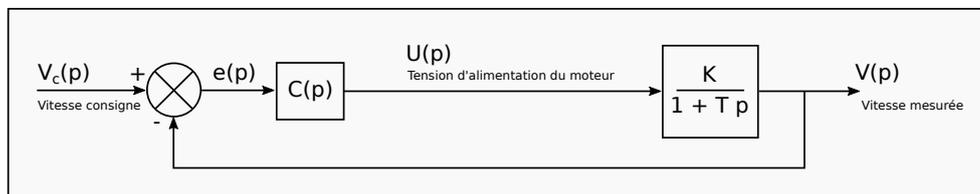
Il est possible de mettre en place un modèle analytique en utilisant notamment la transformée de Laplace mais cette méthodologie est inadaptée lors de non-linéarités. Dans ce cas, une modélisation numérique est alors nécessaire.



On s'impose le cahier des charges suivant :

Rapidité	Temps de réponse à 5% < 0,15 s
Précision	Erreur statique nulle
Amortissement	Dépassement inférieur à 10%

Le schéma-blocs retenu est le suivant :



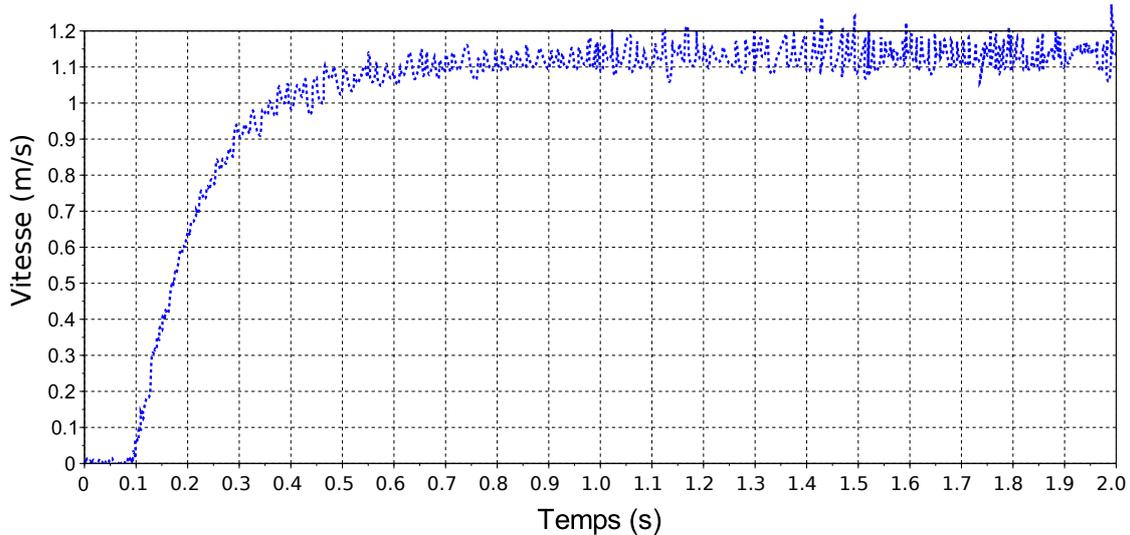
1 Identification en boucle ouverte

Le moteur est représenté par la fonction de transfert $H(p)$ telle que

$$H(p) = \frac{V(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + T \cdot p}$$

Où, dans le domaine de Laplace, $V(p)$ est la vitesse mesurée de la voiture en m/s et $U(p)$ la tension d'alimentation en V.

Pour identifier les paramètres K et T , un essai en boucle ouverte a été réalisé en imposant un échelon de tension d'amplitude $U_0 = 12$ V. La vitesse mesurée est la suivante :



Question 1. Déterminer les paramètres K et T .

Question 2. En déduire l'équation différentielle qui lie la tension d'alimentation du moteur $u(t)$ et la vitesse mesurée $v(t)$.

2 Résolution numérique

On cherche à déterminer l'allure de la sortie en fonction du temps. On suppose dans un premier temps que la vitesse consigne est un échelon d'amplitude $V_0 = 0.8$ m/s.

Pour résoudre les équations différentielles associées à ce système asservi, on propose de discrétiser le problème. On pose alors :

- T_e , le temps d'échantillonnage ou encore appelé pas de temps de la résolution numérique,
- t_i , le i -ème instant discrétisé avec $t_i = i \times T_e$ et donc $t_{i+1} - t_i = T_e$,
- u_i , la valeur approchée de $u(t_i)$. Cela revient à écrire $u_i \approx u(t_i)$.
- $v_i \approx v(t_i)$, la valeur de la vitesse à l'instant t_i et ainsi de suite pour les autres variables.

Question 3. En approximant $\frac{dv}{dt}(t_i)$ par le taux d'accroissement moyen de la fonction v entre les instants t_{i+1} et t_i , montrer que :

$$v_{i+1} = \frac{T - T_e}{T} \cdot v_i + \frac{T_e}{T} \cdot K \cdot u_i$$

Question 4. Sur le script à compléter `modelisation_numerique.py`, définir la fonction `SYS(ui,vi)` qui renvoie la vitesse v_{i+1} pour les paramètres u_i et v_i qui représentent respectivement les variables u_i et v_i .

2.1 Correction proportionnelle

On suppose dans un premier temps que le correcteur est un correcteur proportionnel de telle sorte que $C(p) = K_c$.

On prendra dans un premier temps $K_c = 40 \text{ V/(m/s)}$.

Question 5. Exprimer e_i en fonction de v_{c_i} et de v_i puis exprimer également u_i en fonction de e_i où e_i , v_{c_i} , v_i et u_i sont les approximations respectives de $e(t_i)$, $v_c(t_i)$, $v(t_i)$ et $u(t_i)$.

Question 6. Compléter alors le script Python pour résoudre numériquement les équations associées à ce système asservi.

Question 7. Observer l'influence du paramètre T_e en le choisissant dans l'ensemble $\{0.001 ; 0.01 ; 0.02 ; 0.03 ; 0.04 ; 0.05 ; 0.1\}$. Donner alors une valeur de T_e acceptable pour la résolution.

Question 8. Calculer le temps de réponse à 5% et la valeur finale de la réponse à un échelon d'amplitude V_0 . Comparer ces résultats théoriques avec les résultats numériques.

Le moteur de la voiture télécommandée est alimenté par une carte de commande alimentée avec une batterie de 12 V.

Question 9. Le modèle est-il acceptable ? Quel phénomène doit être modélisé ? Créer alors une nouvelle fonction `correction_proportionnelle_phenomene` où `phenomene` est le nom du phénomène à rajouter dans la modélisation pour que celle-ci prenne en compte la remarque ci-dessus.

Question 10. Observer l'influence du gain du correcteur K_c avec et sans le phénomène préalablement mentionné. Existe-t-il une valeur réaliste de K_c pour que le système devienne précis ?

2.2 Correction proportionnelle et intégrale

Pour résoudre les problèmes de précision, on propose d'utiliser un correcteur proportionnel-intégral de telle sorte que $C(p) = K_c + \frac{K_i}{p}$.

Dans les faits, cela signifie que la tension d'alimentation du moteur $u(t)$ est définie par :

$$U(p) = \left[K_c + \frac{K_i}{p} \right] \cdot e(p) \text{ donc } U(p) = K_c \cdot e(p) + \frac{K_i}{p} \cdot e(p)$$
$$\text{donc } u(t) = K_c \cdot e(t) + K_i \cdot \int_{u=0}^t e(u).du$$

De manière discrète, on peut donc écrire :

$$u_i = K_c \cdot e_i + K_i \cdot I_i \text{ où } I_i = \int_{u=0}^{t_i} e(u).du$$

Question 11. Faire un schéma pour montrer comment calculer I_i à partir de l'écart e avec la méthode des rectangles.

Question 12. Compléter alors le script Python pour résoudre numériquement les équations associées à ce système asservi avec ce nouveau correcteur (bien évidemment, on prendra en compte la saturation).

Question 13. Déterminer un couple de paramètres (K_c, K_i) permettant de satisfaire aux exigences du cahier des charges.

2.3 Correction proportionnelle, intégrale et dérivée

On propose également de rajouter une action dérivée qui permet de stabiliser le système asservi. Cette correction dérivée fonctionne de manière analogue à un correcteur à avance de phase. On appelle souvent ce correcteur complet

PID pour Proportionnel-Intégral-Dérivé. On a donc maintenant $C(p) = K_c + \frac{K_i}{p} + K_d \cdot p$.

Question 14. Montrer que, de manière discrète, la tension d'alimentation du moteur vérifie :

$$u_i = K_c \cdot e_i + K_i \cdot I_i + K_d \cdot D_i \quad \text{où} \quad I_i = \int_{u=0}^{t_i} e(u).du \quad \text{et} \quad D_i \approx \frac{e_i - e_{i-1}}{T_e}$$

Question 15. Montrer qu'il est impossible de calculer le terme D_i lorsque $i = 0$.

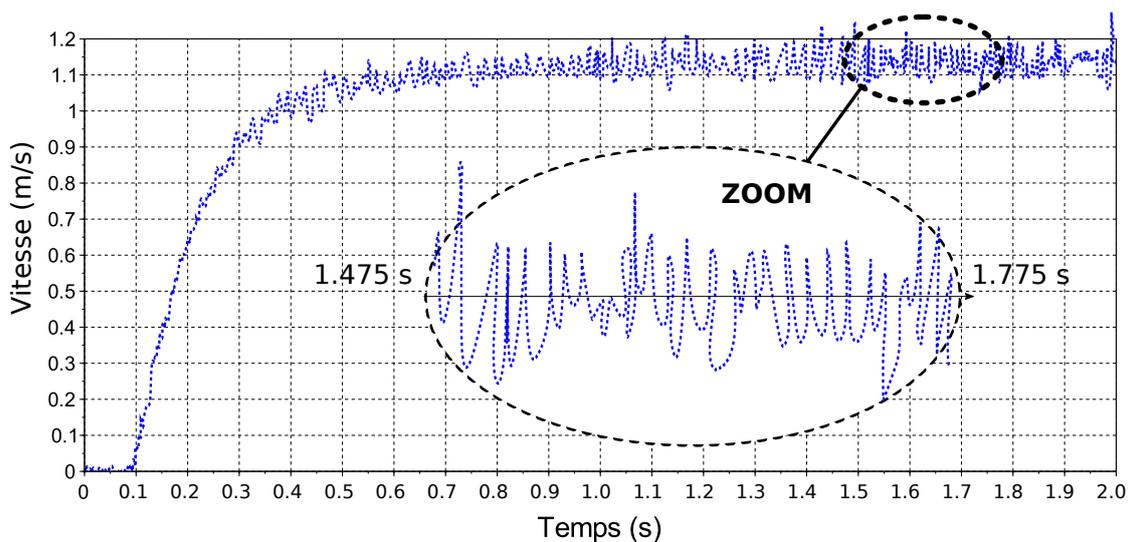
Question 16. Compléter alors le script Python pour résoudre numériquement les équations associées à ce système asservi avec ce nouveau correcteur (bien évidemment, on prendra en compte la saturation et on ne prendra pas en compte le terme D_i pour $i = 0$).

Question 17. Déterminer un couple de paramètres (K_c, K_i, K_d) permettant de satisfaire aux exigences du cahier des charges.

Question 18. Tracer le diagramme de Bode associé à l'action dérivée seule : $C_d(p) = K_d \cdot p$.

On donne ci-dessous la courbe utilisée au début du TP pour l'identification avec un zoom sur la partie "régime permanent".

Question 19. Mesurer l'ordre de grandeur de la fréquence et de la pulsation associée au bruit de mesure.



Question 20. Montrer alors que la correction dérivée multiplie énormément ce bruit de mesure.

En pratique et pour éviter ce phénomène d'amplification du bruit, on retient plutôt une correction à avance de phase de la forme suivante :

$$C(p) = K_c + \frac{K_i}{p} + K_d \cdot \frac{1 + T_1 \cdot p}{1 + T_2 \cdot p} \quad \text{où} \quad T_1 > T_2$$

Question 21. Tracer le diagramme de bode de la partie à avance de phase : $C_a(p) = K_d \cdot \frac{1 + T_1 \cdot p}{1 + T_2 \cdot p}$. Montrer que la problématique de l'amplification du bruit de mesure est réglée.

Question 22. Donner la méthode pour modéliser ce correcteur numériquement. Mettre en place cette résolution numérique sur Python.